

表面波の近似的方向スペクトルの観測

鈴木 禧 実*

1. 要 旨

水圧式波高計およびストレイン ゲージ式波高計の同時観測記録から表面波の近似的方向スペクトルを求める方法を提案し、現地観測データを用いた解析例を示し、この方法で得られる方向スペクトルおよび解析の中間過程で求められる水中の球に作用する波力についての抵抗係数、質量係数についてシミュレーション データにより近似の精度を検討した。

2. 緒 言

発生域における波浪特性を明らかにするためには、波向特性をも加味した波の不規則性を明確にする必要がある。種々の港湾構造物の設計に用いられる波向きは波峰線に直角な方向と定義されているが、この波向は一般には時・空間内の任意の点で不規則に変動する。不規則な波向特性をも加味した海面状態を記述するには方向および周波数に関する波のエネルギー分布を表わす方向スペクトルによって可能となる。

海の波の方向スペクトルを現地観測データに基づいて求める試みは数多く発表されており一応の成果があがっている。Barber(1959)¹⁾は数個の波高計列による同時観測データにより求める方法を提案し、Cummins(1959)²⁾はこれを水路内の実験に適用した。Barber (1961)³⁾はこの方法における方向分解能についてさらに詳細な検討を加えた。この方法は Mobarek (1965)³⁾により水路内の風波の方向スペクトルの観測に応用されている。Cote 他 (1957)⁴⁾は航空機から海面のステレオ写真を撮り方向スペクトルを得ており、井島他 (1968)⁵⁾も金沢海岸において実体写真観測法により同様の成果を得ている。Longuet-Higgins および Cartwright (1961)⁶⁾は海面のブイの運動の測定値により方向スペクトルを観測し、この方法を用いて Ewing (1969)⁷⁾も大西洋における観測結果を発表している。永田 (1964)⁸⁾は電磁流速計により水粒子の水平速度成分の観測値から波の方向スペクトルを算出できることを提案した。

3. 波浪諸元の擬似積分表似

風波は周期、波高、位相の異なる正弦波の合成された

ものであり個々の波は種々の方向に進行しているものと考えられる。いま海底に座標軸の原点をとり鉛直上向きに z 軸、 x, y を水平方向の二軸とする。個々の波は微小振幅波理論にしたがうものとしその周波数を f 、進行方向と x 軸とのなす角を θ 、位相を ϕ とし時間は t とする。海面が定常確率過程とすれば平均水面からの水位変動は Pierson⁹⁾ によるとつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(x, y, t) = & \lim_{Q \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sqrt{4 P(f_m, \theta_n)} \Delta f_m \Delta \theta_n \\ & \cdot \cos(k_m x \cos \theta_n + k_m y \sin \theta_n - 2 \pi f_m t + \phi_{mn}) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $P(f_m, \theta_n)$ は (f, θ) 平面で $f=f_m, \theta=\theta_n$ に対応する方向スペクトル密度、また $f_m, \theta_n, \Delta f_m$ および $\Delta \theta_n$ はつぎのように定義されている。 $f=0, \frac{Q}{M}, \frac{2Q}{M}, \dots, \frac{MQ}{M}$; $\theta=0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi N}{N}$; $\Delta f = \frac{Q}{M}$; $\Delta \theta = \frac{2\pi}{N}$ 。 f_m, θ_n は区間 $\left[\frac{m-1}{M}Q, \frac{m}{M}Q\right]$ の中点および $[2\pi(n-1)/N, 2\pi n/N]$ の中点であり、 ϕ_{mn} は区間 $[0, 2\pi]$ の間で一様に分布する乱数である。微小振幅波理論により波数 k_m と周波数 f_m の間にはつぎの関係がある。

$$(2 \pi f_m)^2 = g k_m \tanh k_m d \quad (2)$$

式 (1) は便宜的につぎのように書くことにする。

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{4 P(f, \theta)} d\theta df \\ & \cdot \cos(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2 \pi ft + \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) は式 (1) の極限の型を表わすものであるが解析的観点からは積分でも確率積分でもない。このような式は擬似積分表示と呼ばれるべきものである。同様に多くの波浪諸元はこの方式で表示することができ、点 (x, y, z) における水粒子の速度の x, y 成分および加速度の x, y 成分はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} V_x(x, y, z; t) = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{P(f, \theta)} d\theta df \\ & \cdot (2 \pi f) \cdot \cos \theta \cdot \frac{\cosh kz}{\sinh kd} \\ & \cdot \cos(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2 \pi ft + \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

$$V_y(x, y, z; t) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{P(f, \theta)} d\theta df$$

* 正会員 運輸省港湾技術研究所

$$\begin{aligned} & \cdot (2\pi f) \cdot \sin \theta \cdot \frac{\cosh kz}{\sinh kd} \\ & \cdot \cos(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2\pi ft + \Phi) \\ & \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x(x, y, z; t) = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{P(f, \theta)} d\theta df \\ & \cdot (2\pi f)^2 \cdot \cos \theta \cdot \left(\frac{\cosh kz}{\sinh kd} \right)^2 \\ & \cdot \sin(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2\pi ft + \Phi) \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y(x, y, z; t) = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{P(f, \theta)} d\theta df \\ & \cdot (2\pi f)^2 \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{\cosh kz}{\sinh kd} \right)^2 \\ & \cdot \sin(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2\pi ft + \Phi) \\ & \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

また水圧変動, η_P はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \eta_P(x, y, z; t) = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{P(f, \theta)} d\theta df \cdot \left(\frac{\cosh kz}{\cosh kd} \right) \\ & \cdot \omega \cdot \cos(kx \cos \theta + ky \sin \theta - 2\pi ft + \Phi) \\ & \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

水中の物体に作用する波力についての統計的取扱いは、Pierson (1963)⁽¹⁰⁾, Pierson および Holmes (1965)⁽¹¹⁾, Borgman (1967)⁽¹²⁾, Borgman および Brown (1966)⁽¹³⁾ があり、海面が定常確率過程であること、また波力 F はつぎのように表わされるものと仮定している。

$$F = C_1 V|V| + C_2 A \dots\dots\dots (9)$$

これにしたがうと海底の近くに設置された球体に作用する波力は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} F = & \frac{C_D \omega}{2g} \cdot (\pi r^2) \cdot V|V| + \frac{C_M}{g} \cdot \omega \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \cdot A \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに, g : 重力の加速度, ω : 海水の単位体積重量, C_D : 抵抗係数, C_M : 質量係数, r : 球体の半径。

式 (10) の中の非線形項の取扱いは複雑^{(14), (15)} であるのでこれを線形近似して $V|V| = CV$ のように表わすと係数 C は $V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}}$ のようになる⁽¹⁶⁾。したがって式 (10) は

$$\begin{aligned} F \cong & \frac{C_D \omega}{2g} \cdot (\pi r^2) \cdot V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot V \\ & + \frac{C_M}{g} \cdot \omega \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) A \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となり水中の球に作用する波力の x, y 成分は

$$\begin{aligned} F_x \cong & \frac{C_D \omega}{2g} \cdot (\pi r^2) \cdot V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot V_x \\ & + \frac{C_M}{g} \cdot \omega \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) A_x \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$F_y \cong \frac{C_D \omega}{2g} \cdot (\pi r^2) \cdot V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot V_y$$

$$+ \frac{C_M}{g} \cdot \omega \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) A_y \dots\dots\dots (13)$$

となる。式 (12) および式 (13) に式 (4)~(7) を代入すれば擬積分表示が得られる。

4. 表面波の方向スペクトル

ある点における表面波形記録 $\eta(x, y, t)$ および水中の球体に作用する波力の x, y 成分の記録があるものとし、これから表面波の方向スペクトルを求める方法を考える。

(1) 相互相関関数

二つの実数の定常確率過程を $X_1(x, y, t)$ および $X_2(x, y, t)$ とし平均値は 0 とする。 X_1 と X_2 の相互相関関数 $C_{X_1 X_2}(g, h, \tau)$ はつぎのように定義される。

$$\begin{aligned} C_{X_1 X_2}(g, h, \tau) = & \text{Cov}[X_1(x, y, t), \\ & X_2(x+g, y+h, t+\tau)] \\ = & E[X_1(x, y, t) X_2(x+g, y+h, t+\tau)] \\ & \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここに, g は x , h は y , τ は t に対する遅れ数であり $E[\]$ は期待値を求める作用素である。式 (3) を用いて表面波の相互相関関数, $C_{\eta\eta}$ はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} C_{\eta\eta}(g, h, \tau) = & E[\eta(x, y, t) \eta(x+g, y+h, t+\tau)] \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$C_{\eta\eta(mn)}(g, h, \tau)$ を式 (1) の和の中の (m, n) 項の相互相関関数とすれば式 (1) を参考にして

$$\begin{aligned} C_{\eta\eta(m, n)}(g, h, \tau) = & E[4 P(f_m, \theta_n) \Delta f \Delta \theta \\ & \cdot \cos(k_m x \cos \theta_n + k_m y \sin \theta_n - 2\pi f_m t + \Phi_{mn}) \\ & \cdot \cos\{k_m(x+g) \cos \theta_n + k_m(y+h) \sin \theta_n - 2\pi f_m \\ & \cdot (t+\tau) + \Phi_{mn}\} \\ = & E[4 P(f_m, \theta_n) \Delta f \Delta \theta \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(k_m g \cos \theta_n \\ & + k_m h \sin \theta_n - 2\pi f_m \tau) + \cos(k_m(2x+g) \cos \theta_n \\ & + k_m(2y+h) \sin \theta_n - 2\pi f_m(2t+\tau) + 2\Phi_{mn}) \} \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ランダムな位相を含む cosine の期待値は下のようになり 0 となる。

$$E[\cos(\varphi + \Phi)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \Phi) d\Phi = 0 \dots\dots (17)$$

したがって式 (16) は

$$\begin{aligned} C_{\eta\eta(m, n)}(g, h, \tau) = & 2 p(f_m, \theta_n) \cos(k_m g \cos \theta_n \\ & + k_m h \sin \theta_n - 2\pi f_m \tau) \dots\dots (18) \end{aligned}$$

となり, 個々の波の独立性から相乗積は 0 となるので $C_{\eta\eta}$ は式 (18) を f, θ について加え合わせてその極限をとったものとして表わされる。

$$\begin{aligned} C_{\eta\eta}(g, h, \tau) = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos(k g \cos \theta \\ & + k h \sin \theta - 2\pi f \tau) d\theta df \dots\dots (19) \end{aligned}$$

同様の計算により η と F_x , η と F_y , F_x と F_x , F_y

と F_y , F_x と F_y についての相互相関関数を求めるとつぎようになる。

$$C_{\eta F_x}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \cos \theta \cdot \cos(kg \cos \theta + kh \sin \theta - 2\pi f \tau) d\theta df \\ + 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \cos \theta \cdot \sin(kg \cos \theta + kh \sin \theta - 2\pi f \tau) d\theta df \dots (20)$$

以下 $(kg \cos \theta + kh \sin \theta - 2\pi f \tau)$ を () として示す。

$$C_{\eta F_y}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \sin \theta \cdot \cos() d\theta df + 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \sin \theta \cdot \sin() d\theta df \dots (21)$$

$$C_{F_x F_x}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \cos^2 \theta \cdot \cos() d\theta df \dots (22)$$

$$C_{F_y F_y}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin^2 \theta \cdot \cos() d\theta df \dots (23)$$

$$C_{F_x F_y}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos() d\theta df \dots (24)$$

ここに, C_D'' および C_M'' は下に示すとおりである。

$$C_D'' = C_D \times \frac{\omega}{2g} \cdot \pi r^2 \cdot V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \frac{\cosh kz}{\sinh kd} (2\pi f) \dots (25)$$

$$C_M'' = C_M \cdot \frac{\omega}{g} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \cdot \left(\frac{\cosh kz}{\sinh kd} \right)^2 \cdot (2\pi f)^2 \dots (26)$$

(2) クロス スペクトル密度およびパワー スペクトル密度

一次元で実数の定常確率過程 $X_1(t)$, $X_2(t)$ についてその相互相関関数 $C_{X_1 X_2}(\tau)$ はクロス スペクトル密度 $P_{X_1 X_2}(f)$ とつぎのような関係にある。

$$C_{X_1 X_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1 X_2}(f) e^{-i2\pi f \tau} df \dots (27)$$

$$C_{\eta \eta}(g, h, \tau) = 2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos(kg \cos \theta + kh \sin \theta) d\theta \right\} \cos 2\pi f \tau df \\ + 2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin(kg \cos \theta + kh \sin \theta) d\theta \right\} \sin 2\pi f \tau df \dots (30)$$

式 (29) と比較すれば, $\eta(x, y, t)$ に対する C_0 -spectra および Quadrature spectra はつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} C_{0\eta\eta}(f) &= \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos(kg \cos \theta + kh \sin \theta) d\theta \\ q_{\eta\eta}(f) &= \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin(kg \cos \theta + kh \sin \theta) d\theta \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

同様にして他の要素に対する C_0 および Quadrature spectra は式 (20)~(24) よりつぎのように求められる。以下 $(kg \cos \theta + kh \sin \theta)$ を () で表わす。

$$\left. \begin{aligned} C_{0\eta F_x}(f) &= \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \cos \theta \cos() d\theta + \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \cos \theta \sin() d\theta \\ q_{\eta F_x}(f) &= \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \cos \theta \sin() d\theta + \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \cos \theta \cos() d\theta \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{0\eta F_y}(f) &= \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \sin \theta \cos() d\theta + \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \sin \theta \sin() d\theta \\ q_{\eta F_y}(f) &= \int_0^{2\pi} C_D'' p(f, \theta) \sin \theta \sin() d\theta + \int_0^{2\pi} C_M'' p(f, \theta) \sin \theta \cos() d\theta \end{aligned} \right\} \dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{0F_x F_x}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \cos^2 \theta \cos() d\theta \\ q_{F_x F_x}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \cos^2 \theta \sin() d\theta \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{0F_y F_y}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin^2 \theta \cos() d\theta \\ q_{F_y F_y}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin^2 \theta \sin() d\theta \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

$P_{X_1 X_2}(f)$ は実部と虚部から成りつぎのように表わされる。

$$P_{X_1 X_2}(f) = C_0(f) - iq(f) \dots (28)$$

実部は Co-spectral 密度, 虚部は Quadrature-spectral 密度と呼ばれている。 $C_{X_1 X_2}(\tau)$ を $C_0(f)$ および $q(f)$ を用いて表わすとつぎようになる。

$$C_{X_1 X_2}(\tau) = 2 \int_0^\infty C_0(f) \cos 2\pi f \tau df \\ + 2 \int_0^\infty q(f) \sin 2\pi f \tau df \dots (29)$$

式 (18) を変形して

$$\left. \begin{aligned} C_{0F_xF_y}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin \theta \cos \theta \cos(\langle \rangle) d\theta \\ q_{F_xF_y}(f) &= \int_0^{2\pi} (C_D''^2 + C_M''^2) p(f, \theta) \sin \theta \cos \theta \sin(\langle \rangle) d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

3. 表面波の方向スペクトルの算定

式(31)～(36)は時間的空間的に離れた2点において η , F_x , F_y が求められている一般的な場合について導

かれているが実際には波高計と波向計は同一の架台に取りつけられることが多く、このような条件を考慮すれば $\langle \rangle$ 内の値は近似的に0に等しくなるので式(31)～(36)は以下ようになる。

$$\hat{p}_{\eta\eta}(f) = C_{0\eta\eta}(f) = \int_0^{2\pi} p(f, \theta) d\theta \dots\dots\dots (37)$$

$$\hat{p}_{F_xF_x}(f) = C_{0F_xF_x}(f) = \{(C_D'')^2 + (C_M'')^2\} \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos^2 \theta d\theta \dots\dots\dots (38)$$

$$\hat{p}_{F_yF_y}(f) = C_{0F_yF_y}(f) = \{(C_D'')^2 + (C_M'')^2\} \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin^2 \theta d\theta \dots\dots\dots (39)$$

$$\hat{p}_{\eta F_x}(f) = C_{0\eta F_x}(f) - iq_{\eta F_x}(f) = C_D'' \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos \theta d\theta - iC_M'' \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \cos \theta d\theta \dots\dots\dots (40)$$

$$\hat{p}_{\eta F_y}(f) = C_{0\eta F_y}(f) - iq_{\eta F_y}(f) = C_D'' \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin \theta d\theta - iC_M'' \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin \theta d\theta \dots\dots\dots (41)$$

$$\hat{p}_{F_xF_y}(f) = C_{0F_xF_y}(f) = \{(C_D'')^2 + (C_M'')^2\} \int_0^{2\pi} p(f, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \dots\dots\dots (42)$$

式(37)～(42)の関係を用いて $p(f, \theta)$ を決定すればよいわけであるが、このままでは簡単には求められないので $p(f, \theta)$ がつぎのように表わされるものと仮定する。

$$p(f, \theta) = p_\eta(f) h(\theta) = p_\eta(f) \cdot \frac{e^{a \cos(\theta - \gamma)}}{2\pi I_0(a)} \dots\dots (43)$$

$p_\eta(f)$ は、パワー スペクトルであるが、 $h(\theta)$ は Mobarek²⁾ が提案しているもので円正規分布 (Circular normal 分布)¹⁷⁾ の確率密度関数である。 a は θ の平均値への集中度を表わす定数であり、 γ は角度の定数でこ

の方向に最も多くの波が進む。 θ は個々の波の進行方向、 $I_0(a)$ は第一種変形ベッセル関数であり $1/2\pi \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$ を1にするための正規化因子である。式(37)

に式(43)を代入すれば

$$\hat{p}_{\eta\eta}(f) = p_\eta(f) \dots\dots\dots (44)$$

となり式(38)～(42)に式(43)を代入すれば、それぞれのクロス スペクトル密度をつぎのようにパワー スペクトル $p_\eta(f)$ と第一種の変形ベッセル関数で表わすことができる。

$$\hat{p}_{F_xF_x}(f) = (C_D''^2 + C_M''^2) \cdot \frac{p_\eta(f)}{2} \left\{ 1 + \cos 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \right\} = p_{F_x}(f) \dots\dots\dots (45)$$

$$\hat{p}_{F_yF_y}(f) = (C_D''^2 + C_M''^2) \cdot \frac{p_\eta(f)}{2} \left\{ 1 - \cos 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \right\} = p_{F_y}(f) \dots\dots\dots (46)$$

$$\hat{p}_{\eta F_x}(f) = (C_D'' - iC_M'') \cdot p_\eta(f) \cdot \cos \gamma \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (47)$$

$$\hat{p}_{\eta F_y}(f) = (C_D'' - iC_M'') \cdot p_\eta(f) \cdot \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (48)$$

$$\hat{p}_{F_xF_y}(f) = (C_D''^2 + C_M''^2) \cdot \frac{p_\eta(f)}{2} \sin 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (49)$$

式(44)～(49)から式(43)の中の a および γ の値を決めれば $h(\theta)$ が決定され $p(f, \theta)$ が求まる。変数の数より式の数が多いので最小自乗法的により最適解を求めればよいわけであるが、ここでは式(44)～(49)を1回ずつ使用して a , γ を求める。式(45), 式(46), および式(49)を組みあわせると $\frac{I_0(a)}{I_2(a)}$ は

$$\frac{I_0(a)}{I_2(a)} = \frac{\{(C_D'')^2 + (C_M'')^2\} \cdot p_\eta(f)}{\sqrt{\{p_{F_x}(f) - p_{F_y}(f)\}^2 + \{2 \cdot C_{0F_xF_y}(f)\}^2}} \dots\dots\dots (50)$$

式(50)と式(49)から $\sin 2\gamma$ がつぎのように求められる。

$$\sin 2\gamma = \frac{2 \cdot C_{0F_xF_y}(f)}{\sqrt{\{p_{F_x}(f) - p_{F_y}(f)\}^2 + \{2 \cdot C_{0F_xF_y}(f)\}^2}} \dots\dots\dots (51)$$

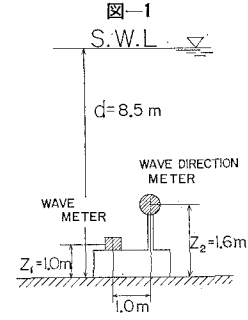
同様に $I_0(a)/I_1(a)$ および $\cos \gamma$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{I_0(a)}{I_1(a)} &= \frac{C_D'' p_\eta(f)}{\sqrt{\{C_{0\eta F_x}(f)\}^2 + \{C_{0\eta F_y}(f)\}^2}} \\ &= \frac{C_M'' p_\eta(f)}{\sqrt{\{q_{\eta F_x}(f)\}^2 + \{q_{\eta F_y}(f)\}^2}} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{C_{0\eta F_x}(f)}{\sqrt{\{C_{0\eta F_x}(f)\}^2 + \{C_{0\eta F_y}(f)\}^2}} \\ &= \frac{q_{\eta F_x}(f)}{\sqrt{\{q_{\eta F_x}(f)\}^2 + \{q_{\eta F_y}(f)\}^2}} \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

5. 観測例

観測データとして昭和 41 年に運輸省第一港湾建設局酒田港で観測された水圧式波高計とストレイン ゲージ式波向計^{18), 19)}の同時観測記録を使用した。波高計と波向計の設置位置関係は図-1 のとおりである。この場合には、水圧式波高計の記録を使用するので式 (44)~(49) は水圧波のパワー スペクトル $p_{\eta_p}(f)$ を用いてつぎのように表わされる。



$$\hat{p}_{\eta_p}(f) = \omega^2 \cdot \left(\frac{\cosh kz_1}{\cosh kd} \right)^2 p_{\eta}(f) \dots\dots\dots (54)$$

$$\hat{p}_{F_x}(f) = \{(C_D''')^2 + (C_M''')^2\} \frac{\hat{p}_{\eta_p}(f)}{2} \left\{ 1 + \cos 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

$$\hat{p}_{F_y}(f) = \{(C_D''')^2 + (C_M''')^2\} \frac{\hat{p}_{\eta_p}(f)}{2} \left\{ 1 - \cos 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

$$\hat{p}_{\eta_p F_x}(f) = \{C_D''' - iC_M'''\} \hat{p}_{\eta_p}(f) \cdot \cos \gamma \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (57)$$

$$\hat{p}_{\eta_p F_y}(f) = \{C_D''' - iC_M'''\} \hat{p}_{\eta_p}(f) \sin \gamma \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (58)$$

$$\hat{p}_{F_x F_y}(f) = \{(C_D''')^2 + (C_M''')^2\} \frac{\hat{p}_{\eta_p}(f)}{2} \sin 2\gamma \frac{I_2(a)}{I_0(a)} \dots\dots\dots (59)$$

ここに、 C_D''' および C_M''' はつぎのように定義されている。

$$C_D''' = C_D'' \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right) \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{C_D}{2g} (\pi r^2) \cdot V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right) \left(\frac{\cosh kz_2}{\sinh kd} \right) (2\pi f) \dots\dots\dots (60)$$

$$C_M''' = C_M'' \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right) \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{C_M}{g} \left(\frac{3}{4} \pi r^3 \right) \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right) \left(\frac{\cosh kz_2}{\sinh kd} \right)^2 (2\pi f)^2 \dots\dots\dots (61)$$

z_1 : 水圧式波高計の設置水深, z_2 : 波向計受感部の中心位置。式 (60) 中の V_{rms} はこの観測データからは直接求められないので次式により水圧波のスペクトルから間接的に求めるものとする。

$$V_{rms} = \sqrt{2 \int_0^\infty P_v(f) df} \quad P_v(f): \text{水粒子速度のパワー スペクトル} \dots\dots\dots (62)$$

$$P_v(f) = (2\pi f)^2 \left(\frac{\cosh kz_2}{\sinh kd} \right)^2 p_{\eta}(f) \dots\dots\dots (63)$$

式 (54), 式 (62) および式 (63) から、 V_{rms} と水圧波のパワー スペクトルの関係がつぎのように求まる。

$$V_{rms} = \sqrt{2 \int_0^\infty (2\pi f)^2 \left(\frac{\cosh kz_2}{\sinh kd} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right)^2 p_{\eta_p}(f) df} \dots\dots\dots (64)$$

一般に C_D , C_M は定数と考えられているが、これらは周波数によって変動するようである。すなわち、式 (54)~(59) を用いて C_D''' および C_M''' を波の諸元のスペクトル密度で表わすとつぎようになる。

$$C_{DX}''' = \sqrt{\frac{\{\hat{p}_{F_x}(f) + \hat{p}_{F_y}(f)\} \cdot \{C_{0\eta_p F_x}(f)\}^2}{\hat{p}_{\eta_p}(f) \{(C_{0\eta_p F_x}(f))^2 + (q_{\eta_p F_x}(f))^2\}}} \dots\dots\dots (65)$$

$$C_{DY}''' = \sqrt{\frac{\{\hat{p}_{F_x}(f) + \hat{p}_{F_y}(f)\} \cdot \{C_{0\eta_p F_y}(f)\}^2}{p_{\eta_p}(f) \{(C_{0\eta_p F_y}(f))^2 + (q_{\eta_p F_y}(f))^2\}}} \dots\dots\dots (66)$$

$$C_{MX}''' = C_{DX}''' \cdot \sqrt{(q_{\eta_p F_x}(f))^2 / (C_{0\eta_p F_x}(f))^2} \dots\dots\dots (67)$$

$$C_{MY}''' = C_{DY}''' \cdot \sqrt{(q_{\eta_p F_y}(f))^2 / (C_{0\eta_p F_y}(f))^2} \dots\dots\dots (68)$$

ここに添字 X, Y はそれぞれ F_x, F_y の成分から求める値であることを示す。式 (60), (61) を式 (65)~(68) に代入すれば C_D , C_M はつぎのように求められる。

$$C_D = \left(\frac{C_{DX}'''}{C_{DY}'''} \right) \cdot \left[\frac{1}{2g} \pi r^2 V_{rms} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\sinh kd} \right) \left(\frac{\cosh kz_2}{\cosh kz_1} \right) \cdot 2\pi f \right]^{-1} \dots\dots\dots (69)$$

$$C_M = \left(\frac{C_{MX}'''}{C_{MY}'''} \right) \cdot \left[\frac{4}{3g} \pi r^3 \cdot \left(\frac{\cosh kd}{\cosh kz_1} \right) \cdot \left(\frac{\cosh kz_2}{\sinh kd} \right)^2 (2\pi f)^2 \right]^{-1} \dots\dots\dots (70)$$

a および γ の値は式 (50)~(53) において C_D'' , C_M'' および $p_{\eta}(f)$ の代りに C_D''' , C_M''' , $p_{\eta_p}(f)$ を用いることにより求められる。

観測結果の一例

観測データの解析において、スペクトル解析は Bendat

および Piersol²⁰⁾ の方法にしたがいスペクトル ウィンドウとして Hamming のウィンドウを用いた。記録の長さは 10 分間である。解析に使用した諸元は、データ総数 500 個、データ分割時間間隔、 Δt は 1.2245 sec、最大ラグ数 m は 20 である。自由度を大きくするために m を小さくとり解析の結果としてはスペクトル密度の集中する周波数 0.06~0.2 Hz を対象とした。 C_D および C_M の値は各周波数ごとに図-2 のように求められた。 F_x 成分および F_y 成分から求められた C_D および C_M の平均値を用いて $I_0(a)/I_2(a)$ および r 値を求めると図-3 のようになる。 r の値は式 (51) から求めたものである。パワー スペクトルの各周波数成分がどのような角度 θ から観測点に進行してきたかを知るためには図-3 の a および r の値とパワー スペクトル

密度を各周波数ごとに式 (43) に入れて計算すればよい。この結果方向スペクトル $P(f, \theta)$ は図-4 のように求められる。これを (f, θ) 平面上にプロットして等エネルギー線を結べば $P(f, \theta)$ は図-5 のように表わすこともできる。

6. シミュレーションによる近似度の検討

(1) シミュレーションの方法

海の波の模擬波を作り出すためには a) 無数の波を重ね合せる方法と b) 入力データとして雑音を与えて適当なフィルターを通す方法が考えられるが、ここでは a) の方法を用いて定められた方向スペクトルをもつ波を発生させ、この波によるある一地点の水圧波形および水中の球に作用する波力の x, y 成分を求めて上記の解析法のチェック データとした。式 (3) において積分区間を有限にとり適当な $P(f, \theta)$ を与えれば海面の水位変動が求められるが、 f 軸、 θ 軸を等間隔で分割した場合には必ず周期性が介入する。Borgman¹⁶⁾ が提案しているように、累積スペクトルを考えて分割区間内のエネルギーが等しくなるように周波数軸を定めてやれば周期性の介入を避けることができる。

いま $P(f, \theta)$ が式 (43) のように書けるとすれば累積スペクトル、 $S(f, \theta)$ は

$$\begin{aligned} S(f, \theta) &= 2 \int_0^f \int_0^\theta h(\theta') p(f') d\theta' df' \\ &= 2 \int_0^f p(f') \left\{ \int_0^\theta h(\theta') d\theta' \right\} df' \dots\dots (71) \end{aligned}$$

したがって

$$S(f, 2\pi) = 2 \int_0^f p(f') df' = \pi(f) \dots\dots\dots (72)$$

となり式 (3) の中で $p(f_m) \Delta f_m$ に相当する量は近似的に $[\pi(f_m) - \pi(f_{m-1})]/2$ に等しくなるから式 (3) はつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) &= \sqrt{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sqrt{\pi(f_m) - \pi(f_{m-1})} \\ &\quad \cdot \sqrt{h(\theta_n) \Delta \theta_n} \cdot \cos(k_m x \cos \theta_n \\ &\quad + k_m y \sin \theta_n - 2 \pi f_m t + \phi_{mm}) \dots\dots (73) \end{aligned}$$

パワー スペクトル $p(f)$ を Bretschneider-Pierson のスペクトル密度の形を仮定すれば

$$p(f) = \frac{AB}{f^5} e^{-B/f^4} \dots\dots\dots (74)$$

であるから

$$\pi(f) = 2 \int_0^f p(f') df' = \frac{A}{2} e^{-B/f^4} \dots\dots\dots (75)$$

となる。

現地観測データにおいてパワー スペクトルのピーク周波数、 f_p は約 0.1 Hz であり 0.5 Hz 以上はエネルギーが 0 とみなせるので最大周波数 f_M を 0.5 Hz とすれば、つぎのようにスペクトルの形が決定される。

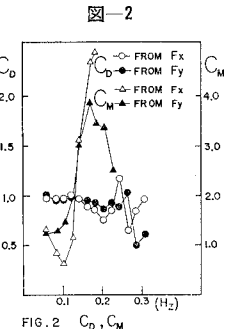


図-2

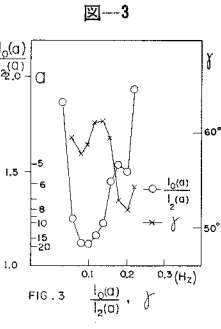


図-3

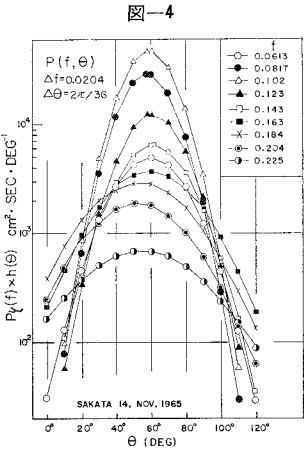


図-4

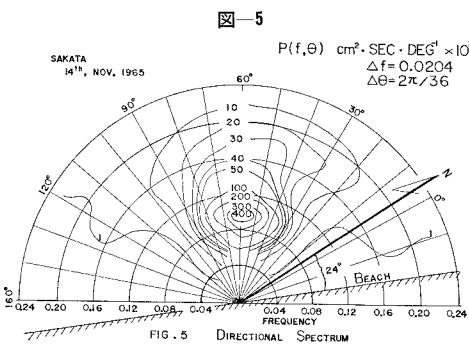


図-5

表-1 シミュレーション定数表

$f_P(\text{Hz})$	$f_M(\text{Hz})$	B	A	a	r	$I_0(16)$	C_D	C_M	$d(\text{m})$	$z_1(\text{m})$	$z_2(\text{m})$
0.1	0.5	1.25×10^{-4}	7214.4	16	60°	89344.62	1.0	1.5	8.5	1.00	1.60

$\frac{dp(f)}{df} = 0$ とおけば $f_p^4 = \frac{4}{5} B$ の関係が得られ B が求まり、スペクトルの全エネルギーは

$$\pi(\infty) = 2 \int_0^\infty p(f) df \div 2 \int_0^{f_M} p(f) df \dots\dots\dots (76)$$

であるから f_M と $\pi(\infty)$ を仮定すれば、 A は $A = 2\pi(\infty)e^{B/f_M}$ となる。 $p(f)$, $h(\theta)$ を適当に定めてやれば種々の方向スペクトルを持つ波を作りだせるが、ここでは現地観測データの例に近い諸元をもつ波を発生させて解析法の検討を試みた。

(2) 本解析法のシミュレーションデータによる検討

表-1 の定数を用いて模擬波による水圧変動、粒子速度、加速度を1秒間隔で600個発生させた。 f 軸は60分割、 θ 軸は72分割として θ に関しては積分領域を $r \pm 90^\circ$ とした。この場合 90° 以上では $h(\theta)$ がきわめて小さくなることと積分領域を $\pm 180^\circ$ とした場合には当研究所の電算機(TOSBAC-3400)では演算時間が22時間になるからである。

これらの粒子速度、加速度から水中の球に作用する波力を式(10)の形で求めた場合と式(11)(非線形項の線形化)を用いて求めた場合について上述した方向スペクトル解析にしたがい $\frac{I_0(a)}{I_2(a)}$, $\frac{I_0(a)}{I_1(a)}$, $\sin 2r$ から求めた r 値、 C_D , C_M 等を比較すると図-6~9 のようになる。いずれの値も線形近似式(11)を用いたために大き

図-6

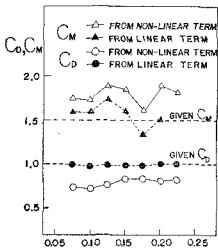
FIG. 6 EFFECT OF THE LINEAR APPROXIMATION ON C_D , C_M

図-7

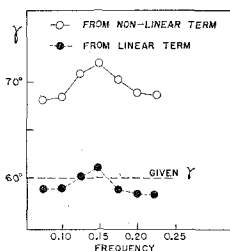
FIG. 7 EFFECT OF THE LINEAR APPROXIMATION ON γ

図-8

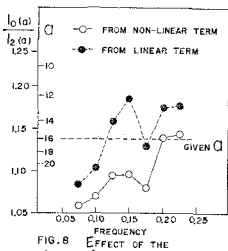
FIG. 8 EFFECT OF THE LINEAR APPROXIMATION ON $I_0(a)/I_2(a)$

図-9

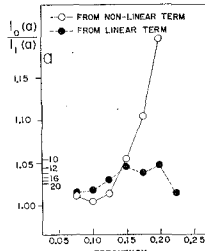
FIG. 9 EFFECT OF THE LINEAR APPROXIMATION ON $I_0(a)/I_1(a)$

図-10

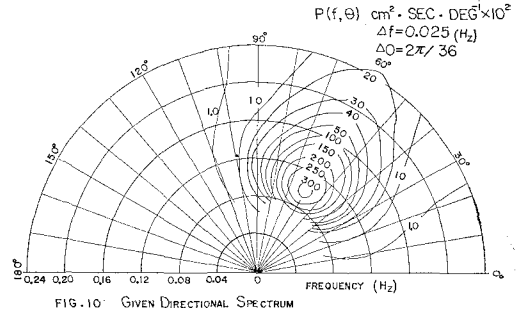


図-11

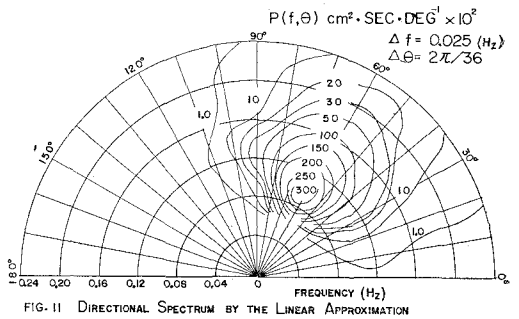
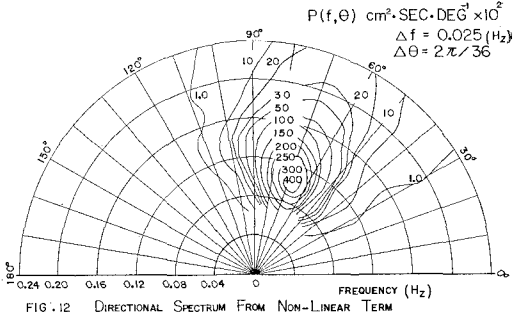


図-12



めに求められることがわかる。また a 値を推定する場合には $\frac{I_0(a)}{I_2(a)}$ から求めたほうが安定した解が得られるようである。図-10 は最初に与えた方向スペクトルであり図-11, 図-12 は波力として速度の項を線形近似した場合と線形近似しないものから求めた方向スペクトルである。この近似の精度に影響すると考えられる要因としては波のエネルギーの大きさ、 C_M と C_D の比の値、波のエネルギーの一方方向への集中度などであろう。一例として表-1 の A の値を変えて波のもつエネルギーの大きさにより $\frac{I_0(a)}{I_2(a)}$ および r 値がどのように推定されるかを比較したものが図-13, 14 である。図-13, 14 から波のエネルギーが小さいほど近似の精度が良

図-13

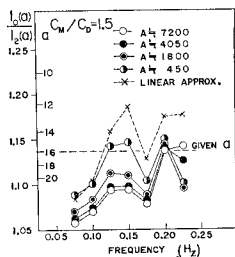
FIG. 13 EFFECT OF THE AMOUNT OF WAVE ENERGY ON $I_2(O)/I_1(O)$

図-14

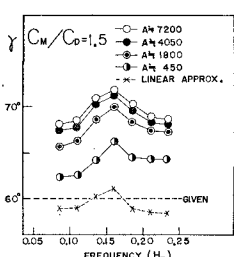
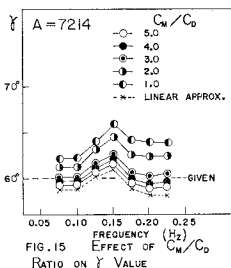
FIG. 14 EFFECT OF THE AMOUNT OF WAVE ENERGY ON γ VALUE

図-15

FIG. 15 EFFECT OF THE RATIO OF C_M/C_D ON γ VALUE

化することがわかる。また表-1の C_D , C_M の値を変えて C_M/C_D の大きさによる γ 値の推定精度は、 C_M/C_D の値が大きくなるほど良化することが図-15からわかるが、これは C_D が非線形項に対する定数であることから当然のことであろう。

7. 結 び

波高計と波向計の現地観測データから近似的方向スペクトルを求める方法を提案しその近似の精度について若干の検討を行なった。さらに多くのケースについてシミュレーションにより近似の精度を検討することにより現地波浪の方向スペクトルを求める方法として十分実用性のあることが立証されよう。今後はこの方法による現地波浪のスペクトルの測定精度を明確にすると同時に非線形項の近似精度の向上、流れの影響を考慮した方法を研究すると同時に現地観測データの集積を計り、波向観測への応用を考えたい。この研究にあたり終始ご指導頂いた当研究所観測調査課 高橋課長ならびに佐々木弘技官、データを提供していただいた運輸省第一港湾建設局酒田港工事事務所、電算機による計算にあたりご指導いただいた当研究所計算室 津幡技官、ならびに図面の作成に協力された観測調査課 中井徹也技官に謝意を表します。

なお、本研究の初期の段階でカリフォルニア州大、パークレイの L.E. Borgman 教授の指導を受けたことを記し謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Cummins, W.E.: "The Determination of Directional Wave Spectra in the TMB Maneuvering-Seakeeping Basin". 12th American Towing Tank Conf. at U.C.

Berkely, Report 1362, Sept. 1959.

- 2) Barber, N.F.: "The Directional Resolving Power of an Array of Wave Detectors". Conf. on Ocean Wave Spectra, 1961.
- 3) Mobarek, I.E.: "Directional Spectra of Laboratory Wind Waves" Proc. of A.S.C.E. WW 3, 1965.
- 4) Cote, L.J., et. al.: "The Directional Spectrum of a wind Generated Sea as Determined from Data Obtained by the Stereo wave Observation Project" N.Y. Univ., Dept. of Meteorology and Oceanography, 1957.
- 5) 井島武士・松尾隆彦: 碎波帯の波の研究 (1), 第15回海岸工学講演集, 1968年12月
- 6) Longuet-Higgins, M.S., and Cartwright, D.E.: "Observation of the Directional Spectrum of Sea Waves Using the Motion of a Floating Buoy". Conf. on Ocean Wave Spectra, 1961.
- 7) Ewing, J.A.: "Some Measurements of the Directional Wave Spectra". Jour. of Marine Research, Vol. 27, No. 2, 1969.
- 8) Nagata, Y.: "The Statistical Properties of Orbital Wave Motions and Their Application for the Measurement of Directional Wave Spectra". Jour. of Oceanographical Society of Japan, Vol. 19, No. 4, 1964.
- 9) Kinsman, B.: Wind Waves, Prentice-Hall, 1965. pp. 368.
- 10) Pierson, W.J.: "Method for the Time Series Analysis of Water Wave Effects of Piles", TN-479, U.S. Navy Civil Eng. Lab, Port Hueneme, California, 1963.
- 11) Pierson, W.J., Jr., and Holmes, P.: "The Force on a Pile Due to Irregular Waves", Proc. of A.S.C.E. WW 4, 1965.
- 12) Borgman, L.E.: "Random Hydraulic Forces on Objects, "The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, No. 1, 1967.
- 13) Brown, J.L. and Borgman, L.E.: "Tables of the Statistical Distribution of Ocean Wave Forces and Methods for the Estimation of C_D and C_M ", HEL 9-7, U.C. Berkeley, 1967.
- 14) 日野幹雄: "柱体に働く不規則波の波力 (1)", 東京工業大学土木工学科研究報告 No. 4, 1968.
- 15) 日野幹雄: "パイルに働く波力のスペクトルの理論", 第15回海岸工学講演会, 1968.
- 16) Borgman, L.E.: "Ocean Wave Simulation for Engineering Design", HEL 9-13, U.C. Berkeley, 1967.
- 17) Gumbel, E.J.: "The Circular Normal Distribution", Jour. of Amer. Statistical Association, Vol. 48, 1953.
- 18) 運輸省港湾局: "波向計", 港湾技術要報, No. 44, pp. 25~37, 1965.
- 19) Grace, R.A. and Caciano, F.M.: "An Experimental, Pilot Study of Ocean Wave-induced Forces on a Bottom-Mounted Sphere, Report No. PAC 6829, Center For Engineering Research, Univ. of Hawaii, 1968.
- 20) Bendat, J.S. and Piersol, A.G.: Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley & Sons, Inc. 1966.