

波動による乱流境界層の発達

野 田 英 明*

1. 緒 言

漂砂の問題を取り扱う場合にもっとも重要なことの一つは、底質粒子に作用する流体力、とくに波の運動に伴って生ずる流体力をいかに正しく把握するかということである。このためにはどうしても、波の運動によって底面に発達する境界層の内部機構を究明し、その速度分布や摩擦応力を明らかにしなければならない。波動による層流境界層については、かなり古くから数多くの研究が行なわれてきたが、最近では Longuet-Higgins¹⁾ の理論的研究や海底摩擦による波高減衰を取り扱った岩垣・土屋ら²⁾ の理論的実験的研究をあげることができる。しかし、乱流境界層の研究は海岸工学上非常に重要であるにもかかわらず、層流境界層のそれにくらべて、最近までそれほど進歩しなかったようである。これは、現象が複雑なことによるが、実験室の水槽底面に乱流境界層を発達させることができ、その規模から考えて、かなり困難なことも一つの原因と考えられる。したがって、実験の場合には、Kalkanis (1957, 1964)^{3), 4)} のように振動板を用いたり、また Jonsson(1963)⁵⁾ のようにU字管を用いて振動流境界層を発達させ、その流速分布を測定して、実験的に現象を把握するという方法がとられてきた。また最近では堀川・渡辺(1968)⁶⁾ によって行なわれたように、進行波による境界層内の流速が測定される段階になってきた。一方、梶浦は、乱流境界層の理論的展開を試み、それぞれ長波(1964)⁷⁾ および浅海表面波(1968)⁸⁾についての理論を示した。これとほぼ同時に、Johns(1966, 1968)^{9), 10)} も梶浦とは異なる立場から同様の理論的解明を試みている。

以上、波動による乱流境界層に関する従来の研究について簡単に説明してきたが、こうした研究においてもっとも重要なことは、底面近くでの渦動粘性係数をどのように評価するかということであろう。著者はこの論文において、Johns¹⁰⁾ とほぼ同様の仮定によって渦動粘性係数を定め、底面が粗面の場合の乱流境界層内の流速分布や摩擦応力を算定し、二、三の興味ある結果を得たので、これについて報告する。

2. 波動による粗面乱流境界層の理論

(1) 基礎方程式

底面が水平な場合を取り扱う。流体が非圧縮性で、かつ、その運動が非定常な場合の2次元境界層方程式は、 x 軸を水平な底面にとり、 z 軸を底面より鉛直上向きにとると、第1近似として、一般に次式で与えられる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\infty}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 τ は底面の摩擦応力、 u および u_∞ はそれぞれ境界層内およびその外縁における x 方向の速度成分である。つぎに、摩擦応力 τ は渦動粘性係数 N_z を用いて、

$$\tau/\rho = N_z \partial u / \partial z \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

と表わされる。Jonsson⁵⁾ が行なった U字管による振動流の場合、 u_∞ を t のみの関数と考えるならば式(1)は近似式ではなく現象を正確に表現している。また、Kalkanis³⁾ の振動板の実験に対しては式(1)右辺第1項を落とせばよい。しかし、浅海表面波の場合、式(1)は微小振幅の仮定が含まれていることになる。

つぎに境界条件は定常状態のみを考えれば、

$$\left. \begin{aligned} z=0 &\text{ で } u=0 \\ z \rightarrow \infty &\text{ で } u=u_\infty \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

と表わされる。

(2) 渦動粘性係数 N_z

流れが層流の場合、 N_z は流体の動粘性係数 ν と一致するが、境界層内の流れが乱流の場合、一般に、 N_z は z の関数であるといわれ、何らかの方法で、その関数形を定めなければ、上述した基礎式を解くことはできない。

梶浦⁸⁾は、表面波の場合、境界層を内層、中間層および外層と3層にわけるモデルを考え、内外層においては N_z は一定値をとり、中間層においては N_z は z に比例するとした。一方、Johns¹⁰⁾ もやはり3層モデルを考えているが、内層、中間層では N_z は z^2 に比例して増減すると考え、外層では一定値をとるとしている。また Kalkanis³⁾ も振動板の実験によって、 N_z が z^2 に比例することを示した。

* 正会員 京都大学助教授 防災研究所

以上の結果を参照して、底面が粗面の場合の渦動粘性係数 N_z をつぎのように仮定する。すなわち、

$$N_z/\nu = \begin{cases} \xi^2 & \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ 1 + \frac{(\xi_1 - 1)(\xi_2 - \xi)}{\xi_2 - \xi_1} & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ 1 & \xi_2 \leq \xi \end{cases} \quad \dots \dots \dots (4a)$$

$$\dots \dots \dots (4b)$$

$$\dots \dots \dots (4c)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 1 + \{\alpha(z_0 + z)/\delta\} \\ \xi_0 = 1 + \{\alpha z_0 / \delta\} \\ \xi_1 = 1 + \{\alpha(z_0 + z_1) / \delta\} \\ \xi_2 = 1 + \{\alpha(z_0 + z_2) / \delta\} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

であって、 α は定数、 z_0 は粗度長さであり、波の周期を T とすると、 $\delta = \sqrt{\nu T / 2\pi}$ である。なお、高さ z_1 、 z_2 ($z_2 > z_1$) および定数 α は境界層内の幾何学的尺度と乱れの強さによって決定しうる parameter である。さらに、底面が滑面の場合には粗度長さのかわりに層流底層を考慮しなければならないことはいうまでもない。

(3) 一般解

式(1)における境界層外縁の水粒子速度 u_∞ を

$$u_\infty = u_0 e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (6)$$

の実数部とし、 $U = u_\infty - u$ および式(5)を用いて変数変換を行なえば、式(2)を用いて式(1)は結局

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(N_z \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \dots \dots \dots (7)$$

と変形される。さらに、

$$U(\xi, t) = v(\xi) e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (8)$$

とおけば、式(7)は

$$\frac{d}{d\xi} \left(N_z' \frac{dv}{d\xi} \right) + \lambda^2 v = 0 \dots \dots \dots (9)$$

となる。ここに、 $N_z' = N_z / \nu$ であり、

$$\lambda^2 = (1+i)^2 / 2\alpha^2 \dots \dots \dots (10)$$

である。

さて、式(9)に対する境界条件は式(3)から、

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \xi_0 \text{ で } v = u_0 \\ \xi \rightarrow \infty \text{ で } v = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

で与えられる。さらに、式(4)から明らかなように、渦動粘性係数は各層で異なる式で表現されるから、 $\xi = \xi_1$ および $\xi = \xi_2$ において v および $dv/d\xi$ は連続であるという条件を付加しなければならない。

a) $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ における式(9)の一般解

式(9)の N_z' に式(4a)の関係を代入すると、

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dv}{d\xi} \right) + \lambda^2 v = 0 \dots \dots \dots (12)$$

となる。この常微分方程式の解は、

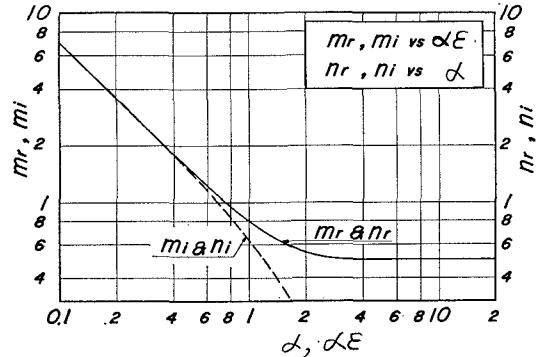
$$v = A_1 \xi_1^{n_1} + A_2 \xi_2^{n_2} \dots \dots \dots (13)$$

によって与えられる。ここに、 A_1 および A_2 は積分定数であり、

$$n_1 = -n - (1/2), \quad n_2 = n - (1/2) \dots \dots \dots (14)$$

ここに、

図-1 n_r および n_i と α の関係ならびに m_r および m_i と $\alpha\varepsilon$ の関係



$$n = \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{\alpha^2} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{いま, } n \text{ の実数部を } n_r, \text{ 虚数部を } n_i \text{ で表わし,} \\ n = n_r - i n_i \dots \dots \dots (16)$$

とすれば、

$$\left. \begin{array}{l} n_r = \left(\frac{\sqrt{1+(2/\alpha)^4}+1}{8} \right)^{1/2} \\ n_i = \left(\frac{\sqrt{1+(2/\alpha)^4}-1}{8} \right)^{1/2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

となり、結局、 n_1 、 n_2 は α のみの関数であることがわかる。図-1 は n_r および n_i と α の関係を示すものであって、 α の値が大きくなると n_r および n_i の値はそれぞれ 0.5 および 0 に近づくこと、また α の値が小さくなると n_r と n_i の値はほぼ一致することがわかる。

b) $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ における式(9)の一般解

式(4b)において、その右辺を

$$\eta = 1 + \{(\xi_1 - 1)(\xi_2 - \xi) / (\xi_2 - \xi_1)\} \dots \dots \dots (18)$$

とおくと、

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi_1 - 1}{\xi_2 - \xi_1} = -\varepsilon \dots \dots \dots (19)$$

となるから、これらの式を式(9)に代入すると、結局

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{dv}{d\eta} \right) + \frac{i}{(\alpha\varepsilon)^2} v = 0 \dots \dots \dots (20)$$

となる。この式は式(12)と同型であるからその一般解は

$$v = B_1 \eta^{m_1} + B_2 \eta^{m_2} \dots \dots \dots (21)$$

となる。ここに、 B_1 および B_2 は積分定数であり、また

$$m_1 = -m - 1/2, \quad m_2 = m - 1/2 \dots \dots \dots (22)$$

ここに、

$$m = \left[\frac{1}{4} - \frac{i}{(\alpha\varepsilon)^2} \right]^{1/2} \dots \dots \dots (23)$$

であって、 m の実数部および虚数部をそれぞれ m_r および m_i とすると

$$m = m_r - i m_i \dots \dots \dots (24)$$

として、

$$\left. \begin{aligned} m_r &= \left(\frac{\sqrt{1+(2/\alpha\varepsilon)^4}+1}{8} \right)^{1/2} \\ m_i &= \left(\frac{\sqrt{1+(2/\alpha\varepsilon)^4}-1}{8} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

で表わされる。 m_r および m_i と $\alpha\varepsilon$ との関係は n_r および n_i と α に対する関係とともに図-1 に示されている。

c) $\xi \geq \xi_2$ における式 (9) の一般解

式 (4c) の関係を式 (9) に代入すると、結局、層流境界層に関する基礎方程式とまったく一致することになる。したがって、境界条件式 (11) の第2式を考慮すると、その解は、

$$v = C_1 \exp [-(1-i)\xi/\sqrt{2}\alpha] \quad (26)$$

となる。ここに C_1 は積分定数である。

(4) 積分定数の決定

式 (13) の A_1 および A_2 、式 (21) の B_1 および B_2 と式 (26) の C_1 を算定するために、境界条件式 (11) の第1式と $\xi=\xi_1$ および $\xi=\xi_2$ で v および $dv/d\xi$ が連続であるという条件を適用すると、結局、

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= A_1 \xi_0^{n_1} + A_2 \xi_0^{n_2} \\ A_1 \xi_1^{n_1} + A_2 \xi_1^{n_2} &= B_1 \xi_1^{m_1} + B_2 \xi_1^{m_2} \\ n_1 A_1 \xi_1^{n_1} + n_2 A_2 \xi_1^{n_2} &= -\varepsilon (m_1 B_1 \xi_1^{m_1} + m_2 B_2 \xi_1^{m_2}) \\ B_1 + B_2 &= C_1 e^{-(1-i)\xi_2/\sqrt{2}\alpha} \\ -\varepsilon (m_1 B_1 + m_2 B_2) &= -(1-i)/\sqrt{2}\alpha C_1 e^{-(1-i)\xi_2/\sqrt{2}\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

を得る。以上の各式から、積分定数を決定すると、つぎのようになる。すなわち、

$$A_1 = \frac{u_0}{\xi_0^{n_1}} (1+A), \quad A_2 = -\frac{u_0}{\xi_0^{n_2}} A \quad (28)$$

ここに、

$$A = M/E \quad (29)$$

で与えられ、

$$M = (\xi_1/\xi_0)^{-2n} \{ (n_1 + \varepsilon m_2) - (n_1 + \varepsilon m_1) D \xi_1^{-2m} \} \quad (30)$$

$$E = (n_2 + \varepsilon m_2) - (n_2 + \varepsilon m_1) D \xi_1^{-2m} - M \quad (31)$$

である。さらに、

$$D = \{(1-i) - \sqrt{2}\alpha\varepsilon m_2\} / \{(1-i) - \sqrt{2}\alpha\varepsilon m_1\} \quad (32)$$

で与えられる。式 (32) から明らかなように、 D は $\alpha\varepsilon$ のみの関数であって、その実数部および虚数部をそれぞれ D_r および D_i とすると、これらはそれぞれ $\alpha\varepsilon$ に対して図-2(a) および (b) のようになる。なお $D=D_r - iD_i$ とする。

つぎに、

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\left(\frac{u_0}{\xi_1^{m_1}}\right) D \xi_1^{-2m} (\xi_1/\xi_0)^{-1/2} B \\ B_2 &= \left(\frac{u_0}{\xi_1^{m_2}}\right) \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^{-1/2} B \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに、

$$B = (\xi_1/\xi_0)^{-n} \cdot (2n/E) \quad (34)$$

図-2 (a) D_r と $\alpha\varepsilon$ の関係

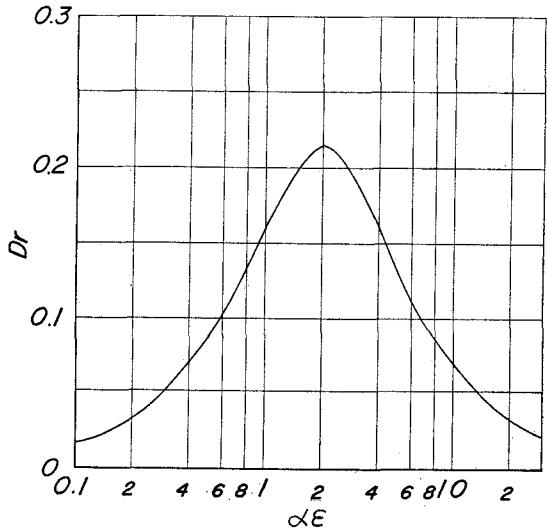
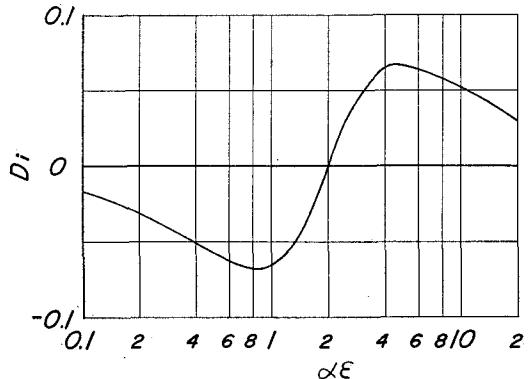


図-2 (b) D_i と $\alpha\varepsilon$ の関係



で与えられる。

さらに、

$$C_1 = u_0 B (1-D) \xi_1^{-m_2} (\xi_1/\xi_0)^{-1/2} e^{(1-i)\xi_2/\sqrt{2}\alpha} \quad (36)$$

となる。

以上の結果において、 E 、 A および B はいずれも複素数である、それぞれの実数部および虚数部を A_r 、 A_i 、 $(A=A_r+iA_i)$ 、 B_r 、 B_i ($B=B_r+iB_i$) および E_r 、 E_i ($E=E_r+iE_i$) とすれば、それぞれの実数部および虚数部は、式 (29)、(34) および (31) から計算できることになる。

(5) 境界層内の流速分布

(3) の式 (13)、(21) および (26) に前節で求めた積分定数を代入し、式 (6) および (8) の関係を用いて、その実数部分のみを取り出せば各層における流速分布はつぎのようになる。すなわち、

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \text{ において、}$$

$$u/u_0 = \cos \omega t - (\xi/\xi_0)^{-1/2} [(\xi/\xi_0)^{-n_r} \{(1+A_r)^{n_r} \times \cos(\omega t - \theta_r) + A_i \sin(\omega t - \theta_i)\} - (\xi/\xi_0)^{n_r}]$$

$$\times \{A_r \cos(\omega t + \theta_i) + A_i \sin(\omega t + \theta_i)\}] \quad \dots \dots \dots \quad (36)$$

となる。ここに、

である。また、

となる。ここに、

で与えられる。

つぎに、 $\xi \geq \xi_2$ における流速分布は、

以上の結果から明らかなように、底面に近い内層の流速分布は Kalkanis(1957) が実験的に求めた結果と形式上類似していることがわかる。

(6) 底面の摩擦応力と摩擦速度

定常な管路の流れでは、ある区間の圧力降下を測定することによって、底面摩擦力を算定することができる。しかし、自由水面をもつ非定常な流れに対してはこうした算定法は期待できない。したがって、もっぱら shear meter によって直接これを測定する方法がとられているが、これも実験室的規模がせいぜいであって、現地でこれを測定することは实际上不可能に近い。したがって、実際に測定可能な波の特性と底面摩擦応力 τ_b との関連を明らかにする抵抗法則を確立しておくことが必要である。

波動によって底面に作用する摩擦力を検討する場合、流れの周期性の理由から定常流とは若干異なった定義を用いるほうが都合がよい。ここでは、榎浦¹⁰⁾の提唱にならって、

とする。ここに、 τ は高さ z における摩擦応力、 ρ は流体の密度、 u_0^* は底面における最大摩擦速度であり、 u^* は高さ z における摩擦速度である。つぎに、底面における摩擦応力および摩擦速度をそれぞれ τ_b および u_b^* とすると、式(42)にしたがって、

$$\tau_b/\rho = u_0^* u_b^* \dots \dots \dots \quad (43)$$

と定義される。さらに、 C_f を摩擦係数として

と定義し、

$$u_b^* = u_0^* e^{-i(\omega t - \psi)} \dots \dots \dots \quad (45)$$

とするならば、

$$C_f = (u_0^*/u_0)^2 e^{i\psi} \dots \dots \dots \quad (46)$$

と表わされることになる。

さて、摩擦応力を表わす式(2)に式(4a)の N_z および式(13)の関係を代入して、 $z=0$ とおき、その実数部をとると、乱流境界層における底面の摩擦速度は無次元形でつぎのように表わされる。すなわち、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_0 \delta}{\nu} \right)^2 \cos(\omega t - \psi) = - \left(\frac{u_0 \delta}{\nu} \right) \alpha \xi_0 \\ & \times \left[\left\{ \frac{1}{2} + n_r (1 - 2 A_r) + 2 n_i A_i \right\} \cos \omega t \right. \\ & \left. + \{n_i (1 - 2 A_r) - 2 n_r A_i\} \sin \omega t \right] \quad \dots \dots (47) \end{aligned}$$

である。

3. 数値計算例

流速分布を示す式 (36), (37) よび (41) に適當な數値を代入して、境界層内の速度分布を計算した一例を示す。計算にあたって、 α , z_0 , z_1 および z_2 にいかなる値を選ぶべきかについては、それぞれのもつ物理的意味を十分に考える必要があるが、ここでは、一応 $\alpha=1$, $z_0/\delta=1$, $z_1/\delta=8.8$ および $z_2/\delta=20$ として計算を行なった。図-3 はその計算の結果を示すものである。図から明らかなように、境界層の厚さ δ_B はほぼ 25δ であることがわかる。また式 (4) から $z=z_1$ において渦動粘性係数が最大になる。Hinze¹¹⁾ によると、平板上における定

図-3 流速分布の計算例

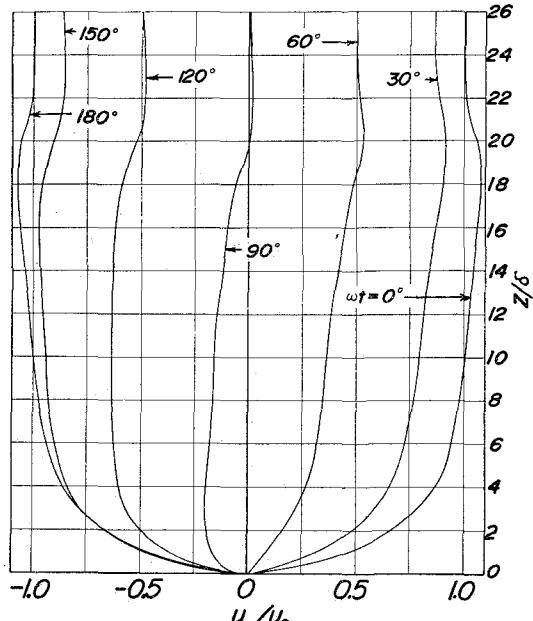
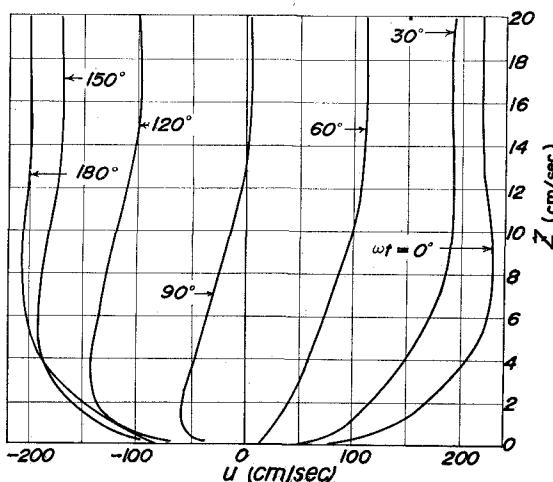


図-4 流速分布の測定例 (Jonsson による)



常乱流境界層では、 $z=0.3 \delta_B$ で渦動粘性係数が最大になることを、 Klebanoff¹¹⁾ および Townsend¹¹⁾ の実験結果を用いて示している。ここで行なった計算も $z_1/\delta = 8.8$ であり、ほぼ妥当な値と考えられる。 z_2 の値についてはまだその物理的意義が明らかでないが、 Jonsson⁵⁾ , Kalkanis^{3), 4)} や堀川・渡辺ら⁶⁾ の実験結果と比較して、その意味を明らかにしたい。さらに α の値については、やはり Hinze¹¹⁾ が平板上の乱流境界層における渦動粘性係数 N_z/ν が $u^* z/\nu$ の関数であること、壁面近くの内層では N_z/ν が $(u^* z/\nu)^2$ に比例することを示している。したがって、式(4)の関係から考えると、 α は $u^* \delta/\nu$ の関数になると思われるが、この点についても、従来の実験結果を参照して今後くわしく検討したい。なお図-4 は Jonsson⁵⁾ が測定した流速分布の一例であるが、この場合、 $\delta = 0.12 \text{ cm}$ となり、境界層の厚さ δ_B は 17 cm であるので、 $\delta_B = 140 \delta$ となって、上述した計算例よりかなり大きい値になるにもかかわらず、その分布形は比較的よく類似しているようである。また Jonsson によると最大摩擦応力は $\omega_t = 150^\circ$ で現われることを示しているが、図-3 の場合にも底面付近の流速分布曲線の勾配から $\omega_t = 150^\circ$ において摩擦応力が最大になるとということを示している。

4. 結 語

渦動粘性係数にかなり大胆な仮定を設け、半経験的手法によって、波動による乱流境界層内の流速分布や摩擦応力を求めてきた。その結果には、物理的意味の不明な部分がかなり含まれているが、Kalkanis が実験的に求めたと同様の流速分布が理論的に得られることがわかった。今後、実験による測定値と比較検討して物理的意味の不明な部分を明らかにしていきたい。

最後に、本研究に際し、終始ご指導を賜った京都大学岩垣雄一教授ならびに、土屋義人教授に深謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Longuet-Higgins, M.S. : The Mechanics of the Boundary-Layer Near the Bottom in a Progressive Wave, Proc. 6th Conf. on Coastal Eng., 1958, pp. 184-193.
- 2) Iwagaki, Y. and Y. Tsuchiya : Laminar Damping of Oscillatory Waves due to Bottom Friction, Proc. 10th Conf. on Coastal Eng., 1966, pp. 149-174.
- 3) Kalkanis, G. : Turbulent Flow Near an Oscillating Wall, B.E.B. Tech. Memo. No. 97, 1957, pp. 1-36.
- 4) Kalkanis, G. : Transportation of Bed Material due to Wave Action, U.S. Army Corps. of Eng., Tech. Memo. No. 2, 1964, pp. 1-38.
- 5) Jonsson, I.G. : Measurements in the Turbulent Wave Boundary Layer, 10th Congress of IAHR, 1963, pp. 85-92.
- 6) 堀川清司・渡辺晃：表面波による振動流境界層に関する実験的研究、第15回海岸工学講演会講演集、昭43.12, pp. 16-23.
- 7) Kajiura, K. : On the Bottom Friction in an Oscillatory Current, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 42, 1964, pp. 147-174.
- 8) Kajiura, K. : A Model of the Bottom Boundary Layer in Water Waves, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 46, 1968.
- 9) Johns, B. : On the Vertical Structure of Tidal Flow in River Estuaries, Geophys. J.R. astr. Soc., Vol. 12, 1966, pp. 103-110.
- 10) Johns, B. : The Damping of Gravity Waves in Shallow Water by Energy Dissipation in a Turbulent Boundary Layer, Tellus, Vol. 20, No. 2, 1968, pp. 330-337.
- 11) Hinze, J.O. : Turbulence, McGraw-Hill, 1959, pp. 492-493.