

せつ動解による有限振幅重複波理論の適用限界について

土 屋 義 人*・山 口 正 隆**

1. 緒 言

重複波に関しては、これまで Sainflou, Gourret, Miche, Biesel, Carry, Penny および Price, Taylor, Suquet および Wallet, 岸, d'Hier ら多くの研究者によって研究が進められてきた。そして、1960 年 Tadjbaksh および Keller¹⁾ がせつ動法を用いて、2つの付加的条件を加えた有限振幅浅水重複波の第3次近似解を求めた。この手法は、未知関数がある微小量のべき級数に展開し、各次数ごとに逐次近似解を求めていくものである。この手法を導入すると、高次級数解になればなるほど計算は複雑になるが、いちおう系統的に逐次計算が行なえるので、しばしば非線型方程式を近似的に解く方法として用いられている。さらに最近では、重複波理論に関して同様な手法が適用され、合田の有限振幅浅水重複波の第4次近似解²⁾、表面張力の影響を考慮した Concus の第3次近似解、波動運動を3次元的に扱った Keller の第2次近似解、シリンダーの中の軸対称の有限振幅重複波の問題を解いた Mack の第3次近似解など多くの研究がなされてきた。しかしながら、この手法による解はつねに近似解にとどまっており、当然物理現象に対する適合性と適用範囲が問題にされる。そこで、本論文では有限振幅重複波理論の適合性と適用限界を検討するため、まず自由表面での2つの非線型条件、すなわち自由水面における水粒子の運動を規定する kinematic な条件と Bernoulli の定理から水表面の圧力が一定であることを示す dynamic な条件を非線型解がどの程度満足するかを調べて、これらせつ動解の理論的適合性を解の近似度との関連において検討し、また、進行波の場合も、比較のために Skjelbreia らによる Stokes 波理論³⁾の境界条件の適合の程度を調べた。さらに、重複波の波圧特性を中心とした実験を $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 20$ の範囲で行ない、波圧の時間的変化とともに、壁面での水位の時間的変化を記録させ、壁面での水位の時間的変化、平均水面上の波の峰高および波圧などを有限振幅重複波理論による理論曲線と比較検討した。なお、本文においては主として重複波の場合は第4次近似解まで、進行波の場合は第5次近似解まで用いた。

2. 非線型境界条件の適合性

(1) 水面での条件

有限振幅波理論の解が前述したように、近似解にとどまるかぎり、非線型条件である自由表面での kinematic な条件と dynamic な条件は厳密に満足されず、つねに残差項を残している。そこで、これらの近似解に種々の条件を与えて、上述の境界条件の誤差を計算し、それらと比較して、近似度を高めることにより、境界条件の適合性が改善されているかどうかを調べよう。さて、自由表面での kinematic な条件と dynamic な条件は、次式で与えられる。すなわち、 $y=\eta$ において、

$$v = \partial\eta/\partial t + u(\partial\eta/\partial x) \dots\dots\dots (1)$$

$$\partial\phi/\partial t + (1/2)(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \dots\dots\dots (2)$$

また、進行波の場合には、波速 c で波とともに移動する座標系 X であらわすと、運動は定常化され、次式で与えられる。すなわち、 $y=\eta$ において、

$$\partial\eta/\partial X = v/(u-c) \dots\dots\dots (3)$$

$$(1/2)\{(u-c)^2 + v^2\} + g\eta = K \dots\dots\dots (4)$$

つぎに、kinematic な条件の誤差を ϵ_1 、また dynamic な条件の誤差を ϵ_2 とし、進行波の場合にはそれぞれ ϵ_1' および ϵ_2' とすると、それらは無次元表示でつぎのように与えられる。重複波に対して、

$$\epsilon_1 = [\sqrt{k/g}\{v - \partial\eta/\partial t - u(\partial\eta/\partial x)\}/\sqrt{gh}]_{y=\eta} \dots\dots\dots (5)$$

$$\epsilon_2 = \{[k\eta + (k/g)(\partial\phi/\partial t) + (k/2g)(u^2 + v^2)]/kh\}_{y=\eta} \dots\dots\dots (6)$$

であり、また進行波に対して、

$$\epsilon_1' = [(v/c)(c/\sqrt{gh}) + (c/\sqrt{gh})(\partial\eta/\partial X) \times \{1 - (u/c)\}]_{y=\eta} \dots\dots\dots (7)$$

$$\epsilon_2' = [(1/2)(c/\sqrt{gh})^2\{(u/c)^2 + (v/c)^2 - 2(u/c)\} + (k\eta + kK)/kh]_{y=\eta} \dots\dots\dots (8)$$

である。ここに、 x : 静水面上にとった水平方向の座標、 y : 静水面より鉛直上方にとった座標、 u および v : x および y 方向の水粒子速度、 t : 時間、 ϕ : 速度ポテンシャル、 η : 水面の高さ、 g : 重力の加速度、 K : Bernoulli の定数、 h : 平均水深、 $k=2\pi/L$ 、および L : 波長、である。そして、もし理論解が水面における kinematic な条件および dynamic な条件を完全に満足しているならば、当然 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ (進行波のときは $\epsilon_1' = \epsilon_2' = 0$)

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

となるはずである。したがって、有限振幅重複波の理論解および Stokes 波の理論解を式 (5) および (6) あるいは式 (7) および (8) に代入して、その誤差の大きさを比較することにより、もっとも適合性のよい理論解がどれであるかを知ることができる。さて、水面条件の誤差をつぎのような量で評価することにする。すなわち、Dean⁴⁾ にならって、kinematic および dynamic な条件についてそれぞれ、重複波に対しては、

$$(E_1)_R = (\varepsilon_1)_{\max} - (\varepsilon_1)_{\min} \dots\dots\dots (9)$$

$$(E_2)_R = (\varepsilon_2)_{\max} - (\varepsilon_2)_{\min} \dots\dots\dots (10)$$

とし、また進行波に対しては、

$$(E_1')_R = (\varepsilon_1')_{\max} - (\varepsilon_1')_{\min} \dots\dots\dots (11)$$

$$(E_2')_R = (\varepsilon_2')_{\max} - (\varepsilon_2')_{\min} \dots\dots\dots (12)$$

とする。また、式 (9), (10), (11) および式 (12) とは別の criterion として、root-mean-square に対する Simpson's rule numerical approximation を採用する⁵⁾。すなわち、上記の式 (9), (10), (11) および式 (12) に対応して、重複波に対して、

$$(E_3)_R = \sqrt{\bar{\varepsilon}_1^2} \\ = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_1)^2_{n-1} + 4(\varepsilon_1)^2_n + (\varepsilon_1)^2_{n+1}\} / \{3(M-1)\} \right]} \dots\dots\dots (13)$$

$$(E_4)_R = \sqrt{\bar{\varepsilon}_2^2} \\ = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_2)^2_{n-1} + 4(\varepsilon_2)^2_n + (\varepsilon_2)^2_{n+1}\} / \{3(M-1)\} \right]} \dots\dots\dots (14)$$

とし、また進行波に対して、

$$(E_3')_R = \sqrt{\bar{\varepsilon}_1'^2} \\ = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_1')^2_{n-1} + 4(\varepsilon_1')^2_n + (\varepsilon_1')^2_{n+1}\} / \{3(M-1)\} \right]} \dots\dots\dots (15)$$

$$(E_4')_R = \sqrt{\bar{\varepsilon}_2'^2} \\ = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_2')^2_{n-1} + 4(\varepsilon_2')^2_n + (\varepsilon_2')^2_{n+1}\} / \{3(M-1)\} \right]} \dots\dots\dots (16)$$

とする。ここに、 $(\varepsilon_i)_{\max}$ および $(\varepsilon_i)_{\min}$: それぞれ各点で計算した誤差のうち、最大のものと最小のもの、 M : 計算点の個数、であり、また $\bar{}$ は平均を示す。

(2) 有限振幅重複波理論の適合性

有限振幅重複波理論の諸理論解を用い、各理論解ごとに $T\sqrt{g/h}$ (T : 周期) と h/H (H : 入射波高で重複波高の $1/2$) を与えて、式 (5) および (6) であらわされる ε_1 および ε_2 を計算し、 t/T による変化として示したものの一例が図-1 である。図中、点線は第1次近似解、2点鎖線は第2次近似解、実線は第3次近似解を示し、また1点鎖線は第4次近似解を示す。図-1 によれば、 $T\sqrt{g/h}$ の値がある程度大きくなると、波形勾配が大きい場合には第2次近似

解の2つの境界条件の適合性はいずれも第1次近似解より悪くなり、その限界があらわれているが、第4次近似解は2つの境界条件に対して、より低次の近似解より適合性がよく、せつ動法の有効性が認められる。つぎに、壁面における各近似解の $(E_1)_R$ および $(E_2)_R$ を h/H の値を一定とし、 $T\sqrt{g/h}$ との関係で示したものの一例が図-2 である。図中の黒丸は各近似解による重複波の砕波点である。この図から、第4次近似解は、力学的条件の場合にはおおよそ $6 < T\sqrt{g/h} < 11$ 、運動学的条件の場合は $6 < T\sqrt{g/h} < 13$ の範囲でもっとも境界条件の適合性がよいが、そのほかの範囲では第1次および第3次近似解よりも悪くなっており、せつ動解のもつ限界があらわれていること、第1次近似解は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きいところでは、他の近似解よりも境界条件の適合性

図-1 重複波の場合の ε_1 および ε_2 の t/T による変化

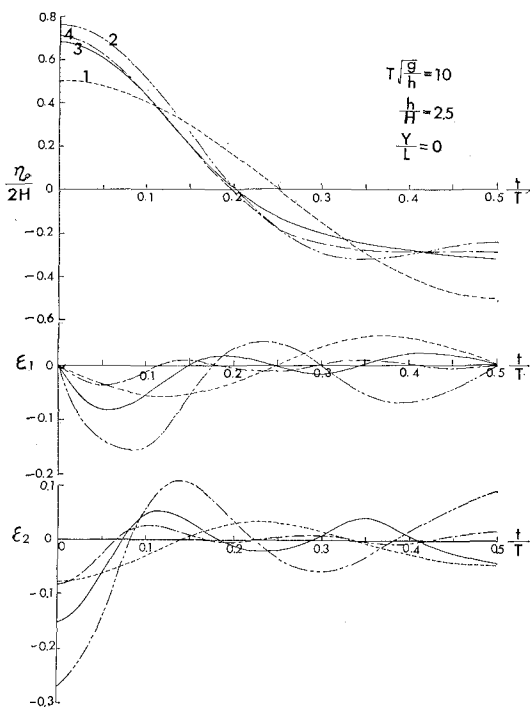
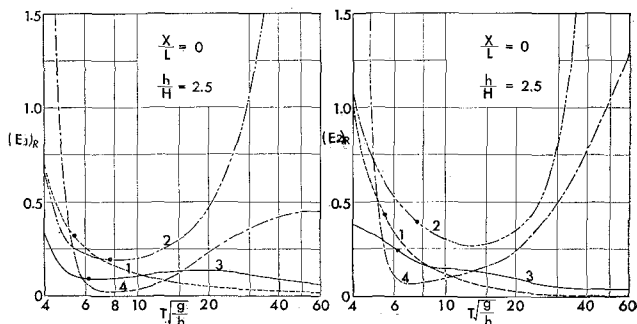


図-2 重複波の場合の $(E_1)_R$ および $(E_2)_R$ の $T\sqrt{g/h}$ による変化



がよいが、これは第1次近似解がもっともよく物理現象を説明するというよりは、むしろ $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると、有限振幅波理論の解の高次項が基本項より大きくなり、そのため境界条件に対する誤差が大きくなるといったせつ動解の欠陥を示すものと解すべきであること、さらに第2次近似解は一般に近似度が不足しているため、 h/H の値が小さくなると、境界条件の適合性が第1次近似解よりよい範囲がきわめて限られることなどがわかる。以上のような結果をより多方面から検討して、近似度をあげることによりそれぞれの境界条件の誤差が改善される各近似解の範囲（たとえば、第3次近似解の場合には第1次および第2次近似解よりも境界条件の誤差が改善される範囲）を各 criterion にしたがって示したのが図-3である。これによれば、各近似解の領域が境界条件の種類により、またその criterion の取り方により多少異なっているが、せつ動解はそれぞれその近似度によりその限界があらわれていることがわかる。以上の考察は壁面におけるものであるが、境界条件の適合性を考えるとき、波動運動の全周期にわたる適合性を検討する必要も考えられるが、式(13)および(14)と同様の criterion を用いて数値計算を行ない、その結果を図-3と同様に示したのが図-4である。図-3および4を比較すると、両者の範囲は一般に異なっているが、運動学的条件および力学的条件とも図-4の方がその範囲が広がっていることがわかる。このことはつまりせつ動法による有限振幅重複波理論は平均的には境界条件の適合性がよいことを示している。ここで注意すべきこと

図-3 重複波の場合におけるせつ動解によって境界条件の誤差が、改善される領域 (1)

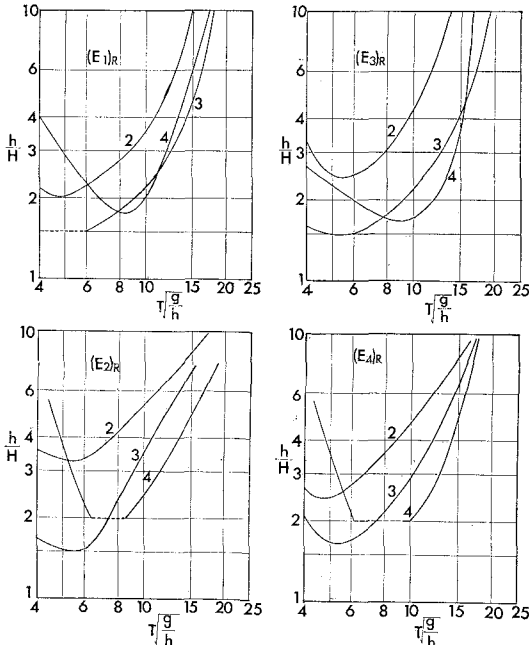


図-4 重複波の場合におけるせつ動解によって境界条件の誤差が改善される領域 (2)

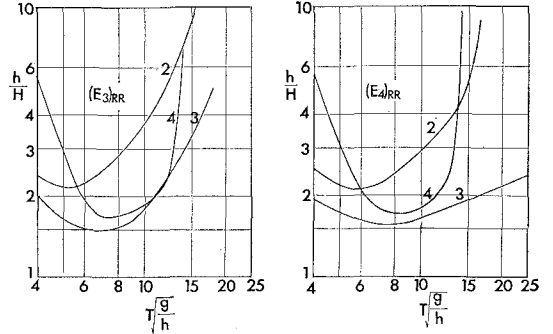
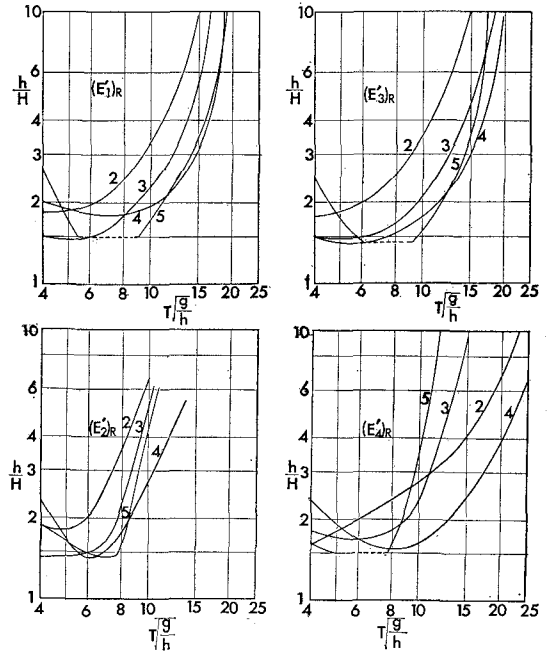


図-5 進行波の場合におけるせつ動解によって境界条件の誤差が改善される領域



は、これらの図はあくまでせつ動解の適用限界の可能性を示すものであって適用限界そのものを示すものでなく、適用限界の究明には実験結果との比較によらなければならないことである。また進行波の場合には、Skjelbreia および Hendrickson の Stokes 波に対する解を用いて、式(7) および (8) にしたがって数値計算を行ない、図-3 および 4 と同様に示したのが図-5 である。

3. 有限振幅重複波理論の適合性に関する実験

(1) 実験装置および実験方法

実験は宇治川水理実験所にある長さ 63 m、幅 50 cm、深さ 65 cm の波浪基礎実験水槽を用い、この水槽の一端にピストン型造波機を取り付け、この端部より約 39.5 m のところにケーソンを設置して、壁面での反射により重複波を形成させ、壁前面の水位および波圧の時間的

表—1 実験に用いた波の特性

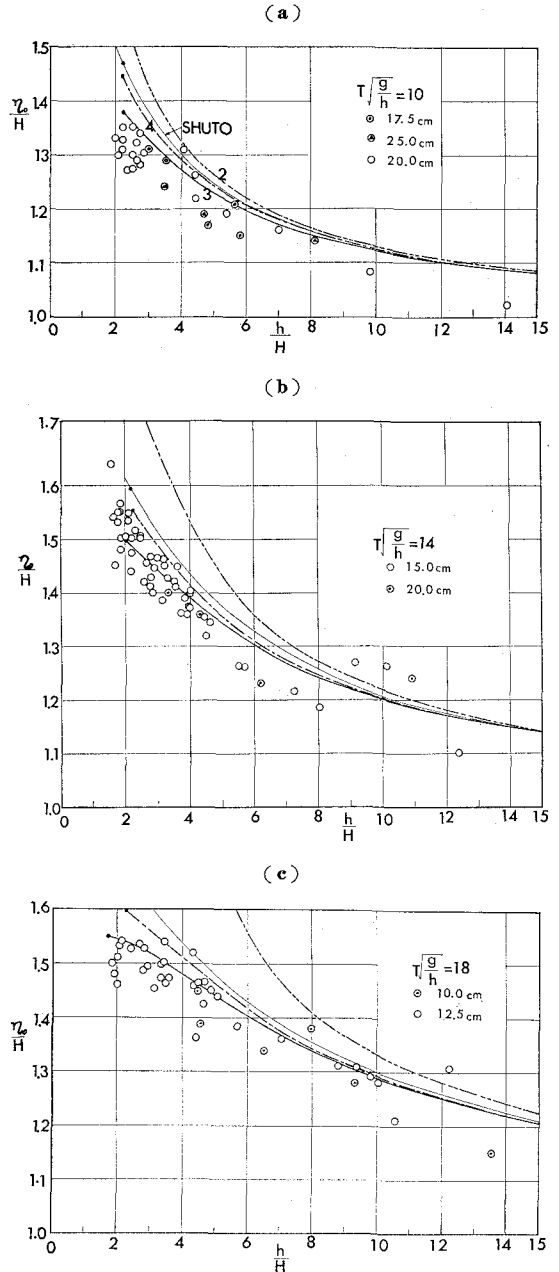
$T\sqrt{\frac{g}{h}}$	$h(\text{cm})$	$T(\text{sec})$	$H(\text{cm})$
6	25.0	0.958	10.70~2.05
	20.0	0.857	6.72~3.18
8	20.0	1.143	10.51~1.45
	25.0	1.278	7.11~2.97
	17.5	1.069	5.80~4.30
10	20.0	1.427	10.00~1.42
	25.0	1.597	8.36~3.05
	17.5	1.336	4.97~3.00
12	17.5	1.603	9.50~1.01
	20.0	1.714	5.93~2.98
	15.0	1.485	4.34~1.52
14	15.0	1.732	9.21~1.23
	20.0	2.000	6.08~1.84
16	15.0	1.979	9.20~1.01
	12.5	1.807	2.61~2.44
18	12.5	2.033	6.78~1.03
	10.0	1.818	2.31~0.73
20	10.0	2.020	5.04~1.15

変化を測定した。実験は $T\sqrt{g/h}$ の値が一定になるように周期および水深を決め、波高を変化させたが、一様水深の実験では h/H の値が約 2.8 以下の波が起こらず、十分波高の大きい波が得られなかったため、水槽底面に 1/60 (3 m の区間) および 1/400 (20 m の区間) の勾配を付け、ケーソン前面で一様水深部より 10 cm 高くなるようにした。その結果、砕波近くの十分波高の大きい波が得られた。そして、記録の処理にあたっては造波機始動後の数波と造波板の反射の入った波を除いた 4~5 波をとり、その平均値を用いた。表—1 に実験波の特性を一括して示す。

(2) 実験結果とその考察

図—6 は静水面上の波の峰高 η_0 の実験値と有限振幅重複波理論による理論曲線とを比較したものの一例である。図中の 1 点鎖線は第 4 次近似解、太い実線は第 3 次近似解、2 点鎖線は第 2 次近似解および細い実線は首藤による有限振幅の定常長波の第 2 次近似解⁹⁾であり、図中の黒丸は Penny および Price の criterion より求めた重複波の砕波点を示す。また、第 1 次近似解は波形が上下対称であるので、つねに $\eta_0/H=1$ になり、図には示していない。これらの図から、図—6 (a) のように比較的周期の短い波の場合にも、また、図—6 (b) および (c) のように周期の長い波の場合にも理論曲線と実験値は比較的良好に一致している。ただ、第 2 次近似解は h/H の値が小さくなると、解の近似度の不足のため、実験値よりもかなり大きくなり、その傾向は周期の長い波ほど著しい。図—7 は波の峰での鉛直同時波圧分布について実験値と理論曲線との比較を行なったものの一例である。重複波の波圧はよく知られているように、波形勾配が大きくなると、双峰型の波圧波形があらわれるので、

図—6 静水面上の波の峰高に対する実験結果と理論曲線との比較



一般に最大鉛直同時波圧分布は、波の峰での鉛直同時波圧分布とは一致しない。鉛直同時波圧分布を論ずる場合には、最大鉛直同時波圧分布を取り扱うほうが望ましいが、最大鉛直同時波圧分布の発生する時間はこの双峰性のため、波の特性に応じて変わり、これを議論することは非常に労力を要し、またその結果の精度も十分保証しがたいので、ここでは波の峰での鉛直同時波圧分布を議論することにした。さて、これらの有限振幅波理論はくりかえし述べたように、いわゆる近似理論であるから、

図-7 波の峰における鉛直同時波圧分布の実験値と理論曲線との比較

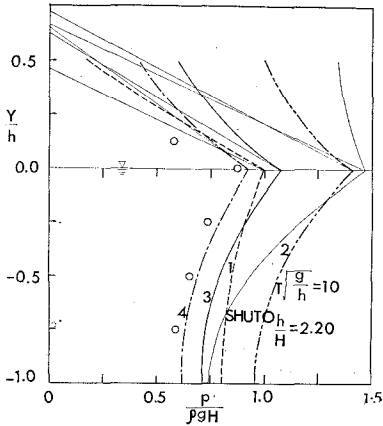
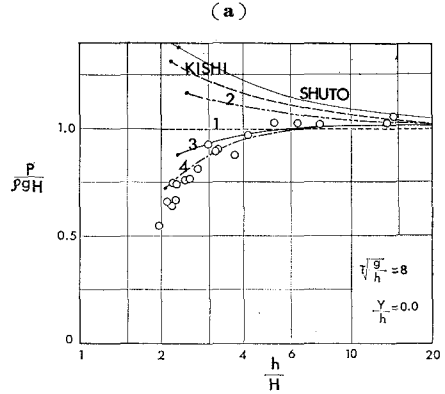
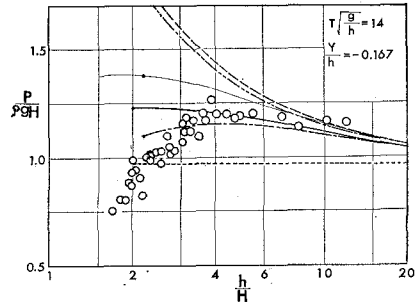


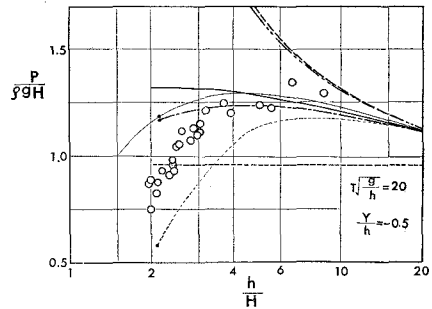
図-8 波の峰における無次元波圧強度の実験値と理論曲線との比較



(a)



(b)



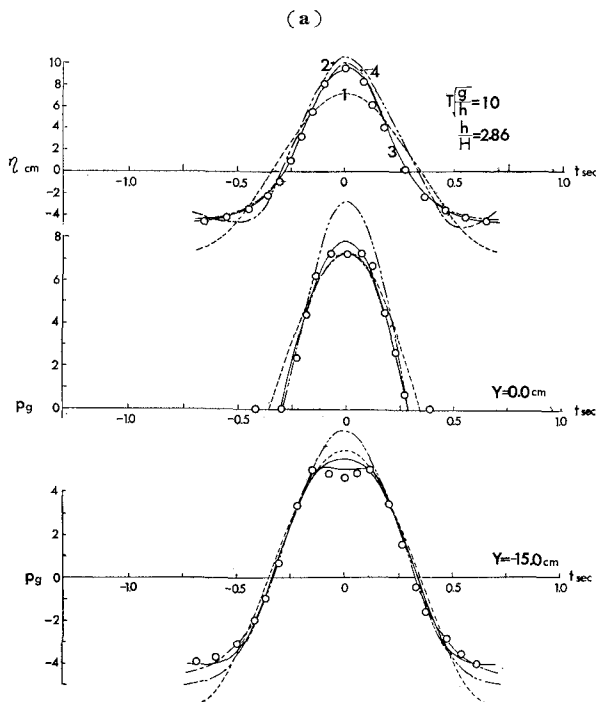
(c)

水面での圧力条件が厳密に満足されておらず、圧力式においても残差を生ずる。この改良の方法の1つが合田の補正法であるが、ここでは高次級数解の現象に対する妥当性を検討する意味からこのような補正は行なわず、静水面上では静水圧分布するものと仮定して各理論解の水位最大の点と静水面での圧力 $p/\rho gH$ (ρ : 流体の密度) の値を細線で結んだ。この図によれば、水深波長比がそれほど小さくないときには、かなり波高の大きい場合でも解の高次化の効果があらわれて、第4次近似解は実験値との適合性がきわめてよいが、近似度の低い第2次近似解はかなり大きい値を与えている。また、定常長波の第2次近似解は、この場合かなり過大な値を与えることがわかる。図-8 は各測定点における波の峰での無次元波圧強度 $p/\rho gH$ について実験値と理論曲線とを比較したものの一例である。ここに、図中の点線は第1次近似解、破線は岸の第2次近似解である。さて 図-8(a) のように比較的波長が短い場合には高次級数解と実験値との適合性がきわめてよく、第4次近似解は非常に波形勾配の大きい場合まで実験値と一致する。しかし、より低次の近似解たとえば、第3次近似解の場合には $h/H=3.0$ 付近から実験値が離れるようになり、その適用限界を見出すことができる。また、図-8(b) のように比較的水深波長比が小さくなってくると、第4次近似解も h/H の値が小さい場合には実験値と離れるようになる。さらに、水深波長比のきわめて小さくなる 図-8(c) では、実験値と理論曲線が離れる h/H の値が定常長波第2次近似解および第1次近似解を除いて大きくなる。第1次近似解は有限振幅の効果が入っていないため、 h/H の値が小さくなるかあるいは $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると、その適合性は悪い。第2次近似解は近似度不足のため、たとえば $T\sqrt{g/h}$ の値が小さいときでも、 h/H の値が小さくなると、かなり過大な値を与える。定常長波第2次近似解は、水深波長比がきわめて小さくなると、 h/H

の値が大きい場合には実験値とよく一致するが、 h/H の値が小さくなると、急速にその理論曲線から離れるようになるが、その傾向はよくあっている。そこで、合田の方法により残差を補正した定常長波の第2次近似解が細い点線であるが、この場合理論曲線は実験よりかなり小さくでている。これは定常長波の第2次近似解では表面圧力の残差が大きく、補正がききすぎたためと思われる。つぎに水位および波圧の時間的変化について実験値と理論曲線との比較を行なったものの一例が図-9 である。図-9(a) の場合には解の近似度をあげるほど実験値は高次解の理論曲線に近づいているが、図-9(b) のように波長が長くなると、第3次および第4次近似解とも波の谷の部分にひずみがあらわれ、波形が実験値と一致しなくなる。しかし、定常長波第2次近似解は波形につい

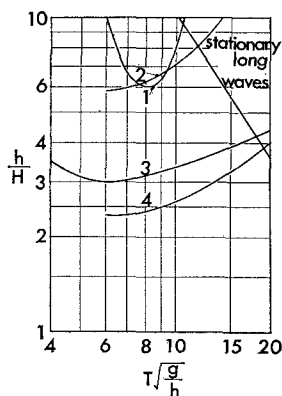
ては実験値とよく一致している。また、波圧波形については近似度の不足のため実験値との適合性が悪く、級数解の適用限界があらわれている。このことは定常長波第

図-9 水位および波圧の時間的変化の実験値と理論曲線との比較



2次近似解についても同様である。図-10は波圧について有限振幅重複波の理論曲線と実験値とを比較した結果を総合して、それぞれの理論解が実験値と適合しなくなるときの $T\sqrt{g/h}$ と h/H のおおよその範囲をここに示した以外の著者らの実験結果⁹⁾を加えて示したものである。この図によれば、第2次近似解の適用限界は $T\sqrt{g/h}$ の値が小さく、 h/H の値の大きな範囲に限られており実用上注意を要すること、第3次および第4次近似解はその適用範囲はかなり広いが、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなれば適合性の劣る範囲が存在すること、定常長波の第2次近似解の適用限界は $T\sqrt{g/h}$

図-10 波圧に関する有限振幅重複波理論の適用限界



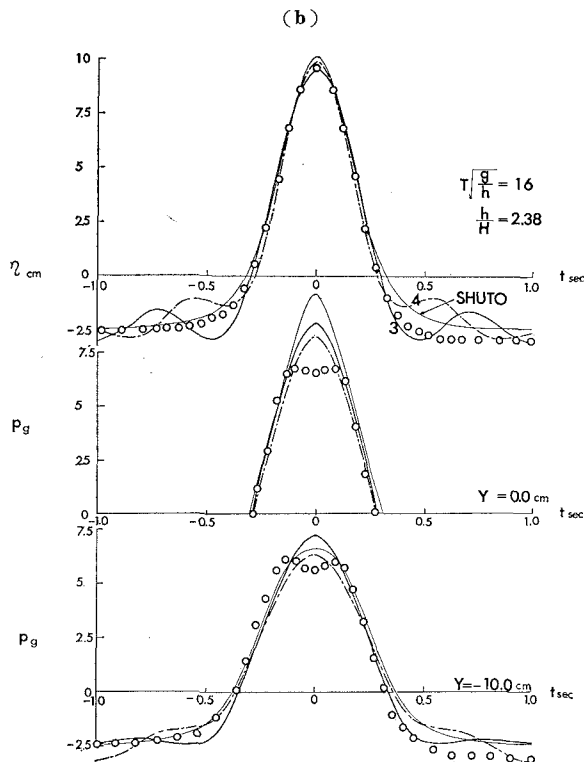
の値がかなり大きい領域に限られていることおよび現在の近似理論では現象を十分適確に説明しえない領域が存在することがわかる。ここで注意すべきことは、この適用限界は波圧に関する実験結果と理論曲線との比較から導かれたものであるという

ことである。ところで水位変化については、第1次近似解では非線型効果が入っていないので、現象を十分説明しえず、また定常長波第2次近似解は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合には、たとえ h/H の値が小さくても波圧式と異なって実験値との対応がきわめてよい。したがって、重複波の他の水理特性を入れた場合は当然、その適用限界の範囲も変わってくるものと考えられる。

4. 結 語

以上、著者らはせつ動解による有限振幅重複波理論の適合性と適用限界を検討するため、まずせつ動解が自由表面の2つの非線型境界条件すなわち運動学的条件と力学的条件をどの程度満足するかを波の各種の条件に対し数値計算を行なって検討し、つぎに重複波圧に関する実験を行なって有限振幅重複波理論に基づく理論曲線と実験結果とを比較検討したが、本研究により得られた結果を要約するとつぎのとおりである。

(1) $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合でも、 h/H の値が小さくなれば、せつ動解の近似度を高めても境界条件の適合性は改善されず、一般に $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるにつれて、その適合性を改善できなくなる h/H の値が大きくなり、このことから有限振幅波理



論には適用限界が存在することがわかった。そして、逐次近似を進めるにしたがって境界条件の適合性が改善される領域を各近似解ごとに示す図表を示した。

(2) 有限振幅重複波理論は高次解ほど、実験結果をよく説明するが、 h/H の値が小さい場合には、理論の近似度の不足のため、理論曲線よりも実験値がかなり小さくなるが、実験値と理論曲線が離れる限界の h/H の値は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるほど大きい。定常長波第2次近似解は進行波におけるクノイド波理論と同様に $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるにつれ、その適合性がよくなる。そして、実験値との比較検討を通じて各近似解の波圧に対する適用限界を示す図表を与えた。

なお、本研究の数値計算は京大の KDC-II を使用した。最後に、本研究の遂行にあたり、ご激励をいただいた工学部 岩垣雄一教授に謝意を表明するとともに、この研究は文部省試験研究費による研究成果の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Tadjbaksh, I. and Keller, J.B. : Standing Surface Waves of Finite Amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 8, 1960, pp. 442~451.
- 2) 合田良実・柿崎秀作 : 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 運輸省港湾技術研究所報告, Vol. 5, No. 10, 昭 41, pp. 1~50.
- 3) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J.A. : Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 1~337.
- 4) Dean, R.G. : Stream Function Wave Theory; Validity and Application, Santa Barbara Specialty Conference on Coastal Eng., 1965, pp. 269~299.
- 5) Dean, R.G. : Relative Validities of Water Wave Theories, Proc. of Conf. on Civil Eng. in the Oceans, 1967, pp. 1~30.
- 6) 首藤伸夫 : 有限振幅の定常長波, 第 15 回海岸工学講演会講演集, 昭 43, 12, pp. 212~219.
- 7) 岸 力 : 海岸堤防に関する研究 (2) —有限振幅の浅水重複波—, 建設省土木研究所報告, 90 号, 昭 30, pp. 1~28.
- 8) 土屋義人・山口正隆・野村直茂 : 有限振幅重複波理論による波圧の適用限界について, 昭和 43 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 昭 43.5, II-36.