有限振幅浅水波の高次近似理論について

佐　伯　　浩*・泉　　　　洌**

1. 緒　　論

水深波長比が比較的小さい，有限振幅波理論の波をクノイド波と呼ぶ。このクノイド波理論を最初に求めたのは，Korteweg と De Vries である。その後，Keller[1]，Keulegan, Brooke Benjamin, Wehausen と Laitone[2]，Masch と Wiegel[3]，Chappelear[4] により研究されてきた。Wiegel らは，Korteweg-DeVries の理論を計算して数表化し，このクノイド波理論を使うのに便利にしているが，これは第１次近似理論である。Wehausen と Laitone はクノイド波系の有限振幅波理論の誘導を詳しく行ない，それに基づいて，Laitone[5] はクノイド波の第２近似理論を求めた。この理論は水深を波谷から水底までとっているので，実際の計算には不便であるが，理論解を求めるにはその方が易いようである。この Laitone の第２近似理論に対しては，岩垣博士らにより数多く計算がなされている[6),7),8),9),10)]。これに対してストークス波系の波動理論においては，すでに Skjelbreia, Bretschneider らにより高次の理論が求められ，すでに第５次近似理論まで計算されていて，これについても，数多くの計算結果が示されている[11),12),13),14)]。クノイド波理論とストークス波理論の高次近似解の計算結果から判断すると，両理論には，かなりの差異があることがわかる。また実験結果[10),15)]をみると，両波の中間的な領域では，波速 ($c/\sqrt{gd}$) についてみると，実測値は，両理論の中間の値をとっている。また水深波長が小さく，当然クノイド波の領域と思われる部分においても，実測値は Laitone が求めた第１，第２近似理論と異なっている。以上のことから，われわれは，より高次のクノイド波理論解を求めてみる必要を感じたわけである。クノイド波の第３近似理論は Chappelear により求められている。この Chappelear の求めた理論は，Friedrichs の摂動法により Wehausen と Laitone が求めた解法と同じであるが，われわれが計算したところ，第１，第２近似理論を求めるところまでは，ほとんど間違いなかったが，第３次の項を求める式から，かなりの間違いがみつかった。そこでわれわれは最初から計算を行ない，第５次近似解を求める式まで計算し，解は第３次近似まで求めた。第４，第５近似解および，第３～第５近似解の数値計算は紙面の都合で次報に発表する予定である。

* 正会員　北海道大学工学部
** 正会員　北海道大学工学部

2. 高次のクノイド波の計算

運動は，定常で非回転で粘性および表面張力はないものとし，二次元運動とする。座標の原点は波頂の直下の底部にとる。波の表面形を式 (1) とする。

$$y=\eta(x) \quad\cdots\cdots(1)$$

非回転の波とするので

$$u_y-v_x=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

連続の式より

$$u_x+v_y=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

底部では鉛直方向の流速 v は零であるから，

$$v(x,0)=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

波の表面でもベルヌーイの式は満足されねばならないから

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2)|_{y=\eta(x)}+g\cdot\eta(x)=c \quad\cdots\cdots(5)$$

波面の流速度成分の比は，その点の水面勾配と平行であるべきであるから

$$v[x,\eta]/u[x,\eta]=d\eta/dx \quad\cdots\cdots(6)$$

u, v と η は周期的であるから，λ を波長とすると

$$u(x,y)=u(x+\lambda,y) \quad\cdots\cdots(7)$$

$$v(x,y)=v(x+\lambda,y) \quad\cdots\cdots(8)$$

$$\eta(x)=\eta(x+\lambda) \quad\cdots\cdots(9)$$

ここで Friedrichs の摂動法により，d を深さとし，l を y 方向の代表的長さとして上記の式を無次元化するため次式のごとくおく。

$$\sqrt{gd}\ \bar{u}(\bar{x},\bar{y})=u(x,y) \quad\cdots\cdots(10)$$

$$\sqrt{gd}\ (l/d)\bar{v}(\bar{x},\bar{y})=v(x,y) \quad\cdots\cdots(11)$$

$$d\cdot\bar{\eta}(x)=\eta(x) \quad\cdots\cdots(12)$$

$$l\bar{x}=x \qquad d\bar{y}=y$$

(l/d) は大きいものとし，つぎのごとくする。

$$\sigma=(d^2/l^2) \quad\cdots\cdots(13)$$

式 (10)～(13) を上記の式 (2)～(9) に代入すると

$$u_y-v_x=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\sigma u_x+v_y=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

水底では鉛直流速は零であるから

$$v(x,0)=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

式 (5) より

$$\frac{1}{2}(\sigma u^2+v^2)|_{y=\eta(x)}+\sigma\eta(x)=c \cdots\cdots(17)$$

式 (6) より

$$v[x,\eta(x)]=\sigma u[x,\eta(x)]\cdot[d\eta(x)/dx] \cdots(18)$$

式 (7),(8) と (9) は次式のごとくなる。

$$u(x,y)=u(x+\lambda,y) \cdots\cdots(19)$$

$$v(x,y)=v(x+\lambda,y) \cdots\cdots(20)$$

$$\eta(x)=\eta(x+\lambda) \cdots\cdots(21)$$

ここで，u,v と η を σ で級数展開できるものと仮定する。

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)\sigma^n \cdots\cdots(22)$$

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x,y)\sigma^n \cdots\cdots(23)$$

$$\eta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n(x)\sigma^n \cdots\cdots(24)$$

式 (17) の c もつぎのように級数に仮定される

$$c=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sigma^n \cdots\cdots(25)$$

式 (22),(23) を式 (14),(15) に代入して σ で整理すると

$$v_0 y=0 \cdots\cdots(26)$$

$$u_{ny}-v_{nx}=0 \cdots\cdots(27)$$

$$u_{nx}+v_{(n+1)y}=0 \cdots\cdots(28)$$

となる。ここで σ に関して，1次の次数の項を計算すると，u,v はつぎのような一般形で表わすことができる。

$$v_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i-1)!}y^{2i-1}\cdot\frac{d^{2i-1}}{dx^{2i-1}}f_{n-i}(x) \cdots\cdots(29\text{-}1)$$

$$u_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(2i)!}y^{2i}\cdot\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}f_{n-i}(x) \cdots(29\text{-}2)$$

この式 (24),(25),(28),(29) を式 (17),(18) に入れて，近似解を求めるわけである。ここでは5次近似解まで求めるために，式 (17),(18) に代入し，σ の次数により整理したものを記すと

$$\begin{aligned}\sigma u^2|_{y=\eta(x)}&=f_0{}^2\sigma+2f_0\left(f_1-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2f_0{}^{\mathrm{II}}\right)\sigma^2+\left\{2f_0\left(f_2-\eta_0\eta_1f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2f_1{}^{\mathrm{II}}\right)+\left(f_1-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_0{}^{\mathrm{II}}\right)^2\right\}\sigma^3\\&+\left\{2f_0\left(f_3-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_2{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1f_1{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4f_1{}^{\mathrm{IV}}\right)+2\left(f_1-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2f_0{}^{\mathrm{II}}\right)\left(f_2-\eta_0\eta_1f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_1{}^{\mathrm{II}}\right)\right\}\sigma^4\\&+\left\{2f_0\left(f_4-\eta_0\eta_2f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1f_2{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\eta_1{}^2f_1{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_3{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_1f_1{}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4f_2{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{6!}\eta_0{}^6f_1{}^{\mathrm{VI}}\right)\right.\\&\left.+2\left(f_1-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_0{}^{\mathrm{II}}\right)\left(f_3-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2f_2{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1f_1{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4f_1{}^{\mathrm{IV}}\right)+\left(f_2-\eta_0\eta_1f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\eta_0{}^2f_1{}^{\mathrm{II}}\right)^2\right\}\sigma^5+\cdots\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(30)$$

$$\begin{aligned}v^2|_{y=\eta(x)}&=(-\eta_0f_0{}^{\mathrm{I}})^2\sigma^2+2(-\eta_0f_0{}^{\mathrm{I}})\left(-\eta_1f_0{}^{\mathrm{I}}-\eta_0f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}\right)\sigma^3\\&+\left\{2(-2\eta_0f_0{}^{\mathrm{I}})\left(-\eta_1f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_0f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_1{}^{\mathrm{III}}\right)+\left(-\eta_1f_0{}^{\mathrm{I}}-\eta_0f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}\right)\right.\\&\left.\times\left(-\eta_1f_0{}^{\mathrm{I}}-\eta_0f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}\right)\right\}\sigma^4+\left\{2(\eta_0f_0{}^{\mathrm{I}})\left(-\eta_2f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_2f_0{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_1{}^2f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_1f_2{}^{\mathrm{I}}\right.\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_1{}^{\mathrm{III}}-\eta_0f_3{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_2{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{5!}\eta_0{}^5f_1{}^{\mathrm{V}}\right)+2\left(-\eta_1f_0{}^{\mathrm{I}}-\eta_0f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}\right)\\&\left.\times\left(-\eta_1f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_0f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_1{}^{\mathrm{III}}\right)\right\}\sigma^5 \cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v[x,\eta(x)]&=(-\eta_0f_0{}^{\mathrm{I}})\sigma+\left(-\eta_1f_0{}^{\mathrm{I}}-\eta_0f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}\right)\sigma^2+\left(-\eta_1f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_0f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_1{}^{\mathrm{III}}\right)\sigma^3\\&+\left(-\eta_2f_1{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_2f_0{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_1{}^2f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_1f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_1{}^{\mathrm{III}}-\eta_0f_3{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_2{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{5!}\eta_0{}^5f_1{}^{\mathrm{V}}\right)\sigma^4\\&+\left(\eta_0\eta_1\eta_2f_0{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{3!}\eta_1{}^3f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_2f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_2f_1{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_1{}^2f_1{}^{\mathrm{III}}-\eta_1f_3{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_2{}^{\mathrm{III}}\right.\\&\left.-\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1f_1{}^{\mathrm{V}}-\eta_0f_4{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_3{}^{\mathrm{III}}-f_1{}^{\mathrm{I}}\eta_3-\frac{1}{5!}\eta_0{}^5f_2{}^{\mathrm{V}}+\frac{1}{7!}\eta_0{}^7f_1{}^{\mathrm{VII}}\right)\sigma^5\\&+\left(\frac{1}{2}\eta_0\eta_2{}^2f_0{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_1{}^2\eta_2f_0{}^{\mathrm{III}}-\eta_3f_2{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_3f_1{}^{\mathrm{III}}+\eta_0\eta_1\eta_2f_1{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{3!}\eta_1{}^3f_1{}^{\mathrm{III}}-\eta_2f_3{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_2f_2{}^{\mathrm{III}}\right.\\&+\frac{1}{2}\eta_0\eta_1{}^2f_2{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_2f_1{}^{\mathrm{V}}-\frac{9}{5!}\eta_0{}^3\eta_1f_1{}^{\mathrm{V}}-\frac{1}{5!}\eta_0{}^3\eta_1{}^2f_1{}^{\mathrm{V}}-\eta_1f_4{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1f_3{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1f_2{}^{\mathrm{V}}\\&\left.+\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_1f_1{}^{\mathrm{VII}}-f_1{}^{\mathrm{I}}\eta_4-\eta_0f_5{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3f_4{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{5!}\eta_0{}^5f_3{}^{\mathrm{V}}+\frac{1}{7!}\eta_0{}^7f_2{}^{\mathrm{VII}}-\frac{1}{9!}\eta_0{}^9f_1{}^{\mathrm{IX}}\right)\sigma^6\\&+\left(\frac{1}{2}\eta_1\eta_2{}^2f_0{}^{\mathrm{III}}+\eta_0\eta_1\eta_3f_1{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_2{}^2f_1{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_1{}^2\eta_2f_1{}^{\mathrm{III}}-\eta_3f_3{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_3f_2{}^{\mathrm{III}}+\eta_0\eta_1\eta_2f_2{}^{\mathrm{III}}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3!}\eta_1{}^3 f_2{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{4!}\eta_0{}^5\eta_3 f_1{}^{\mathrm{V}}-\frac{1}{6}\eta_0{}^3\eta_1\eta_2 f_1{}^{\mathrm{V}}-\frac{1}{12}\eta_0{}^2\eta_1{}^3 f_1{}^{\mathrm{V}}-\eta_2 f_4{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_2 f_3{}^{\mathrm{III}}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_1{}^2 f_3{}^{\mathrm{III}}\\
&-\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_2 f_2{}^{\mathrm{V}}-\frac{1}{12}\eta_0{}^3\eta_1{}^2 f_2{}^{\mathrm{V}}+\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_2 f_1{}^{\mathrm{VII}}+\frac{21}{7!}\eta_0{}^5\eta_1{}^2 f_1{}^{\mathrm{VII}}-\eta_1 f_5{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_1 f_4{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1 f_3{}^{\mathrm{V}}\\
&+\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_1 f_2{}^{\mathrm{VII}}-\frac{1}{8!}\eta_0{}^8\eta_1 f_1{}^{\mathrm{IX}}-\eta_0 f_0{}^{\mathrm{I}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3 f_5{}^{\mathrm{III}}-\frac{1}{5!}\eta_0{}^5 f_4{}^{\mathrm{V}}+\frac{1}{7!}\eta_0{}^7 f_3{}^{\mathrm{VII}}-\frac{1}{9!}\eta_0{}^9 f_2{}^{\mathrm{IX}}\\
&+\frac{1}{11!}\eta_0{}^{11} f_1{}^{\mathrm{XI}}-f_1{}^{\mathrm{I}}\eta_5+\frac{1}{2}\eta_0{}^2\eta_4 f_1{}^{\mathrm{III}}-f_2{}^{\mathrm{I}}\eta_4\Bigg)\sigma^7 \cdots\cdots\cdots (32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma u\frac{du}{dx}=&\sigma\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_0+\sigma^2\left(f_1\eta_0{}^{\mathrm{I}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_0\right)+\sigma_3\Bigg(\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_2-\eta_0{}^{\mathrm{I}}\eta_0\eta_1 f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^{\mathrm{I}}\eta_0{}^2 f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1\\
&-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_0\Bigg)+\sigma^4\Bigg(\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_3-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_0{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}\\
&+\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2-\eta_0\eta_1{}^{\mathrm{I}}\eta_1 f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_0\Bigg)+\sigma^5\Bigg(\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_3-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}\\
&-\eta_0\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_2-\eta_0\eta_1\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_1\\
&-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_0\Bigg)+\sigma^6\Bigg(\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_4-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}\\
&-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_3{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_1{}^{\mathrm{I}}\eta_1{}^{\mathrm{VI}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_3-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}\\
&+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_3{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{VI}}-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_3-\eta_0\eta_1\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}\\
&-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}+\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_2-\eta_0\eta_1\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_1-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+\eta_5{}^{\mathrm{I}} f_0\Bigg)\\
&+\sigma^7\Bigg(\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_5-\eta_1\eta_2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4}\eta_0{}^2\eta_1{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}\\
&-\eta_0\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_3{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_1\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{IV}}+\frac{1}{5!}\eta_0{}^5\eta_1 f_1{}^{\mathrm{VI}}\eta_1{}^{\mathrm{I}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_4{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_3{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{VI}}\\
&+\frac{1}{8!}\eta_0{}^8\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{VIII}}-\eta_0\eta_3\eta_1{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_4-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{3!}\eta_0{}^3\eta_1\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}\\
&-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_3{}^{\mathrm{II}}+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{IV}}-\frac{1}{6!}\eta_0{}^6\eta_2{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{VI}}+\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_3-\frac{1}{2!}\eta_1{}^2\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\eta_0\eta_1\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_2{}^{\mathrm{II}}\\
&+\frac{1}{4!}\eta_0{}^4\eta_3{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{IV}}+\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_2-\eta_0\eta_1\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_4{}^{\mathrm{I}} f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_5{}^{\mathrm{I}} f_1-\frac{1}{2!}\eta_0{}^2\eta_5{}^{\mathrm{I}} f_0{}^{\mathrm{II}}+f_0\eta_6{}^{\mathrm{I}}\Bigg) \cdots\cdots\cdots (33)
\end{aligned}
$$

ここで，式 (30)；(31)，(32)，(33) をそれぞれ式 (17)，(18) に代入し，σ の次数によって整理する。σ の1次の次数から，つぎの2式が得られる。

$$(1/2)f_0{}^2+\eta_0=c_1 \cdots\cdots (34\text{-}1) \qquad -\eta_0 f_0{}^{\mathrm{I}}=f_0\eta_0{}^{\mathrm{I}} \cdots\cdots (34\text{-}2)$$

σ の2次の係数からつぎの2式が得られる。

$$f_1+\eta_1=c_2 \cdots\cdots (35\text{-}1) \qquad \eta_0 f_1{}^{\mathrm{I}}+\eta_1{}^{\mathrm{I}}=0 \cdots\cdots (35\text{-}2)$$

σ の3次の係数からつぎの2式が得られる。

$$f_2+\eta_2=c_3-(1/2)(f_1{}^2-f_1{}^{\mathrm{II}}) \cdots\cdots (36\text{-}1) \qquad f_2{}^{\mathrm{I}}+\eta_2{}^{\mathrm{I}}=-(c_2-f_1)f_1{}^{\mathrm{I}}+f_1{}^{\mathrm{I}}f_1+(1/6)f_1{}^{\mathrm{III}} \cdots (36\text{-}2)$$

σ の4次の係数からつぎの2式が得られる。

$$f_3+\eta_3=c_4+(1/2)f_1 f_1{}^{\mathrm{II}}-f_1 f_2-(1/4!)f_1{}^{\mathrm{IV}}+(1/2)f_2{}^{\mathrm{II}}+\eta_1 f_1{}^{\mathrm{II}}-(1/2)(f_1{}^{\mathrm{I}})^2 \cdots\cdots (37\text{-}1)$$

$$f_3{}^{\mathrm{I}}+\eta_3{}^{\mathrm{I}}=-f_1\eta_2{}^{\mathrm{I}}-\eta_2 f_1{}^{\mathrm{I}}-(1/2)f_1{}^{\mathrm{II}}\eta_1{}^{\mathrm{I}}+(1/2)f_1{}^{\mathrm{III}}\eta_1-f_2\eta_1{}^{\mathrm{I}}-f_2{}^{\mathrm{I}}\eta_1-(1/5!)f_1{}^{\mathrm{V}}+(1/3!)f_2{}^{\mathrm{III}} \cdots\cdots (37\text{-}2)$$

σ の5次の係数からつぎの2式が得られる。

$$
\begin{aligned}
f_4+\eta_4=&c_5+(1/2)f_1{}^{\mathrm{II}}(\eta_1{}^2+2\eta_2)-(1/6)f_1{}^{\mathrm{IV}}\eta_1+f_2{}^{\mathrm{II}}\eta_1+(1/6!)f_1{}^{\mathrm{VI}}-(1/4!)f_2{}^{\mathrm{IV}}+(1/2)f_3{}^{\mathrm{II}}\\
&+f_1\{f_1{}^{\mathrm{II}}\eta_1-(1/4!)f_1{}^{\mathrm{IV}}+(1/2)f_2{}^{\mathrm{II}}-f_3\}+(1/2)f_2(f_1{}^{\mathrm{II}}\eta_0{}^2-f_2)-(1/8)(f_1{}^{\mathrm{II}})^2\\
&+f_1{}^{\mathrm{I}}\cdot\{-f_1{}^{\mathrm{I}}\eta_1+(1/3!)f_1{}^{\mathrm{III}}-f_2{}^{\mathrm{I}}\} \cdots\cdots (38\text{-}1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4{}^{\mathrm{I}}+\eta_4{}^{\mathrm{I}}=&(f_1\eta_3)^{\mathrm{I}}+(1/2)(f_1{}^{\mathrm{II}}\eta_2)^{\mathrm{I}}-(f_1\eta_2)^{\mathrm{I}}+(1/2)(f_1{}^{\mathrm{II}}\eta_1{}^2)^{\mathrm{I}}-(1/4!)(f_1{}^{\mathrm{IV}}\eta_1)^{\mathrm{I}}\\
&+(1/2)(f_2{}^{\mathrm{II}}\eta_1)^{\mathrm{I}}-(f_3\eta_1)^{\mathrm{I}}+(1/7!)f_1{}^{\mathrm{VII}}-(1/5!)f_2{}^{\mathrm{V}}+(1/3!)f_3{}^{\mathrm{III}} \cdots\cdots (38\text{-}2)
\end{aligned}
$$

σ^6 の項からつぎの2式が得られる。

$$f_5+\eta_5=c_6+\eta_3 f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_1\eta_2 f_1{}^{\mathrm{II}}+\eta_2 f_2{}^{\mathrm{II}}+\eta_1 f_3{}^{\mathrm{II}}+(1/2)\eta_1{}^2 f_2{}^{\mathrm{II}}+(1/2)f_4{}^{\mathrm{II}}-(1/3!)\eta_2 f_1{}^{\mathrm{IV}}-(1/3!)\eta_1 f_2{}^{\mathrm{IV}}$$

$$-(1/4!)f_3^{\mathrm{IV}}-(1/4)\eta_1^2f_1^{\mathrm{IV}}+(1/5!)\eta_1f_1^{\mathrm{VI}}+(1/6!)f_2^{\mathrm{VI}}-(1/8!)f_1^{\mathrm{VIII}}-f_1f_4+\eta_2f_1f_1^{\mathrm{II}}+f_1\eta_1f_2^{\mathrm{II}}$$
$$+(1/2)\eta_1^2f_1f_1^{\mathrm{II}}+(1/2)f_1f_3^{\mathrm{II}}-(1/3!)f_1\eta_1f_1^{\mathrm{IV}}-(1/4!)f_1f_2^{\mathrm{IV}}+(1/6!)f_1f_1^{\mathrm{VI}}-f_2f_3+(1/2)f_2f_2^{\mathrm{II}}$$
$$+f_2\eta_1f_1^{\mathrm{II}}-(1/4!)f_2f_1^{\mathrm{IV}}+(1/2)f_1^{\mathrm{II}}f_3-(1/4)f_1^{\mathrm{II}}f_2^{\mathrm{II}}-(1/2)f_1^{\mathrm{II}}\eta_1f_1^{\mathrm{II}}+(1/48)f_1^{\mathrm{II}}f_1^{\mathrm{IV}}$$
$$-f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{I}}\eta_2-\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{I}}+(1/2)f_1^{\mathrm{I}}\eta_1f_1^{\mathrm{III}}-f_1^{\mathrm{I}}f_3^{\mathrm{I}}+(1/6)f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{III}}-(1/5!)f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{V}}-(1/2)\eta_1^2(f_1^{\mathrm{I}})^2$$
$$-(1/2)(f_2^{\mathrm{I}})^2-(1/72)(f_1^{\mathrm{III}})^2-\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{I}}+(1/6)f_2^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{III}}+(1/6)\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{III}}\cdots\cdots(39\text{-}1)$$

$$f_5^{\mathrm{I}}+\eta_5^{\mathrm{I}}=-(f_4\eta_1)^{\mathrm{I}}-(1/4!)(\eta_2f_1^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}-(f_2\eta_3)^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_3f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(f_1\eta_4)^{\mathrm{I}}-(\eta_2f_3)^{\mathrm{I}}+(1/6!)(\eta_1f_1^{\mathrm{VI}})^{\mathrm{I}}$$
$$-(1/4!)(\eta_1f_2^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_1f_3^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(1/3!)f_4^{\mathrm{III}}-(1/5!)f_3^{\mathrm{V}}+(1/7!)f_2^{\mathrm{VII}}-(1/9!)f_1^{\mathrm{IX}}$$
$$+(1/3!)(\eta_1^3f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_1^2f_2^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}+(\eta_1\eta_2f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(1/12)(\eta_1^2f_1^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_2f_2^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}\cdots\cdots(39\text{-}2)$$

σ^7 の項からつぎの２式が得られる。

$$f_6+\eta_6=-\eta_1\eta_2(f_1^{\mathrm{I}})^2-\eta_3(f_1^{\mathrm{I}})^2-(1/4)\eta_1^2(f_1^{\mathrm{II}})^2-(1/2)\eta_2(f_1^{\mathrm{II}})^2-(1/2)\eta_1(f_1^{\mathrm{II}})^2-(1/12)\eta_1(f_1^{\mathrm{III}})^2$$
$$-(1/1152)(f_1^{\mathrm{IV}})^2-\eta_2(f_2^{\mathrm{I}})^2-(1/8)(f_2^{\mathrm{II}})^2+\eta_1\eta_3f_1^{\mathrm{II}}+\eta_4f_1^{\mathrm{II}}+(1/2)\eta_2^2f_1^{\mathrm{II}}-(1/2)\eta_1\eta_2f_1^{\mathrm{IV}}-(1/3!)\eta_3f_1^{\mathrm{IV}}$$
$$-(1/3!)\eta_1^3f_1^{\mathrm{IV}}+(1/48)\eta_1^2f_1^{\mathrm{VI}}+(1/5!)\eta_2f_1^{\mathrm{VI}}-(1/7!)\eta_1f_1^{\mathrm{VIII}}+(1/10!)f_1^{\mathrm{X}}+\eta_1\eta_2f_2^{\mathrm{II}}-(1/3!)\eta_2f_2^{\mathrm{IV}}$$
$$-(1/4)\eta_1^2f_2^{\mathrm{IV}}+(1/5!)\eta_1f_2^{\mathrm{VI}}-(1/8!)f_2^{\mathrm{VIII}}+\eta_2f_3^{\mathrm{II}}+(1/2)\eta_1^2f_3^{\mathrm{II}}-(1/3!)\eta_1f_3^{\mathrm{IV}}+(1/6!)f_3^{\mathrm{VI}}+\eta_1f_4^{\mathrm{II}}$$
$$-(1/4!)f_4^{\mathrm{IV}}+(1/2)f_5^{\mathrm{II}}-f_1f_5-f_2f_4+(1/2)f_1f_4^{\mathrm{II}}+(1/6!)f_1f_2^{\mathrm{VI}}.-(1/8!)f_1f_1^{\mathrm{VIII}}-(1/4!)f_2f_2^{\mathrm{IV}}$$
$$+(1/6!)f_2f_1^{\mathrm{VI}}+(1/2)f_1^{\mathrm{II}}f_4-(1/4)f_1^{\mathrm{II}}f_3^{\mathrm{II}}+(1/48)f_1^{\mathrm{II}}f_2^{\mathrm{IV}}+(1/720)f_1^{\mathrm{II}}f_1^{\mathrm{VI}}-(1/2)f_3^2+(1/2)f_2^{\mathrm{II}}f_3$$
$$-(1/4!)f_1^{\mathrm{IV}}f_3+(1/48)f_1^{\mathrm{IV}}f_2^{\mathrm{II}}-f_1^{\mathrm{I}}f_4^{\mathrm{I}}+(1/3!)f_1^{\mathrm{I}}f_3^{\mathrm{III}}-(1/5!)f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{V}}+(1/7!)f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{VII}}-f_2^{\mathrm{I}}f_3^{\mathrm{I}}$$
$$+(1/3!)f_2^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{III}}-(1/5!)f_1^{\mathrm{V}}f_2^{\mathrm{I}}+(1/3!)f_1^{\mathrm{III}}f_3^{\mathrm{III}}+(1/720)f_1^{\mathrm{III}}f_1^{\mathrm{V}}-(1/4!)f_1f_3^{\mathrm{IV}}-(1/36)f_1^{\mathrm{III}}f_2^{\mathrm{III}}+\eta_1f_1f_3^{\mathrm{II}}$$
$$-(1/3!)\eta_1f_1f_2^{\mathrm{IV}}+(1/5!)\eta_1f_1^{\mathrm{VI}}f_1-\eta_1f_2f_2^{\mathrm{II}}-(1/3!)\eta_1f_2f_1^{\mathrm{IV}}-(1/2)\eta_1f_1^{\mathrm{II}}f_2^{\mathrm{II}}+(1/12)\eta_1f_1^{\mathrm{II}}f_1^{\mathrm{IV}}$$
$$+\eta_1f_1^{\mathrm{II}}f_3-(1/2)\eta_1f_1^{\mathrm{II}}f_2^{\mathrm{II}}+(1/4!)\eta_1f_1^{\mathrm{II}}f_1^{\mathrm{IV}}-2\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_3^{\mathrm{I}}+(2/3)\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{III}}-(1/20)\eta_1f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{V}}$$
$$+(2/3)\eta_1f_1^{\mathrm{III}}f_2^{\mathrm{I}}+(1/2)\eta_1^2f_1f_2^{\mathrm{II}}-(1/4)\eta_1^2f_1f_1^{\mathrm{IV}}+(1/2)\eta_1^2f_2f_1^{\mathrm{II}}-\eta_1^2f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{I}}+\eta_1^2f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{III}}$$
$$+\eta_1\eta_2f_1f_1^{\mathrm{II}}+\eta_2f_1f_2^{\mathrm{II}}-(1/3!)\eta_2f_1f_1^{\mathrm{IV}}+\eta_2f_2f_1^{\mathrm{II}}-2\eta_2f_1^{\mathrm{I}}f_2^{\mathrm{I}}+(2/3)\eta_2f_1^{\mathrm{I}}f_1^{\mathrm{III}}+\eta_3f_1f_1^{\mathrm{II}}\cdots\cdots(40\text{-}1)$$

$$f_6^{\mathrm{I}}+\eta_6^{\mathrm{I}}=-(\eta_1f_5)^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_1f_4^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(\eta_3f_3)^{\mathrm{I}}+(1/6)(\eta_1^3f_2^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(1/4!)(\eta_3f_1^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}-(\eta_2f_4)^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_2f_3^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}$$
$$+(1/2)(\eta_1^2f_3^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(1/4!)(\eta_2f_2^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}-(1/12)(\eta_1^2f_2^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}+(1/6!)(\eta_2f_1^{\mathrm{VI}})^{\mathrm{I}}+(21/7!)(\eta_1^2f_1^{\mathrm{VI}})^{\mathrm{I}}$$
$$-(14!)(\eta_1f_3^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}+(1/6!)(\eta_1f_2^{\mathrm{VI}})^{\mathrm{I}}-(1/8!)(\eta_1f_1^{\mathrm{VIII}})^{\mathrm{I}}+(1/3!)f_5^{\mathrm{III}}-(1/5!)f_4^{\mathrm{V}}+(1/7!)f_3^{\mathrm{VII}}$$
$$-(1/9!)f_2^{\mathrm{IX}}+(1/11!)f_1^{\mathrm{XI}}-(f_1\eta_5)^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_4f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(f_2\eta_4)^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_3f_2^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_2^2f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}$$
$$+(\eta_1\eta_3f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}+(1/2)(\eta_1^2\eta_2f_1^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}+(\eta_1\eta_2f_2^{\mathrm{II}})^{\mathrm{I}}-(1/3!)(\eta_1\eta_2f_1^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}-(1/12)(\eta_1^3f_1^{\mathrm{IV}})^{\mathrm{I}}\cdots\cdots(40\text{-}2)$$

以上で第5次近似理論の解まで求める，基本式を求めたわけである。まず式 (34-2) を積分すると，$\eta_0\cdot f_0=$ const. が得られ，これと式 (34-1) を合せて考えると η_0, f_0 はいずれも const. でなければならない。ここで $f_0=1$ とおいて以下の計算をすすめる。式 (35-1),(35-2) より式 (35-2) を積分することにより $\eta_0=1$ が求められる。つぎに式 (36-1) と式 (36-2) より，(36-1) から，(36-2) の積分したものを差し引くと次式が得られる。

$$f_1^{\mathrm{II}}=-3c_3'+(9/2)f_1^2-c_2f_1\cdots\cdots(41)$$

式 (41) の両辺に f_1^{I} を乗じて式 (42) の関係を用いて式 (43) が得られる。

$$\int 2f_1^{\mathrm{II}}\cdot f_1^{\mathrm{I}}\cdot dx=(f_1^{\mathrm{I}})^2+c_3''\cdots\cdots(42)$$

$$f_1^{\mathrm{I}}(x)=\pm[3(f_1^3-c_2f_1^2-2c_3'f_1+c_3'')]^{1/2}\cdots\cdots(43)$$

式 (43) を次式のようにおきかえる。

$$f_1^{\mathrm{I}}(x)=\pm\{3[(f_1-l_1)(f_2-l_2)(f_3-l_3)]\}^{1/2}\cdots\cdots(44)$$

式 (44) を解くと式 (45) が得られる[16),17)]。

$$f_1=l_2-(l_2-l_3)c_n^2(L_x)\cdots\cdots(45)$$

ここで $L=[3(l_1-l_3)]^{1/2}$ であらわされ，c_n は Jacobi の楕円関数であり，母数 k は式 (46) で表わされる。

$$k=[(l_2-l_3)/(l_1-l_3)]^{1/2}\cdots\cdots(46)$$

式 (45) を用いて η_1 も求められる。つぎに式 (37-1) と (37-2) から，式 (37-2) を積分して f_3 と η_3 を消去すると式 (47) を得る。

$$f_2^{\mathrm{II}}+3[c_2-3l_2+3(l_2-l_3)c_n^2L_x]f_2$$
$$=-[(32/5)L^6k^2(1+k^2)+16L^4k^2l_3-(3/2l_3^2$$
$$-3c_3l_3+3c_4'')]+k^2S_n^2L_x\{32L^6[(6/15)$$
$$\times(1+k^2)^2+7k^2]+32L^4l_3(1+k^2)+2L^2$$
$$\times(3l_3^2-2c_3)\}-k^4[32L^6(1+k^2)+40L^4l_3]$$
$$\times S_n^4L_x+(128/9)L^6k^6(S_n^6L_x)\cdots\cdots(47)$$

式 (47) の解を式 (48) のごとく仮定する。

$$f_2=\alpha_1S_n^2L_x+\alpha_2S_n^4L_x\cdots\cdots(48)$$

これを式 (47) に代入し，S_n のベキ乗により整理し，その S_n のベキ乗の係数が常に零になるように係数 α_1, α_2 を求めることにより f_2, c_3, c_4'', Y_2 を求めることができる。

ここで $c_4''=c_4'-c_4$ で，c_4' は式 (37-2) を積分した時の積分定数である。

$$f_2=k^2[(16/9)L^4(1+k^2)+(20/3)L^2l_3]S_n^2L_x$$
$$+(16/9)L^4k^4S_n^4L_x\cdots\cdots(49)$$

$$c_3=(8/5)L^4(2+3k^2+4k^4)+8L^2l_3(1+k^2)$$
$$+(3/2)l_3^2\cdots\cdots(50)$$

$$3c_4''=(448/45)L^6k^2(1+k^2)+(16/15)L^4l_3$$

$$\times(9+41\,k^2+9\,k^4)+24\,L^2l_3{}^2(1+k^2)+3l_3{}^3 \cdots\cdots(51)$$

$$\eta_2=(4/15)L^4(12+23\,k^2+12\,k^4)+8\,L^2l_3(1+k^2)+l_3{}^2-[(40/9)L^4k^2(1+k^2)+8\,L^2k^2l_3]S_n{}^2L_x+(4/3)L^4k^4S_n{}^4L_x \cdots\cdots(52)$$

つぎに式 (38-1) と (38-2) より式 (38-2) を積分することにより，f_4 と η_4 を消去し，f_3, c_5'', η_3 を求めることができる。f_3 の解は前と同様に，

$$f_3=\beta_1S_n{}^2L_x+\beta_2S_n{}^4L_x+\beta_3S_n{}^6L_x$$

と仮定することにより求めることができる。また c_5'' は $c_5''=c_5'-c_5$ で，c_5' は式 (38-2) の積分した時の積分定数である。

$$f_3=k^2S_n{}^2L_x\{L^6[(256/27)k^2+(448/135)(1+k^2)^2]+16\,L^4l_3(1+k^2)+(40/3)L^2l_3{}^2\}+k^4S_nL_x\times[(64/15)L^6(1+k^2)+16\,L^4l_3]+(128/45)L^6k^6S_n{}^6L_x \cdots\cdots(53)$$

$$c_5''=(64/135)L^6(1+k^2)[45(1+k^2)^2-38\,k^2]+L^4l_3[32(1+k^2)^2-16\,k^2]+20\,L^2l_3{}^2(1+k^2) \cdots\cdots(54)$$

$$\eta_3=(1/105)L^6(960+2676\,k^2+2676\,k^4+960\,k^6)+(1/3)L^4l_3(96+184\,k^2+96\,k^4)+20\cdot L^2l_3{}^2(1+k^2)+\{(1/135)L^6(-2008\,k^2-5116\,k^4-2008\,k^6)-(400/9)L^4l_3k^2(1+k^2)-20\,L^2l_3{}^2k^2\}S_n{}^2L_x+\{(1204/135)L^6k^4(1+k^2)+(40/3)L^4l_3k^4\}S_n{}^4L_x-(404/135)L^6k^6S_n{}^6L_x \cdots\cdots(55)$$

これで $f_0, f_1, f_2, f_3, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ が求められたので，波形 $\eta(x)$，波速 c，流速 u, v の第3近似解まで求められたのである。なお基本式は σ^7 の次数まで求めてあるので，以上のような方法を用いて第4，第5近似理論解が求められるがここでは省略する。いままでの式中に4つのパラメーター l_1, l_2, l_3, σ があるが，これらは必ず l と σ の積になっているのでつぎのようにおきかえる。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\,l_1=L_1\\ \sigma\,l_2=L_2\\ \sigma\,l_3=L_3\end{array}\right\} \cdots\cdots(56)$$

ここで，いままでに求めた $f_0\sim f_3$ と $\eta_0\sim\eta_3$ と $c_1\sim c_3$ を用い式 (56) により，$l_1\sim l_3$ を変換し，さらに，最初に無次元化したものを式 (10)～(12) によりもとの形に変換すると，第3近似理論における $u, v, \eta(x)$, c は次式により表わされる。

$$u/\sqrt{gd}=1+L_3+L_0k^2S^2+L_0{}^2k^2(1+k^2)S^2+5\,L_0L_3k^2S^2+L_0{}^2k^4S^4+\{(7/5)L_0{}^3k^2(1+k^2)^2+4\,L_0{}^3k^4+9\,L_0{}^2L_3k^2(1+k^2)+10\,L_0L_3{}^2k^2\}S^2+\{(9/5)L_0{}^3(1+k^2)k^4+9\,L_0{}^2L_3k^4\}S^4+(6/5)L_0{}^3k^6S^6+y^2\{-(3/4)L_0{}^2k^2+(2/3)L_0{}^2k^2(1+k^2)S^2-(9/4)L_0{}^2k^4S^4\}+y^2\{-(3/4)L_0{}^3k^2(1+k^2)-(15/4)L_0{}^2L_3k^2+(3/2)L_0{}^3k^2(1-k^2+k^4)S^2+(15/2)L_0{}^2L_3k^2(1+k^2)S^2+(15/4)L_0{}^3k^4(1+k^2)S^4-(45/4)L_0{}^2L_3k^4S^4-(15/2)L_0{}^3k^6S^6\}+y^4\{-(3/16)L_0{}^3k^2(1+k^2)+(3/16)L_0{}^3k^2(2+13\,k^2+2\,k^4)S^2-(45/16)L_0{}^3k^4(1+k^2)S^4+(45/16)L_0{}^3k^6S^6\} \cdots\cdots(57)$$

$$v/\sqrt{gd}=-(1/L_0)y\{(3/2)k^2L_0{}^2+(3/2)L_0{}^3(1+k^2)k^2+(15/2)L_0{}^2L_3k^2+3\,L_0{}^3k^4S^2+(3/4)k^2(1+k^2)L_0{}^3y^2-(9/4)k^4L_0{}^3S^2y^2\}\cdot S\cdot D\cdot C \cdots\cdots(58)$$

$$c/\sqrt{gd}=1+L_3+L_0\{1-(E/K)\}+5\,L_0L_3\{1-(E/K)\}+(5/3)L_0{}^2+(4/3)L_0{}^2k^2-(5/3)L_0{}^2(1+k^2)(E/K)+10\,L_0L_3{}^2\{1-(E/K)\}+L_0{}^3\{(1/25)(81+221\,k^2+58\,k^4)-(1/25)(81+244\,k^2+81\,k^4)(E/K)\}+15\,L_0{}^2L_3+12\,k^2L_0{}^2L_3-15(1+k^2)L_0L_3(E/K) \cdots\cdots(59)$$

$$\eta(x)/d=1+2\,L_3+L_3{}^2+L_0(1+k^2)-L_0k^2S^2+(3/20)L_0{}^2(12+23\,k^2+12\,k^4)+6\,L_0L_3(1+k^2)-(5/2)L_0{}^2k^2\times(1+k^2)S^2-6\,L_0k^2L_3S^2+(3/4)L_0{}^2k^4S^4+(27/560)L_0{}^3(80+223\,k^2+223\,k^4+80\,k^6)+(3/2)L_0{}^2L_3\times(12+23\,k^2+12\,k^4)+15\,L_0L_3{}^2(1+k^2)-(1/80)L_0{}^3(502\,k^2+1279\,k^4+502\,k^6)S^2-25\,L_0{}^2L_3k^2\times(1+k^2)S^2-15L_0L_3{}^2k^2S^2+(301/80)L_0{}^3k^4(1+k^2)S^4+(15/2)L_0{}^2L_3k^4S^4-(101/80)L_0{}^3k^6S^6 \cdots\cdots(60)$$

ここで，$L_0=L_1-L_3$, $S=S_n\kappa x$, $D=D_n\kappa x$, $c=c_n\kappa x$, $\kappa=1/2\,d(2\,L_0)^{1/2}$ である。

以上で，波形，流速，波速が求められたが，それらの式に含まれているパラメーター L_3, L_0 を求めるために，つぎの二式が必要である。波高 H はつぎの式 (61) で表わされる。λ は波長である。

$$H=\eta(0)-\eta(\lambda/2) \cdots\cdots(61)$$

式 (60) を式 (61) に代入することにより，つぎの式 (62) を得る。

$$H/d=k^2L_0[1+(1/4)L_0(10+7\,k^2)+6\,L_3+(1/40)L_0{}^2(251+489\,k^2+151\,k^4)+(1/2)L_0L_3(50+35\,k^2)+15\,L_0{}^2] \cdots\cdots(62)$$

つぎに $\eta(x)$ の平均値は水深 d に等しくなるべきであるから，その条件からつぎの式 (63) を得る。

$$2\,L_3+L_0\{k^2+(E/K)\}+L_0{}^2[-(1/5)+(6/5)k^2+(9/5)k^4+2(1+k^2)(E/K)]+6\,L_0L_3\times\{k^2+(E/K)\}+L_3{}^2+L_0{}^2L_3\{-2(1-6\,k^2-9\,k^4)+20(1+k^2)(E/K)+15\,L_0L_3{}^2\times\{k^2+(E/K)\}+L_0{}^3\{(1/175)(-102-302\,k^2+944\,k^4+675\,k^6)+(1/25)(111+289\,k^2+111\,k^4)(E/K)\}=0 \cdots\cdots(63)$$

ここで，K, E はヤコビの第1種，第2種完全だ円積分である。よって (H/d) とヤコビの完全だ円積分の母数 k を与えれば，式 (62)，(63) を解くことにより，L_0, L_3 が求まり，それを式 (57)，(58)，(59)，(60) に代入することにより，第3近似クノイド波理論の波形，波速，流速

を計算することができる。

参考文献

1) Keller, J.B. : The solitary wave and periodic waves in shallow water, Comm. Pure and Appl. Math., 10, 241-271, 1957.
2) Wehausen, J.V., and E.V. Laitone : Surface waves, in Encyclopedia of Physics, 9, pp. 446-778, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1960.
3) Mash, D.F. and Wiegel, R.L. : Cnoidal waves Table of Functions Council on Wave Research, The Engineering Foundation, Univ. of Calif., 1961.
4) J.E. Chappelear : Shallow-Water Waves, Journal of Geophysical Research Vol. 67, No. 12.
5) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnaidal and Solitary Waves, Jour of Fluid Mechanics Vol. 9, 1961.
6) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第1報），京大防災研究所年報7号，1964.
7) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第2報），京大防災研究所年報8号，1965.
8) 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する研究(第3報)，京大防災研究所年報9号，1966.
9) 岩垣雄一・細見昌彦：クノイド波に関する二，三の実験，第13回海岸工学講演会講演集，1966.
10) 佐伯　浩・泉　洌・新井泰澄：クノイド波の二，三の特性と適用限界について，土木学会北海道支部研究発表論文集，1968.
11) 岸　力・石田昌寿・佐伯　浩：有限振幅波の性質について，土木学会北海道支部，技術資料21号，1965.
12) 岸　力・佐伯　浩：クノイド波に関する研究，第11回海岸工学講演会講演集，1964.
13) 佐伯　浩・新井泰澄・花安繁郎：有限振幅波の波項高に関する研究，第23回年次学術講演会，1968.
14) 佐伯　浩・泉　洌・新井泰澄・花安繁郎：ストークス波の適用限界について，土木学会北海道支部研究発表論文集，1968.
15) 佐伯　浩・泉　洌：ストークス波の適用限界について，第24回年次学術講演会，1969.
16) Whittaker, E.T., and G.N. Watson : A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge Uniuersity Press, 1952.
17) 友近　晋：楕円函数論，共立出版