有限振幅の定常長波

首藤伸夫*

1. 序

重複波をあつかった従来の理論の多くは，表面波としての見方から解の精度を高めていくものであった。しかし，水深の浅い所では，表面波としての近似方法では精度を高めるのに項数を多く必要とするという事情があった。進行波をとりあつかう際には，浅い所での波をとりあつかうのに，長波としての見方から解をもとめようとする立場があり，正弦長波，クイノド波または弧立波といった波の存在がしられている。これと同様のとりあつかいを重複波に対して行なって解をえたのが本論文である。弧立波が鉛直壁によって反射された時の解は Benney がもとめているが，ここでは周期的な波の反射重複をとりあつかう。これは結局，クノイド波の干渉の問題となる。クノイド波を系統的に解いていくためには，Laitone の方法にならえばよいが，彼の方法によると波速の決定が複雑になる可能性があるので，この点若干手法をかえることとした。

2. 基本方程式

運動は二次元で，非回転，流体は非圧縮，非粘性であるとする。このとき，

連続の式

$$u_x+v_y=0 \quad \cdots\cdots(2.1)$$

運動方程式

$$u_t+uu_x+vu_y=-\frac{1}{\rho}p_x \quad \cdots\cdots(2.2)$$

$$v_t+uv_x+vv_y=-g-\frac{1}{\rho}p_y \quad \cdots\cdots(2.3)$$

非回転の条件

$$u_y=v_x \quad \cdots\cdots(2.4)$$

を，下記の条件のもとにとく。

底面条件：$y=-h$ で

$$v=0 \quad \cdots\cdots(2.5)$$

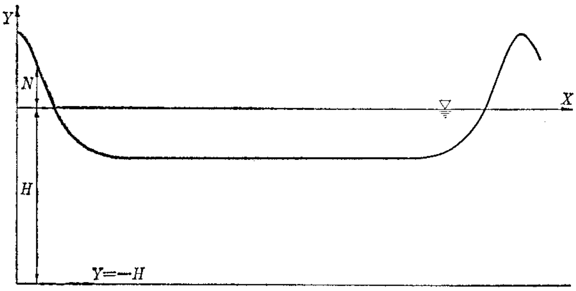
鉛直壁での条件：$x=0$ で

$$u=0 \quad \cdots\cdots(2.6)$$

表面圧力条件：$y=\eta$ で

$$p=0 \quad \cdots\cdots(2.7)$$

図—1



波形連続の条件：$y=\eta$ で

$$\eta_t+u\eta_x-v=0 \quad \cdots\cdots(2.8)$$

以上の諸式でもちいられた文字は通常の意味をもっており，添字は偏微分をあらわしている。ここで，

$$X=x/l,\quad Y=y/d,\quad P=p/\rho gd,$$

$$T=t\Big/\left(\frac{l}{\sqrt{gd}}\right),\quad C=c/\sqrt{gd},\quad U=u/\sqrt{gd},$$

$$V=d/l\cdot v/\sqrt{gd},\quad N=\eta/d,\quad H=h/d$$

などの無次元量を導入し，かつ $\sigma=(d/l)^2\ll 1$ として，式(2.1)～(2.8)をかきなおす。ただし，l, d は，それぞれ水平方向，鉛直方向の特性長である。

連続の式

$$\sigma U_X+V_Y=0 \quad \cdots\cdots(2.1)_1$$

運動方程式

$$\sigma U_T+\sigma UU_X+VU_Y=-\sigma P_X \quad \cdots\cdots(2.2)_1$$

$$\sigma V_T+\sigma UV_X+VV_Y=-\sigma-\sigma P_Y \quad \cdots\cdots(2.3)_1$$

非回転の条件

$$U_Y=V_X \quad \cdots\cdots(2.4)_1$$

底面条件：$Y=-H$ で

$$V=0 \quad \cdots\cdots(2.5)_1$$

鉛直壁の条件：$X=0$ で

$$U=0 \quad \cdots\cdots(2.6)_1$$

表面圧力条件：$Y=N$ で

$$P=0 \quad \cdots\cdots(2.7)_1$$

波形連続の条件：$Y=N$ で

$$\sigma N_T+\sigma UN_X=V \quad \cdots\cdots(2.8)_1$$

表面波形 N, 水平および鉛直方向流速 U, V, 圧力 P, 波速 C をつぎのように σ の級数に展開する。

$$N=\sigma N_1+\sigma^2N_2+\cdots$$

$$=\sigma(N_{11}+N_{12})+\sigma^2(N_{21}+N_{22}+N_{2i})+\cdots$$

* 正会員　中央大学助教授　理工学部土木工学科

$$
\left.
\begin{aligned}
U&=\sigma U_1+\sigma U_2+\cdots\\
&=\sigma(U_{11}+U_{12})+\sigma^2(U_{21}+U_{22}+U_{2i})+\cdots\\
V&=\sigma^2 V_2+\cdots=\sigma^2(V_{21}+V_{22}+V_{2i})+\cdots\\
P&=P_0+\sigma P_1+\sigma^2 P_2+\cdots\\
&=-Y+\sigma(P_{11}+P_{12})+\sigma^2(P_{21}+P_{22}+P_{2i})+\cdots\\
C&=C_0+\sigma C_1+\sigma^2 C_2+\cdots
\end{aligned}
\right\}
\quad\cdots\cdots(2.9)
$$

鉛直方向流速 V は，$O(\sigma)$ では零であることが後の計算からわかるので，この展開からは省略した。添字のうち，最初の 1，2 は，それぞれ近似の次数をあらわし，つぎの 1 は X の正方向に進む波，2 は負方向に進む波，i は干渉によって生じた項であることを意味している。式 $(2.7)_1$，$(2.8)_1$は $Y=N$ での条件としてあたえられているが，これを $Y=0$ での条件にかきなおす。いま，ある N の関数 $F=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k F_k$ を，$N=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma^m N_m$ とかかれるとき，$N=0$ のまわりにテイラー展開すると，

$$
F(N)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{l!}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sigma^m N_m\right\}^l \times\left\{\frac{\partial^l}{\partial Y^l}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k F_k\right)\Big|_{Y=0}\right\}\right]\quad\cdots\cdots(2.10)
$$

となることをもちいる。干渉によって生ずる項では X と T の組み合せがどのようになっているかは計算を行なってみないと不明である。しかし，正方向に進行する波では $(X-CT)$，負に進む波では $(X+CT)$ の組み合せであることは明らかであるから，

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial F(X-CT)}{\partial T}&=-C\frac{\partial F(X-CT)}{\partial X}\\
\frac{\partial F(X+CT)}{\partial T}&=+C\frac{\partial F(X+CT)}{\partial X}
\end{aligned}
\right\}\quad(2.11)
$$

とかけることを利用する。式 (2.9)，(2.10)，(2.11) を式 $(2.1)_1\sim(2.8)_1$ に代入して，σ の次数の等しい項を等置して基本方程式群をうる。

3. $O(\sigma^2)$ の解

$O(\sigma^1)$ の段階では，$P_0=-Y$ というように圧力が静水圧分布をするという結果が容易に確かめられる。$O(\sigma^2)$ の式はつぎのようになる。

$$V_{21}+V_{22}+V_{2i}=-\int(U_{11X}+U_{12X})dY\quad\cdots(3.1)$$

$$-C_0U_{11X}+C_0U_{12X}=-P_{11X}-P_{12X}\quad\cdots\cdots(3.2)$$

$$0=-P_{11Y}-P_{12Y}\quad\cdots\cdots(3.3)$$

$$U_{11Y}+U_{12Y}=0\quad\cdots\cdots(3.4)$$

$Y=-H$ で

$$V_{21}+V_{22}+V_{2i}=0\quad\cdots\cdots(3.5)$$

$X=0$ で

$$U_{11}+U_{12}=0\quad\cdots\cdots(3.6)$$

$Y=0$ で

$$P_{11}+P_{12}=N_{11}+N_{12}\quad\cdots\cdots(3.7)$$

$Y=0$ で

$$-C_0N_{11X}+C_0N_{12X}=V_{21}+V_{22}+V_{2i}\quad\cdots\cdots(3.8)$$

式 (3.4) より，U_{11}，U_{12} とも (X,T) の関数であることがわかる。式 (3.1) に (3.5)，(3.8) を入れると，

$$H(U_{11X}+U_{12X})=C_0N_{11X}-C_0N_{12X}\quad\cdots\cdots(3.9)$$

式 (3.2)，(3.3)，(3.7) から

$$P_{11}+P_{12}=C_0U_{11}-C_0U_{12}=N_{11}+N_{12}\quad\cdots\cdots(3.10)$$

この 2 式から，$C_0=\sqrt{H}$ であることがわかる。式(3.1)～(3.8) の計算の結果，諸量は N_{11}，N_{12} でつぎのようにあらわされる。

$$U_{11}=\frac{1}{\sqrt{H}}N_{11},\quad U_{12}=-\frac{1}{\sqrt{H}}N_{12}\quad\cdots\cdots(3.11)$$

$$P_{11}=N_{11},\quad P_{12}=N_{12}\quad\cdots\cdots(3.12)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
V_{21}&=-\frac{(Y+H)}{\sqrt{H}}N_{11X},\\
V_{22}&=\frac{(Y+H)}{\sqrt{H}}N_{12X},\quad V_{2i}=0
\end{aligned}
\right\}\quad\cdots\cdots(3.13)
$$

$X=0$ で

$$N_{11}=N_{12}\quad\cdots\cdots(3.14)$$

4. $O(\sigma^3)$ の解

N_{11}，N_{12} の具体的な形は，3 次近似の計算を行なってはじめて決定される。$O(\sigma^3)$ の式はつぎのとおりである。

$$V_3=-\int(U_{21X}+U_{22X}+U_{2iX})dY\quad\cdots\cdots(4.1)$$

$$
\begin{aligned}
&P_{21X}+P_{22X}+P_{2iX}\\
&=C_1U_{11X}-C_1U_{12X}+C_0U_{21X}-C_0U_{22X}-U_{2iT}\\
&\quad-(U_{11}+U_{12})(U_{11X}+U_{12X})\\
&\quad-(U_{11Y}+U_{12Y})(V_{21}+V_{22}+V_{2i})\quad\cdots(4.2)
\end{aligned}
$$

$$P_{21Y}+P_{22Y}+P_{2iY}=C_0V_{21X}-C_0V_{22X}-V_{2iT}\quad\cdots\cdots(4.3)$$

$$U_{21}+U_{22}+U_{2i}=\int(V_{21X}+V_{22X}+V_{2iX})dY\quad\cdots\cdots(4.4)$$

$Y=-H$ で

$$V_3=0\quad\cdots\cdots(4.5)$$

$X=0$ で

$$U_{21}+U_{22}+U_{2i}=0\quad\cdots\cdots(4.6)$$

$Y=0$ で

$$
\begin{aligned}
&P_{21}+P_{22}+P_{2i}\\
&=N_{21}+N_{22}+N_{2i}-(N_{11}+N_{12})(P_{11Y}+P_{12Y})
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots(4.7)
$$

$Y=0$ で

$$
\begin{aligned}
V_3=&-C_1N_{11X}+C_1N_{12X}-C_0N_{21X}+C_0N_{22X}\\
&+N_{2iT}+(U_{11}+U_{12})(N_{11X}+N_{12X})\\
&-(N_{11}+N_{12})(V_{21Y}+V_{22Y}+V_{2iY})
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots(4.8)
$$

式 (4.4) に (3.13) を入れると，

$U_{21}+U_{22}+U_{2i}$

$$=\int\left(-\frac{Y+H}{\sqrt{H}}N_{11XX}+\frac{Y+H}{\sqrt{H}}N_{12XX}\right)dY$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{11XX}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{12XX}+h(X,T)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.9)$$

ここで $h(X,T)=h_{21}(X,T)+h_{22}(X,T)+h_{2i}(X,T)$ であると想定する。したがって，

$$\left.\begin{aligned}U_{21}&=-\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{11XX}+h_{21}\\U_{22}&=+\frac{1}{\sqrt{H}}\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{12XX}+h_{22}\\U_{2i}&=h_{2i}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.10)$$

となる。式 (4.2)，(4.3) に (3.13)，(4.10) を入れると，圧力に対する表示として，

$$\left.\begin{aligned}P_{21}&=\frac{C_1}{\sqrt{H}}N_{11}-\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{11XX}\\&\quad+\sqrt{H}h_{21}-\frac{1}{2H}N_{11}{}^2\\P_{22}&=\frac{C_1}{\sqrt{H}}N_{12}-\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)N_{12XX}\\&\quad-\sqrt{H}h_{22}-\frac{1}{2H}N_{12}{}^2\\P_{2i}&=-\int h_{2iT}dX+\frac{1}{H}N_{11}N_{12}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.11)$$

をうる。また式 (3.12) を考慮に入れて (4.7) をかきなおすと，N_{21}，N_{22}，N_{2i} に対して，つぎのような表示をうる。

$$\left.\begin{aligned}N_{21}&=\frac{C_1}{\sqrt{H}}N_{11}+\sqrt{H}h_{21}-\frac{1}{2H}N_{11}{}^2\\N_{22}&=\frac{C_1}{\sqrt{H}}N_{12}-\sqrt{H}h_{22}-\frac{1}{2H}N_{12}{}^2\\N_{2i}&=-\int h_{2iT}dX+\frac{1}{H}N_{11}N_{12}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.12)$$

したがって，N_{11}，N_{12}，h_{21}，h_{22}，h_{2i} の表示をえれば，$O(\sigma^2)$ までの解をあたえられることがわかる。このうち，N_{11}，N_{12}，h_{2i} は，式 (4.1) を (4.5)，(4.8) をみたすようにかきなおすことによりもとめられる。

$$V_3|_{Y=0}-V_3|_{Y=-H}$$
$$=-\int_{Y=-H}^{Y=0}(U_{21X}+U_{22X}+U_{2iX})dY$$

この左辺は式 (4.5)，(4.8) より，

$$V_3|_{Y=0}-V_3|_{Y=-H}$$
$$=\left(-2C_1N_{11X}-Hh_{21X}+\frac{3}{\sqrt{H}}N_{11}N_{11X}\right)$$
$$+\left(2C_1N_{12X}-Hh_{22X}-\frac{3}{\sqrt{H}}N_{12}N_{12X}\right)$$
$$+\left(-\int h_{2iTT}dX+\frac{1}{H}(N_{11}N_{12})_T\right)$$

となり，右辺は，

$$-\int_{-H}^{0}(U_{21X}+U_{22X}+U_{2iX})dY$$
$$=-\frac{1}{3}H^{5/2}N_{11XXX}-Hh_{21X}+\frac{1}{3}H^{5/2}N_{12XXX}$$
$$-Hh_{22X}-Hh_{2iX}$$

となる。この結果，N_{11}，N_{12}，h_{2i} は

$$\frac{H^{5/2}}{3}N_{11XXX}-2C_1N_{11X}+\frac{3}{2\sqrt{H}}(N^2{}_{11})_X=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.13)$$

$$\frac{H^{5/2}}{3}N_{12XXX}-2C_1N_{12X}+\frac{3}{2\sqrt{H}}(N^2{}_{12})_X=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.14)$$

$$\int h_{2iTT}dX-Hh_{2iX}-\frac{1}{H}(N_{11}N_{12})_T=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.15)$$

をとけばよいことになる。h_{21}，h_{22} は，さらに高次の段階でえられる式によって決定される。

N_{11}，N_{12} の 解

式 (4.13) を一度 X について積分すると，

$$N_{11XX}-\frac{6C_1}{H^2\sqrt{H}}N_{11}+\frac{9}{2H^3}N_{11}{}^2+\text{const.}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

ただし，const. は積分定数である。これの解として，

$$N_{11}=A+Bcn^2[n(X-CT)]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.17)$$

とおくと，cn の各次数ごとにまとめられた係数が零にならなければならないことから，

$$n^2=\frac{3}{4}\frac{B}{k^2H^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.18)$$

$$\frac{9}{H^3}A-\frac{6C_1}{H^2\sqrt{H}}+3\frac{2k^2-1}{k^2H^3}B=0\cdots\cdots(4.19)$$

$$\frac{9A^2}{2H^3}-\frac{6C_1}{H^2\sqrt{H}}+2n^2k'^2B+\text{const.}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.20)$$

という関係をうる。決定されるべき定数は，A，n^2，C_1，const.，B である。このうち，B は波高との関連できまるものであるから，残る4個の定数をきめなければならない。このために，一波長間の平均水位は静水面に一致するという条件をおく。つまり

$$\frac{1}{L}\int_0^L N_{11}dX=0$$

とする。この結果

$$A=-\frac{B}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.21)$$

をうる。また C_1 に対しては，

$$C_1=\frac{B}{2k^2\sqrt{H}}\left[2-k^2-3\frac{E}{K}\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

となる。N_{11}，N_{12} は同形の方程式を満足するから，解は，

$$N_{11}=-\frac{B}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)+Bcn^2[n(X-CT)]$$

$$N_{12}=-\frac{B}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)+Bcn^2[n(X+CT)] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.23)$$

であたえられる。ここで，cn は，ヤコビのだ円関数，k は母数，$k'^2=1-k^2$, K, E は，それぞれ，母数 k に対応する第一種および第2種の完全だ円積分である。

鉛直壁での条件

cn 関数が偶関数であることを考慮に入れると，つぎのようにして，式 (3.6) が確かめられる。

$$\begin{aligned}(U_{11}+U_{12})|_{X=0} &=\left(\frac{1}{\sqrt{H}}N_{11}-\frac{1}{\sqrt{H}}N_{12}\right)\Big|_{X=0}\\ &=\frac{B}{\sqrt{H}}[cn^2[n(X-CT)]-cn^2[n(X+CT)]]_{X=0}\\ &=\frac{B}{\sqrt{H}}[cn^2[-nCT]-cn^2[nCT]]=0\end{aligned}$$

h_{2i} の 解

式 (4.15) は，つぎのようにかきなおせる。

$$h_{2iTT}-Hh_{2iXX}-\frac{1}{H}(N_{11}N_{12})_{TX}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.24)$$

干渉をおこす前の波では，変数は $(X-CT)$, $(X+CT)$ という組み合せになっているから，新変数として

$$u=n(X-CT),\quad v=n(X+CT) \quad \cdots\cdots\cdots(4.25)$$

とし，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T}&=-nC\frac{\partial}{\partial n}+nC\frac{\partial}{\partial v}\\ \frac{\partial}{\partial X}&=n\frac{\partial}{\partial u}+n\frac{\partial}{\partial v}\\ \frac{\partial^2}{\partial T^2}&=n^2C^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}+n^2C^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}-2n^2C^2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2}{\partial X^2}&=n^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2n^2\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\end{aligned}$$

をつかうと，h_{2i} をきめるための微分方程式は，

$$\frac{\partial^2 h_{2i}}{\partial u\partial v}=\frac{1}{4H^{3/2}}[N_{11uu}N_{12}-N_{11}N_{12vv}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.26)$$

となり，解は，

$$h_{2i}=\frac{1}{4H^{3/2}}\left[N_{11u}\int N_{12}dv-N_{12v}\int N_{11}du\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.27)$$

である。これを式 (4.23) を考えに入れながら書き直すと，

$$\begin{aligned}h_{2i}=-\frac{B^2}{2H^{3/2}h^2}\Big[&sn[n(X-CT)]\cdot sn[n(X-CT)]\\ &\times dn[n(X-CT)]\cdot Z[n(X+CT)]\\ &-sn[n(X+CT)]\cdot cn[n(X+CT)]\\ &\times dn[n(X+CT)\cdot Z[n(X-CT)]\Big] \quad \cdots\cdots(4.28)\end{aligned}$$

である。ここで，sn, cn, dn はヤコビのだ円関数，$Z(u)$ は，

$$Z(u)=E(u)-\frac{E}{K}u=\int_0^u dn^2u\cdot du-\frac{E}{K}u \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.29)$$

として定義される関数である。

U_{2i} の鉛直壁での条件

干渉によって生じた波にともなう流速は，式 (4.10) から h_{2i} そのものである。$X=0$ とすると，

$$\begin{aligned}U_{2i}|_{X=0}=h_{2i}|_{X=0}=-\frac{B^2}{2H^{3/2}k^2}\Big[&sn[-nCT]\\ &\times cn[-nCT]dn[-nCT]Z[nCT]\\ &-sn[nCT]cn[nCT]dn[nCT]Z[-nCT]\Big]\\ =0 \quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.30)\end{aligned}$$

ここで，cn, dn は偶関数，sn, Z は奇関数であることを考慮に入れている。

N_{2i} の 解

N_{2i} をきめるには，式 (4.12) によって計算する。積分定数は，一波長にわたって平均すると，平均水位が零であるという条件からきめる。この結果，次式をうる。

$$\begin{aligned}N_{2i}&=-\int h_{2iT}dT+\frac{1}{H}N_{11}N_{12}\\ &=-\frac{B^2}{2Hk^2}\Big[sn[n(X-CT)]\cdot cn[n(X-CT)]\\ &\quad\times dn[n(X-CT)]Z[n(X+CT)]\\ &\quad+sn[n(X+CT)]cn[n(X+CT)]\\ &\quad\times dn[n(X+CT)]Z[n(X-CT)]\Big]\\ &\quad+\frac{B_1^2}{2H}\left[cn^2[n(X-CT)]-\frac{1}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)\right]\\ &\quad\times\left[cn^2[n(X+CT)]-\frac{1}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)\right]\\ &\quad+\frac{B^2}{2Hk^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.31)\end{aligned}$$

5. $O(\sigma^4)$ の 解

N_{21}, N_{22} をきめるためには，$O(\sigma^4)$ の式群をとかなければならない。

$$V_4=-\int U_{3X}dY \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

$$\begin{aligned}-P_{3X}=&-C_2U_{11X}+C_2U_{12X}-C_1U_{21X}+C_1U_{22X}\\ &+U_{3T}+(U_{2iT}\text{ の }O(\sigma)\text{ の項})\\ &+[(U_{11}+U_{12})(U_{21}+U_{22}+U_{2i})]_X\\ &+(U_{11Y}+U_{12Y})V_3+(U_{21Y}+U_{22Y}+U_{2iY})\\ &\times(V_{21}+V_{22}+V_{2i}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-P_{3Y}=&-C_1V_{21X}+C_1V_{22X}+V_{3T}\\ &+(U_{11}+U_{12})(V_{21X}+V_{22X}+V_{2iX})\\ &+\frac{1}{2}[(V_{21}+V_{22}+V_{2i})^2]_Y\\ &+(V_{2iT}\text{ の }O(\sigma)\text{ の項}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.3)\end{aligned}$$

$$U_3=\int V_{3Y}dY \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

$Y=-H$ で

$$V_4=0 \quad \cdots\cdots(5.5)$$

$X=0$ で

$$U_3=0 \quad \cdots\cdots(5.6)$$

$Y=0$ で

$$P_3=N_3-(N_{11}+N_{12})(P_{21Y}+P_{22Y}+P_{2iY}) \quad (5.7)$$

$Y=0$ で

$$\begin{aligned}V_4=&N_{3T}-C_2N_{11X}+C_2N_{12X}-C_1N_{21X}+C_1N_{22X}\\&+(U_{11}+U_{12})(N_{21X}+N_{22X}+N_{2iX})\\&+(N_{11X}+N_{12X})(U_{21}+U_{22}+U_{2i})\\&-(N_{21}+N_{22}+N_{2i})(V_{21Y}+V_{22Y}+V_{2iY})\\&-(N_{11}+N_{12})V_{3Y}+(N_{2iT}\text{ の }O(\sigma)\text{ の項})\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.8)$$

以上の式を解いて N_{21}, N_{22} の解を求めるのであるがこのままでは非常に複雑なものになってしまう。N_{21}, N_{22} をきめるためには，h_{21}, h_{22} をきめればよい。式(4.10)の $X=0$ での条件からわかるように，h_{21} と h_{22} とは同じような形をしていなければならず，このふたつの項の相違はh_{21}が正方向への進行波，h_{22} が負方向への進行波をあらわすことである。それゆえ h_{21} についてのみ解けば，h_{22} はきめられる。h_{21} は，$O(\sigma^2)$ の正方向に進む波をあらわしている。したがって独立変数 X, T は $(X-CT)$ という組み合せになっている項のみを上の式群から選択して考えればよい。h_{21}, h_{21} と N_{11} との積，N_{11} の2乗，3乗の項は，すべて $(X-CT)$ という組み合せをふくんでいる。ここで問題となるのは，h_{2i} と N_{12} という積が $(X-CT)$ という組み合せをふくみうるということである。しかも，h_{21} と N_{11} の積と同程度の近似次数になりうる。しかし，h_{21} をきめるために必要な $O(\sigma)$ の項と $O(\sigma^2)$ の項との干渉項は，h_{21} 自身と他項の干渉項のみであるとする。h_{2i} と N_{12} の積は，$O(\sigma^3)$ の項をきめるためにのみもちいられる。このような仮定のもとに式 (5.1)～(5.8) を簡略化して解いていく。まず式(4.1) より

$$\begin{aligned}V_2&=-\int_{-H}^{Y}(U_{21X}+U_{22Y}+U_{2i})dY\\&=\frac{1}{\sqrt{H}}\left[\frac{1}{6}Y^3+\frac{1}{2}HY^2-\frac{1}{3}H_3\right]N_{11XXX}\\&\quad-(Y+H)h_{21X}+(\text{他の項})\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.9)$$

式 (5.4) より

$$\begin{aligned}U_3=\int V_{3X}dY=&\frac{1}{\sqrt{H}}\left[\frac{1}{24}Y^4+\frac{1}{6}HY^3-\frac{1}{3}H^3Y\right]\\&\times N_{11XXXX}-\left[\frac{1}{2}Y^2+HY\right]h_{21XX}+(\text{他の項})\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.10)$$

式 (5.2), (5.3) より,

$$\begin{aligned}P_3=&C_2U_{11}-C_2U_{12}+C_1U_{21}-C_1U_{22}\\&-\int[U_{3T}+(U_{2iT}\text{ の }O(\sigma)\text{ の項})]dX\\&-(U_{11}+U_{12})(U_{21}+U_{22}+U_{2i})\\&-\frac{1}{2}(V_{21}+V_{22}+V_{2i})^2\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.11)$$

式 (5.7) より,

$$\begin{aligned}N_3=&C_2U_{11}+C_1U_{21}-U_{11}U_{21}-\frac{1}{2}V_{21}{}^2\\&-HN_{11}N_{11XX}+(\text{他の項})\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.12)$$

式 (5.1) を (5.5),(5.8) を満足するように解くと,

$$\begin{aligned}V_4\Big|_{Y=-H}^{Y=0}=&(3N_{11}-2C_1\sqrt{H})h_{21X}+3N_{11X}h_{21}\\&+\left\{\frac{3C_1}{2H}(N_{11}{}^2)_X+H^{3/2}N_{11X}N_{11XX}\right.\\&+H^{3/2}(N_{11}N_{11XX})_X-\frac{3}{2}H^{-3/2}N_{11}{}^2N_{11X}\\&\left.-\left(2C_2+\frac{C_1^2}{\sqrt{H}}\right)N_{11X}\right\}+(\text{他の項})\end{aligned}$$

$$-\int_{-H}^{0}U_{3X}dY=-\frac{H^3}{3}h_{21XXX}-\frac{2}{15}H^{9/2}N_{11XXXXX}+(\text{他の項})$$

となるから，h_{21} をきめる微分方程式としては,

$$\begin{aligned}&\frac{H^3}{3}h_{21XX}+3N_{11}h_{21}-2C_1\sqrt{H}h_{21}+\frac{2}{15}H^{9/2}N_{11XXXX}\\&+\frac{3C_1}{2H}N_{11}{}^2+\frac{1}{2}H^{3/2}(N_{11X})^2+H^{3/2}(N_{11}N_{11XX})\\&-\frac{1}{2}H^{-3/2}N_{11}{}^3-\left(2C_2+\frac{C_1^2}{\sqrt{H}}\right)N_{11}+\text{const.}=0\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.13)$$

をうる。

h_{21}, h_{22} の解

h_{21} として,

$$\begin{aligned}h_{21}=&D_1cn^4[n(X-CT)]\\&+D_2cn^2[n(X-CT)]+D_3\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5.14)$$

とおき，式 (5.13) から，係数を決定する。このとき式(5.13) からは，cn の6乗，4乗，2乗，零乗の項の係数がそれぞれ消えるという4つの関係がえられる。ところが，未定の定数は，D_1, D_2, D_3, 波速の2次項 C_2, および式 (5.13) にあらわれた const. の5個である。もう一つの条件としては，一波長間の平均水面は静水位と一致するという条件をもちいる。こうして，係数をきめると

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\frac{5}{4}H^{-3/2}B^2\\D_2&=-\frac{5}{2}\frac{B^2}{k^2}H^{-3/2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)\\D_3&=\frac{H^{-3/2}B^2}{4k^4}\left[8\left(\frac{E}{K}\right)^2-2(7-6k^2)\frac{E}{K}\right.\\&\quad\left.+(6-5k^2)(1-k^2)\right]\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5.15)$$

$$\boldsymbol{C_2}=\frac{H^{-3/2}B^2}{40k^4}\Big[(64-64k^2+19k^4)$$

$$+90(k^2-2)\frac{E}{K}+135\left(\frac{E}{K}\right)^2\Bigg] \cdots\cdots(5.16)$$

をうる。h_{22} は,

$$h_{22}=-D_1cn^4[n(X+CT)]$$
$$-D_2cn^2[n(X+CT)]-D_3 \quad \cdots\cdots\cdots(5.17)$$

として決定される。こうすれば式 (4.6) が完全に満たされる。

N_{21}, N_{22} の 解

N_{21} をもとめる。

$$N_{21}=\frac{C_1}{\sqrt{H}}N_{11}+\sqrt{H}\,h_{21}-\frac{1}{2H}N_{11}{}^2$$
$$=\frac{3B^2}{4H}cn^4[n(X-CT)]$$
$$+\frac{B^2}{2k^2H}\left[5-4k^2-6\frac{E}{K}\right]cn^2[n(X-CT)]$$
$$+\frac{B^2}{4k^4H}\left[(8-5k^2)(1-k^2)+4(4k^2-5)\frac{E}{K}\right.$$
$$\left.+12\left(\frac{E}{K}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.18)$$

おなじようにして

$$N_{22}=\frac{3B^2}{4H}cn^4[n(X+CT)]$$
$$+\frac{B^2}{2k^2H}\left[5-4k^2-6\frac{E}{K}\right]cn^2[n(X+CT)]$$
$$+\frac{B^2}{4k^4H}\left[(8-5k^2)(1-k^2)+4(4k^2-5)\frac{E}{K}\right.$$
$$\left.+12\left(\frac{E}{K}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.19)$$

である。

6. 波諸量の表現

6.1 波　　形

無次元表示された波形を 2 次近似までかくと,

$$N=\sigma N_1+\sigma^2N_2=\sigma B\Bigg[cn^2[n(X-CT)]$$
$$+cn^2[n(X+CT)]-\frac{2}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)\Bigg]$$
$$+\sigma^2B^2\Bigg[\frac{3}{4H}\{cn^4[n(X-CT)]+cn^4[n(X+CT)]\}$$
$$+\frac{1}{2H}cn^2[n(X-CT)]cn^2[n(X+CT)]$$
$$+\frac{1}{2k^2H}\left\{6-5k^2-7\frac{E}{K}\right\}$$
$$\times\{cn^2[n(X-CT)]+cn^2[n(X+CT)]\}$$
$$-\frac{1}{2k^2H}\{sn[n(X-CT)]cn[n(X-CT)]$$
$$\times dn[u(X-CT)]Z[n(X+CT)]$$
$$+sn[n(X+CT)]\cdot cn[n(X+CT)]$$
$$\times dn[n(X+CT)]\cdot Zn(X-CT)]\}$$
$$+\frac{1}{2k^4H}\left\{14\left(\frac{E}{K}\right)^2+(20k^2-24)\frac{E}{K}\right.$$
$$\left.+(10-7k^2)(1-k^2)\right\}\Bigg] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.1)$$

となる。$N=\eta/d$, $H=h/d$ という関係を考えに入れて次元を有する形になおす。ある時間における最高水位と最低水位は, 半波長離れて生ずるが, このふたつの水位の差を $2a$ とする。これをもとめるには, $T=0$ のとき, $nX=0$ と $nX=K$ とすればよい。その結果,

$$\frac{2a}{d}=N|_{X=0,\ T=0}-N|_{X=(L/2),\ T=0}$$
$$=2B\sigma+\frac{B^2\sigma^2}{k^2H}\left[6-3k^2-7\frac{E}{K}\right]$$

をうるから,

$$B\sigma d=a-\frac{a^2}{2k^2h}\left[6-3k^2-7\frac{E}{K}\right] \cdots\cdots\cdots(6.2)$$

となる。また,

$$n^2=\frac{3}{4}\frac{B}{k^2H^3}=\frac{3}{4}\frac{B\sigma d}{k^2h^3}\cdot\frac{d^2}{\sigma}$$
$$nX=\sqrt{\frac{3B\sigma d}{4k^2h^3}}\frac{d}{\sigma^{1/2}}\cdot\frac{x}{l}=\sqrt{\frac{3A}{4k^2h^3}}\,x$$

である。これ以後, 次元をもった表示の際の n は, $\sqrt{\frac{3A}{4k^2h^3}}$ であるとする。ただし, A は式 (6.2) であらわされる $B\sigma d$ を意味する。以上を考慮に入れて式 (6.1) を書きあらためると,

$$\eta=a\Bigg[cn^2[n(x-ct)]+cn^2[n(x+ct)]$$
$$-\frac{2}{k^2}\left(\frac{E}{K}-1+k^2\right)\Bigg]$$
$$+a^2\Bigg[\frac{3}{4h}\{cn^4[n(x-ct)]+cn^4[n^4(x-ct)]\}$$
$$+\frac{1}{2h}cn^2[n(x-ct)]cn^2[u(x+ct)]$$
$$-\frac{1}{h}\{cn^2[n(x-ct)]+cn^2[n(x+ct)]\}$$
$$-\frac{1}{2k^2h}\{sn[n(x-ct)]cn[n(x-ct)]$$
$$\times dn[n(x-ct)]Z[n(x+ct)]+sn[n(x+ct)]$$
$$\times cn[n(x+ct)]dn[n(x+ct)]Z[n(x-ct)]\}$$
$$+\frac{1}{2k^4h}\left\{(2+k^2)(k^2-1)+2\frac{E}{K}\right\}\Bigg] \cdots\cdots\cdots(6.3)$$

ただし,

$$n=\sqrt{\frac{3A}{4k^2h^3}}$$
$$A=a-\frac{a^2}{2k^2h}\left[6-3k^2-7\frac{E}{K}\right]$$

である。

6.2 水 平 流 速

無次元表示では,

$$U=\sigma U_1+\sigma^2U_2$$
$$=\frac{\sigma B}{\sqrt{H}}[cn^2[n(X-CT)]-cn^2[n(X+CT)]]$$
$$+\sigma^2B^2\left[\frac{2n^2}{B\sqrt{H}}\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)\right.$$
$$\times\{3k^2(cn^4[n(X-CT)]-cn^4[n(X+CT)])$$
$$+2(1-2k^2)$$

$$\times(cn^2[n(X-CT)]-cn^2[n(X+CT)])\}$$
$$+\frac{5}{4}H^{-3/2}\{cn^4[n(X-CT)]-cn^4[n(X+CT)]\}$$
$$-\frac{5}{2}\frac{H^{-3/2}}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)$$
$$\times\{cn^2[n(X-CT)]-cn^2[n(X+CT)]\}$$
$$-\frac{H^{-3/2}}{2k^2}\{sn[n(X-CT)]cn[n(X-CT)]$$
$$\times dn[n(X-CT)]Z[n(X+CT)]$$
$$-sn[n(X+CT)]cn[n(X+CT)]$$
$$\times dn[n(X+CT)]Z[n(X-CT)]\}\Big] \cdots\cdots(6.4)$$

これを，次元をもつ形でかくと，つぎのようになる。

$$u=\frac{a\cdot g}{\sqrt{gh}}[cn^2[n(x-ct)]-cn^2[n(x+ct)]]$$
$$+\frac{5}{4}\frac{a^2g}{h\sqrt{gh}}[cn^4[n(x-ct)]-cn^4[n(x+ct)]]$$
$$+\frac{a^2g}{2k^2h\sqrt{gh}}\left(-1-2k^2+2\frac{E}{K}\right)$$
$$\times[cn^2[n(x-ct)]-cn^2[n(x+ct)]]$$
$$-\frac{a^2g}{2k^2h\sqrt{gh}}[sn[n(x-ct)]cn[n(x-ct)]]$$
$$\times dn[n(x-ct)]Z[n(x+ct)]-sn[n(x+ct)]$$
$$\times cn[n(x+ct)]dn[n(x+ct)]Z[n(x-ct)]]$$
$$+\frac{3a^2g}{4k^2h^3\sqrt{gh}}(y^2+2hy)$$
$$\times[3k^2\{cn^4[n(x-ct)-cn^4[n(x+ct)]\}$$
$$+2(1-2k^2)\{cn^2[n(x-ct)]-cn^2(x+ct)]\}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.5)$$

6.3 鉛 直 流 速

無次元表示では，

$$V=\sigma^2V_2=+\frac{Y+H}{\sqrt{H}}\cdot 2n^2B$$
$$\times[sn[n(X-CT)]cn[n(X-CT)]$$
$$\times dn[n(X-CT)]Z[n(X+CT)]$$
$$-sn[n(X+CT)]cn[n(X+CT)]$$
$$\times dn[n(X+CT)]Z[n(X-CT)]]\cdots(6.6)$$

次元を有する表示では，

$$v=\frac{g(y+h)}{h^2}\cdot\sqrt{\frac{3a^3}{gk^2}}$$
$$\times[sn[n(x-ct)]cn[n(x-ct)]dn[n(x-ct)]$$
$$-sn[n(x+ct)]cn[n(x+ct)]dn[n(x+ct)]]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.7)$$

となる。n^2 を式 (6.2) を考えに入れてかきなおすと，もう一項でてくるように思われるが，それは高次の項であるので，$O(\sigma^2)$ までの表現では式 (6.7) で十分である。

6.4 波 速

無次元表示では，

$$C=C_0+\sigma C_1+\sigma^2C_2$$
$$=\sqrt{H}+\frac{\sigma B}{2k^2\sqrt{H}}\left[2-k^2-3\frac{E}{K}\right]$$
$$+\sigma^2\frac{H^{-3/2}B^2}{40k^4}\Bigg[(64-64k^2+19k^4)$$
$$+90(k^2-2)\frac{E}{K}+135\left(\frac{E}{K}\right)^2\Bigg]\cdots\cdots\cdots\cdots(6.8)$$

次元をもつ形では，

$$c=\sqrt{gh}+\frac{ag}{2k^2\sqrt{gh}}\left(2-k^2-3\frac{E}{K}\right)$$
$$+\frac{a^2g}{40k^4h\sqrt{gh}}\Bigg[-56+56k^2-11k^4$$
$$-70(k^2-2)\frac{E}{K}-75\left(\frac{E}{K}\right)^2\Bigg]\cdots\cdots\cdots(6.9)$$

である。第 1 項は，微小振幅長波の波速であり，第 2 項以下が波高の影響を示すものである。

6.5 圧 力

無次元圧力では，

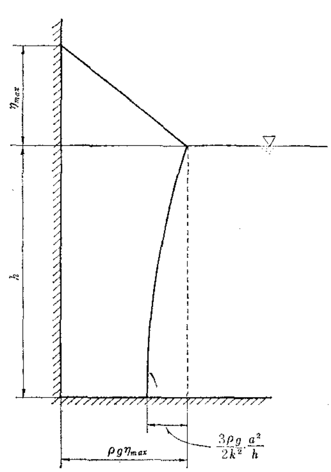
$$P=-Y+\sigma P_1+\sigma^2P_2$$
$$=-Y+\sigma N_1+\sigma^2N_2-\sigma^2\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)$$
$$\times(N_{11XX}+N_{12XX})$$
$$=(N-Y)-\sigma^2\left(\frac{1}{2}Y^2+HY\right)$$
$$\times(N_{11XX}+N_{12XX})\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.9)$$

となる。第 1 項は静水圧分布，第 2 項は静水圧分布からのずれが放物線であることを示している。これを次元をもつ形でかくと，

$$p=\rho g(\eta-y)-\frac{3\rho ga^2}{4k^2h^3}(y^2+2hy)$$
$$\times[2(1-k^2)-2(1-2k^2)\{cn^2[n(x-ct)]$$
$$+cn^2[n(x+ct)]\}-3k^2\{cn^4[n(x-ct)]$$
$$+cn^4[n(x+ct)]\}]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.10)$$

となる。壁に波の山がきたときの圧力は，$X=0$，$T=0$ とおいて，

図—2



$$
\begin{aligned}
p&=\rho g(\eta_{\max}-y)+\frac{3\rho ga^2}{2k^2h^3}(y^2+2hy)\\
&=\rho g\left[2a-\frac{2a}{k^2}\left(\frac{E}{K}-k'^2\right)+\frac{a^2}{4k^4h}\left\{-(12-3k^2)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times(1-k^2)+8(3-2k^2)\frac{E}{K}-12\left(\frac{E}{K}\right)^2\right\}-y\right]\\
&\quad+\frac{3\rho ga^2}{2k^2h^3}(y^2+2hy) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6.11)
\end{aligned}
$$

となる。このうち $-\rho gh$ 以外の水圧を図示したのが，**図—2** である。

7. 結　　論

有限振幅の定常長波の解を第2近似項までもとめた。その結果，波形は式 (6.3)，流速は (6.5)，(6.7)，波速は (6.9)，圧力は式 (6.11) であたえられる。波長は $nL=2K$ であることから求めればよい。その他諸量の実際の計算については，岩垣博士の論文，Masch と Wigel の表などを参照されたい。

記

本研究を行なうにあたって，松永記念科学振興財団より松永研究助成金を，また文部省科学研究費補助金をうけた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

1) Benney, D.J. : Long non-linear waves in fluid flows.
2) Goda, Y. : The fourth order approximation to the pressure of standing waves, Coastal Eng. in Japan Vol. 10, 1967.
3) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究 (第1報)—波形勾配および波形について—京大防災研年報 第7号. 昭 38.
4) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究 (第2報)—波速および波長について京大防災研年報. 第8号. 昭 39.
5) Masch, F.D. and Wiegel, R.L. : Cnoidal waves, Tables of functions, Council on Wave Research, The Eng. Foundation, Univ. of California.
6) Laitone, E.V. : The second approximation to cnoidal and solitary waves, J.F.M., Vol. 9, 1961.
7) Tadjbaksh, I. and Keller, J.B. : Standing surface waves of finite amplitude, J.F.M., Vol. 8, 1960.
8) 友近　晋：楕円関数論. 共立出版. 昭 33.