

密度流の問題(3)

浜 田 徳 一*

1. 2層流における界面内波の増幅の機構として、Kelvin-Helmholtz 不安定はきわめて限定された仮定のもとに可能なものであり、問題の性質を明らかにするためには、より一般的な増幅機構による現象の理解が必要である。ここに述べるものは、2層流における一般流の流速分布が曲率をもっている場合の吟味であり、固有値問題の困難のため、ある程度の近似解法を用いた。

問題は2次元とし、せつ動の行なわれていない2層流の界面において一般流の方向にx軸をとる。y軸はそれに垂直上向きとする。上層流体に関する諸量を $U_1, u_1, v_1, \rho_1, \dots$ 、下層流体に関する諸量を $U_2, u_2, v_2, \rho_2, \dots$ とする。ただし U_1, U_2 は一般流を、 $u_1, u_2, \dots$ はせつ動流を示している。上層流体の上部界面を $y=h_1$ 、下層流体の下部界面を $y=-h_2$ とし、ともに水平とする。一般流 U_1, U_2 については、問題を簡単にするため、 U_1 について定常な放物線型流速分布を仮定し、 $U_2=0$ とおく。

非粘性不安定に注目して計算を進めるものとするれば、必要とせられる力学的および運動学的方程式はつぎのよう

に与えられる。

上層流体につき

$$U_1 = \frac{U_{10}}{h_1^2} y(2h_1 - y) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + (U_1 + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial (U_1 + u_1)}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial (P_1 + p_1)}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + (U_1 + u_1) \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ = -g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial (P_1 + p_1)}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) = -(U_1 - c) B_1 F_2 \left\{ 1 + m^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 dy dy + \dots \right\} \\ + (U_1 - c) B_1 \left\{ \int_0^y (U_1 - c)^{-2} dy + m^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} dy dy dy + \dots \right\} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{\int_0^{h_1} (U_1 - c)^{-2} dy + m^2 \int_0^{h_1} (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} dy dy dy + \dots}{1 + m^2 \int_0^{h_1} (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 dy dy} \quad \dots\dots\dots (15)$$

内波の界面における振幅を A_0 とすれば、

下層流体につき

$$U_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial (P_2 + p_2)}{\partial x} \\ \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial (P_2 + p_2)}{\partial y} \\ \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0 & y &= h_1 \text{ にて} \\ v_2 &= 0 & y &= -h_2 \text{ にて} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$P_1 + p_1 = P_2 + p_2 \quad y = \eta \text{ (内部界面) にて} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U_1 + u_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} &= v_1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= v_2 \end{aligned} \right\} y = \eta \text{ にて} \quad \dots\dots\dots (11)$$

すでに問題は非粘性になっているのであるが、さらにここでは式(1)~(11)の線形解のみについて考察する。この条件のもとで、上層流体につき、せつ動流の流関数 ψ_1 を、 $u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$ 、 $v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}$ として、

$$\psi_1 = \varphi_1(y) e^{im(x-ct)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおけば、次式が成立する。

$$(U_1 - c) \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - m^2 \varphi_1 \right\} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \varphi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 c は一般に複素数として、 U_1 が実数の範囲内では $U_1 - c \neq 0$ が成立するものとする。 h_1 が波の波長と比較できる場合にも適用される解を得るため、式(13)の解法として W. Heisenberg の方法¹⁾を用いる。この方法によれば $y=h_1$ の境界条件を考慮して、つぎの φ_1 の表示が得られる。

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所

$$\eta = A_0 e^{im(x-ct)} \dots\dots\dots (16)$$

となり、これを用いて φ_1 は、

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) = & (U_1 - c) A_0 \left\{ 1 + m^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 dy dy + \dots \right\} \\ & - (U_1 - c) \frac{A_0}{F_2} \left\{ \int_0^y (U_1 - c)^{-2} dy + m^2 \int_0^y (U_1 - c)^{-2} \int_0^y (U_1 - c)^2 dy dy + \dots \right\} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

これを用いて計算すれば、内部界面 $y = \eta$ における圧力の表現として、

$$\begin{aligned} (P_1 + p_1)_{at \ y=\eta} = & -\rho_1 \frac{A_0}{F_2} e^{im(x-ct)} \\ & - \rho_1 g A_0 e^{im(x-ct)} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

が得られる。

$F_2 = F_{2r} + iF_{2i}$ とおけば、式 (18) の右辺第 1 項は近似的に $-\rho_1 \frac{A_0}{F_{2r}} e^{i[m(x-ct) - \frac{F_{2i}}{F_{2r}}]}$ となり、 $F_{2i} \approx 0$ により生ずる η との位相差、すなわち増幅のために必要な圧力成分の存在が示される。

下層流体につき、せつ動流の流関数 ψ_2 を考え、 $u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$, $v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ とすれば、内部界面および底面における境界条件を満足する解として、

$$\psi_2 = \frac{-cA_0}{\sinh mh_2} \sinh m(y+h_2) e^{im(x-ct)} \dots (19)$$

が得られ、これからまた下層流体における $P_2 + p_2$ を計算できる。特性方程式は上下両流体の界面における圧力の連続、すなわち式 (10) から得られて、

$$(\rho_2 - \rho_1)g = \rho_2 c^2 m \coth mh_2 + \rho_1 \frac{1}{F_2} \dots\dots\dots (20)$$

となる。

$U_1 = 0$ のときは、

$$\frac{1}{F_2} = \frac{c^2 m \left(1 + m^2 \frac{h_1^2}{2} + \dots \right)}{\left(mh_1 + \frac{1}{3!} m^3 h_1^3 + \dots \right)} = c^2 m \coth mh_1 \dots\dots\dots (21)$$

となり、これによる式 (20) の解は c が実と得られ、静止流体における界面内波の解と一致する。

2. U_1 が式 (1) あるいはさらに複雑なかたちで与えられる一般の場合に式 (20) を解くことは容易ではない。したがってつぎの近似解法を考える。式 (20) の F_2 の第 1 項のみに注目し、 $\int_{y_1}^{y_2} (U_1 - c)^{-2} dy$ をとってみる。ただし $y_2 > y_1$ の実の積分路について積分し、 $c = c_r + ic_i$ において $c_i \rightarrow +0$ とする。このとき $U_1(y_{cr}) = c_r$ に対応する y_{cr} が、 $y_2 > y_{cr} > y_1$ の領域に含まれるとき、上式の積分は近似的に

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(U_1 - c)^2} = & \frac{1}{U_{1c}{}'^2} \left(-\frac{1}{y_2 - y_{cr}} + \frac{1}{y_1 - y_{cr}} \right) \\ & - \frac{U_{1c}''}{U_{1c}{}'^3} \log e |y_2 - y_{cr}| \\ & + \frac{U_{1c}''}{U_{1c}{}'^3} \log e |y_1 - y_{cr}| - \frac{U_{1c}''}{U_{1c}{}'^3} i \pi \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

(U_{1c}' は $y = y_{cr}$ における U_1 の 1 次微係数を示す。 U_{1c}'' についても同様) となり、 y_{cr} が y_1 に近い値をもつとき、実部はほぼ $\frac{1}{U_{1c}{}'^2} \left(-\frac{1}{y_2 - y_{cr}} + \frac{1}{y_1 - y_{cr}} \right)$ に代表せられ、 U_1 の 1 次微係数の影響をうけ、負の値をとる。これに対し虚部は U_2 の 2 次微係数すなわち曲率の影響を受けている。このことが式 (20) に拡張して成立できるものとすれば、式 (20) の解として得られる $c = c_r + ic_i$ において、 y_{cr} における平均流速の 2 次微係数、1 次微係数が支配的に作用するのは c_i に対してであり、 c_r に対しては近似的に曲率を無視して、流速分布を直線状と考えて、近似値を求めても大差はあるまいという推論が行なわれる。さらに式 (1) で示される放物線型流速分布では、同流量の三角形型流速分布の速度勾配は $y = \frac{1}{3} h_1$ における式 (1) の速度勾配と一致し、かりにこれを内部界面に近い部分の速度勾配 (c_r の算出における) の代表であるとすれば、 c_r の算出には同流量の三角形型流速分布を用いて計算できることとなる。以上の過程を計算で行なえばつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_2} = & Ac^2 + Bc + D \text{ において、式 (20) は、} \\ & c^2(\rho_2 m \coth mh_2 + \rho_1 A) + c \rho_1 B + \rho_1 D \\ & - (\rho_2 - \rho_1)g = 0 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

式 (23) と参考文献 2) 式 (21) と比較して

$$A = m \coth mh_1, B = -\alpha, D = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 α は三角形型流速分布を仮定した上層一般流の速度勾配である。すなわち、

$$\frac{1}{F_2} = c^2 m \coth mh_1 - \alpha c \dots\dots\dots (25)$$

ここで式 (20) において $F_2 \rightarrow F_{2r} + iF_{2i}$, $c \rightarrow c_r + ic_i$ の変換を行なえば、

$$\begin{aligned} (\rho_2 - \rho_1)g = & \rho_2 (c_r + ic_i)^2 m \coth mh_2 \\ & + \rho_1 (c_r + ic_i)^2 m \coth mh_1 \\ & - \rho_1 \alpha (c_r + ic_i) - \rho_1 i \frac{F_{2i}}{F_{2r}^2} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

式 (26) の虚部をとれば、

$$\begin{aligned} c_i = & \rho_1 \frac{F_{2i}}{F_{2r}^2} \frac{1}{2 \rho_2 c_r m \coth mh_2 + 2 \rho_1 c_r m \coth mh_1 - \rho_1 \alpha} \\ = & \rho_1 F_{2i} \frac{c_r^2 (c_r m \coth mh_1 - \alpha)^2}{2 \rho_2 c_r m \coth mh_2 + 2 \rho_1 c_r m \coth mh_1 - \rho_1 \alpha} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

式 (22) からは $m \rightarrow 0$ で $\frac{1}{F_{2r}} < 0$ が考えられるが、式 (25) からは m が十分大きいとき $\frac{1}{F_{2r}} > 0$ であることがわかる。式 (27) において c_r は、

$$c_r = \frac{\rho_1 \alpha + \sqrt{(\rho_1 \alpha)^2 + 4(\rho_2 m \coth mh_2 + \rho_1 m \coth mh_1)(\rho_2 - \rho_1)g}}{2(\rho_2 m \coth mh_2 + \rho_1 m \coth mh_1)} \dots\dots\dots (28)$$

つぎに式 (15) により F_{2i} の近似値を計算するとつぎのようになる。 y_{cr} が十分小さいとき、

$$F_{2i} = -\frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \pi - \frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \pi \frac{m^2 h_1^2}{6} + \frac{U_{1c}''^2}{U_{1c}^{1/4}} \pi h_1 \frac{m^2 h_1^2}{9} - \frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \pi \frac{m^4 h_1^4}{120} + \frac{U_{1c}''^2}{U_{1c}^{1/4}} \pi h_1 \frac{13 m^4 h_1^4}{2700} \\ + \frac{U_{1c}''^3}{U_{1c}^{1/3}} \pi h_1^2 \frac{19}{4536} m^4 h_1^4 - \frac{U_{1c}''^4}{U_{1c}^{1/6}} \pi h_1^3 \frac{m^4 h_1^4}{441} + \dots\dots\dots (29)$$

式 (29) から mh_1 が小さいときは F_{2i} は $-\frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \pi$ で近似できることがわかるが、 m が十分大きいときの F_{2i} は式 (29) だけからでは決定できず、つぎの決定法を用いる。

上層流の一般流速が三角形流速分布をするとき、 m が十分大きい場合の界面内波の力学的エネルギーはつぎのように得られる。

$$E = \frac{1}{2} A_0^2 g (\rho_2 - \rho_1) + \frac{1}{8} \frac{(\rho_1 \alpha)^2 A_0^3}{m(\rho_2 + \rho_1)} + \frac{1}{4} \rho_1 \alpha A_0^2 \\ \times \sqrt{\frac{(\rho_1 \alpha)^2}{4 m^2 (\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{m(\rho_1 + \rho_2)} g} \dots\dots\dots (30)$$

式 (30) における界面内波の振幅 A_0 が増幅されているものとして、 $A_0 = A_{00} e^{mc_i t}$ とおけば (この場合増幅は式 (29) による y_c における 2 次微係数を含めて考慮した一般流の性質により生ずるものとする)。

$$\frac{dE}{dt} = mc_i A_0^2 c_r \left(\rho_2 c_r m + \rho_1 c_r m - \frac{1}{2} \rho_1 \alpha \right) \dots\dots\dots (31)$$

J.W. Miles³⁾ の風波発生理論でよく知られるように、

$$\frac{dE}{dt} = c_r \tau \dots\dots\dots (32)$$

とおかれ、 τ は、

$$\tau = -\frac{\pi}{2} \rho_1 m |\varphi_{1c}|^2 \frac{U_{1c}''}{U_{1c}'} \dots\dots\dots (33)$$

である。ここで式 (17) を用いて $\varphi_1(y_c)$ を計算すると、

$$\varphi_1(y_c) \simeq A_0 m^2 \left\{ -\frac{1}{3} y_{cr}^3 U_{1c}' + \frac{1}{4} y_{cr}^4 U_{1c}'' \right\} \\ + \frac{A_0}{F_2} \frac{1}{U_{1c}'} + \frac{A_0}{F_2} m^2 \\ \times \left\{ \frac{1}{6} \frac{y_{cr}^2}{U_{1c}'} + \frac{1}{36} \frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/2}} y_{cr}^2 \right\} + \dots\dots\dots (34)$$

式 (34) によれば y_{cr} が小さいとき、

$$|\varphi_{1c}|^2 \simeq \frac{A_0^2}{F_2^2} \frac{1}{U_{1c}^{1/2}} \dots\dots\dots (35)$$

で表わすことができる。式 (31)、(32) の両式を用い、式 (33) の $|\varphi_{1c}|^2$ には式 (35) を用いる。さらに式 (25) による F_{2r} を用いると、

$$c_i = -\frac{\pi}{2} \rho_1 \frac{c_r^2 (mc_r - \alpha)^2}{\rho_2 c_r m + \rho_1 c_r m - \frac{1}{2} \rho_1 \alpha} \frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \dots\dots\dots (36)$$

式 (36) を式 (27) と比較すれば、

$$F_{2i} \simeq -\frac{U_{1c}''}{U_{1c}^{1/3}} \pi \dots\dots\dots (29')$$

となり、 m が十分大きい場合においても、 F_{2i} は式 (29) 第 1 項のみで近似してよいことがわかる。ただし h_1 に対して y_{cr} が十分小さいことが必要である。

3. 2 つの例について上述の計算による増幅率 mc_i を求めた。いずれの場合も、 $\rho_1 = 1.000$ 、 $\rho_2 = 1.020$ としている。例-1 は模型実験に関するものであり、与えられた諸条件は、

$$h_2 \rightarrow \infty, h_1 = 10 \text{ cm}, U_1 = -0.12 y^2 + 2.4 y \text{ cm/sec} \dots\dots\dots (37)$$

したがって、 $U_{10} = 12 \text{ cm/sec}$ である。

考慮する界面波および計算の結果は、

L_{cm}	m	y_{cr}	U_{1c}'	c_r	c_i	mc_i	$(c_r)_{K.H.}$	$(c_i)_{K.H.}$
2	3.14	0.820	2.20	1.88	0.210	0.661	3.96	3.59
3	2.09	1.03	2.15	2.34	0.251	0.527	3.96	3.37
4	1.57	1.22	2.10	2.75	0.284	0.446	3.96	3.13
5	1.25	1.39	2.06	3.11	0.311	0.391	3.96	2.87
6	1.04	1.55	2.02	3.44	0.334	0.349	3.96	2.59
7	0.897	1.71	1.98	3.75	0.354	0.318	3.96	2.27
8	0.785	1.86	1.95	4.05	0.371	0.291	3.96	1.90

$(c_r)_{K.H.}$ 、 $(c_i)_{K.H.}$ は参考のため同流量の一樣流速分布を仮定した場合、Kelvin-Helmholtz 不安定により得られた値である。これらが一般に実情から離れていることは明らかであろう。

例-2 は野外実験に関するものであり、与えられた諸条件は、

$$h_2 \rightarrow \infty, h_1 = 200 \text{ cm}, \\ U_1 = -0.00225 y^2 + 0.9 y \text{ cm/sec} \dots\dots\dots (38)$$

したがって、 $U_{10} = 90 \text{ cm/sec}$ である。考慮する界面波および計算の結果は、

L_{cm}	m	y_{cr}	U_{1c}'	c_r	c_i	mc_i	$(c_r)_{K.H.}$	$(c_i)_{K.H.}$
10	0.628	4.68	0.878	4.17	0.148	0.0931	29.7	29.7
30	0.209	8.57	0.861	7.55	0.209	0.0439	29.7	29.2
50	0.125	11.48	0.848	10.04	0.231	0.0290	29.7	28.6
100	0.0628	17.44	0.821	15.01	0.211	0.0132	29.7	27.3
150	0.0418	22.57	0.798	19.17	0.159	0.00668	29.7	25.8
200	0.0314	27.35	0.776	22.93	0.0996	0.00313	29.7	24.3

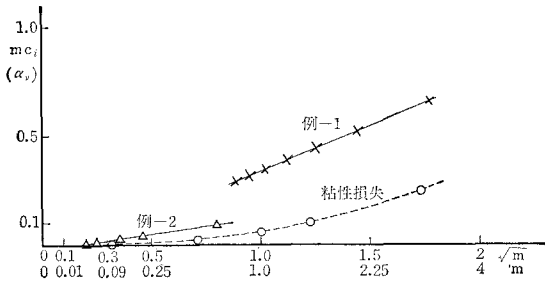
$y_{cr} \sim 0$ の間に実現させられる Reynolds 応力による不安定にもとづく内波の増幅は粘性により内部界面およびその近傍で卓越する減衰効果に打ち勝たなければ、実際の増幅現象は生じない。この場合の界面内波の減衰機構としては、参考文献 4) 式 (33) において $\alpha \simeq \frac{(-n_0)^{1/2}}{2\sqrt{2}}$

$\times k\sqrt{\nu}$ (または式 (21)) と示されているものを用い、 $\nu \approx 0.01$ と近似すれば、一般流の速度勾配に用いた α と区別するため α_v として

m	3	1.5	1.0	0.5	0.1
α_v	0.248	0.103	0.0612	0.0262	0.00353

例-1, 例-2 による mc_i および α_v を 図-1 に示している。この両例においては、一般流により生ずる不安定増幅は界面内波の粘性による減衰よりも十分大きく、 $(mc_i - \alpha_v > 0)$ 、内波は増幅されてゆく。 $\frac{1}{mc_i - \alpha_v}$ の値について考えるとき、長さ数 m の実験水路においても、内波は数十 cm の進行距離にともない大きな増幅の結果、容易に乱流混合を生じ始めるであろうことが予想せられる。

図-1



4. このようにして 2 層流の問題から、2 層の中間に混合層を生じている場合につき、検討する必要が生まれる。ここでは混合層の存在するときの内波の波速の変化につき検討する。ただし一般流は考慮しない。

つぎの 3 層を考える。

$$\left. \begin{aligned} -h_2 \leq y \leq 0 & \quad \rho = \rho_2 & \text{II 層} \\ 0 \leq y \leq y_1 & \quad \rho = \rho_2 e^{-\alpha y} \approx \rho_2 (1 - \alpha y) & \text{III 層} \\ y_1 \leq y \leq h_1 & \quad \rho = \rho_2 (1 - \alpha y_1) = \rho_1 & \text{I 層} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

αy_1 は、いま考えている問題では 0.02 の程度であるから、 $e^{-\alpha y} = 1 - \alpha y$ の近似は十分の精度をもって成立し、混合層内で密度は上方に向かい直線的に減少し、 $(-)\rho_2 \alpha$ はその勾配である。非粘性層流としての波を考え、 $y = -h_2$ および h_1 では垂直方向の運動はないものとする。 $y = 0$ の等密度面の垂直変位を $A_2 e^{i(mx - \sigma t)}$ 、 $y = y_1$ でのそれを $A_1 e^{i(mx - \sigma t)}$ とし、流関数のとり方は既述の場合と同じくして、各界面における垂直方向速度の接続を考えれば、つぎの流関数の表現を得る。

$$\text{II 層} \quad \psi_2 = \frac{-\sigma A_2}{m \sinh mh_2} \sinh m(y + h_2) e^{i(mx - \sigma t)} \dots\dots\dots (40)$$

$$\text{I 層} \quad \psi_1 = \frac{-\sigma A_2 e^{(\alpha/2)y_1}}{m \sinh m(y_1 - h_1)} \frac{\cos(\beta y_1 + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \times \sinh m(y - h_1) e^{i(mx - \sigma t)} \dots\dots\dots (41)$$

$$\text{III 層} \quad \psi_3 = -\frac{\sigma A_2}{m} e^{(\alpha/2)y} \frac{\cos(\beta y + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} e^{i(mx - \sigma t)} \dots\dots\dots (42)$$

ただし、

$$A_1 = A_2 e^{(\alpha/2)y_1} \frac{\cos(\beta y_1 + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \dots\dots\dots (43)$$

$$\beta = m \sqrt{\left(\frac{g \alpha}{\sigma^2} - 1 \right) - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{m^2}} = mX \dots\dots\dots (44)$$

$y = 0$ における界面の圧力の接続から、

$$m \coth mh_2 = \frac{\alpha}{2} - \beta \tan \varepsilon \dots\dots\dots (45)$$

$y = y_1$ における界面の圧力の接続から、

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \cos \beta y_1 - \beta \sin \beta y_1 - m \cos \beta y_1 \coth m(y_1 - h_1) \\ &= \left\{ \frac{\alpha}{2} \sin \beta y_1 + \beta \cos \beta y_1 - m \sin \beta y_1 \coth m \right. \\ & \quad \left. \times (y_1 - h_1) \right\} \tan \varepsilon \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

式 (45), (46) の両式から $\tan \varepsilon$ を消去すれば、特性方程式を得る。

ここではまず $\coth m(y_1 - h_1) \rightarrow -1$, $\coth mh_1 \rightarrow 1$ の h_1, h_2 が十分大きい場合を考える。このとき特性方程式は、

$$\begin{aligned} & (my_1 X)^2 \tan my_1 X + \frac{(\alpha y_1)^2}{4} \tan my_1 X \\ & - 2(my_1)^2 X - (my_1)^2 \tan my_1 X = 0 \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

もし my_1 がきわめて小さい場合は、 $\tan my_1 X \rightarrow my_1 X$ の近似が許容せられ、つぎの解をうる。

$$\sigma = \left(\frac{gm \alpha y_1}{2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{my_1}{2} \right) \dots\dots\dots (48)$$

すなわち波数を一定とすると、波速は減少することとなるが、この式の使用範囲は $\alpha y_1 \approx 0.02$ 程度の現在の問題で $my_1 < 0.01$ 程度と考えられ、実用上は大きな意味を持たない。式 (47) の一般解法としては Boussinesq 近似を用いて式 (47) の左辺第 2 項を無視し、また式 (44) において $\sqrt{\frac{g \alpha}{\sigma^2} - 1} = X$ とする。試算により主振動の固有値を決定し、次表の結果をうる。

$$\sigma = \left\{ \frac{gm \alpha y_1}{2} \right\}^{1/2} (1 - \delta) \dots\dots\dots (49)$$

において、

my_1	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0
δ	0.017	0.034	0.076	0.141	0.195	0.242

これから混合層の厚さが波長の $\frac{1}{10}$ を超えるようになると、波速は単純な 2 層の界面内波の場合にくらべ、相当減少することがわかる。とくに波長の短い波では注意を要する。

つぎは内波の波長が全水深 $h_1 + h_2$ に対し十分大きい場合を検討する。この場合の特性方程式は

$$-(my_1 X)^2 \tan my_1 X + (my_1 X) \frac{y_1}{h_1 - y_1}$$

$$\begin{aligned} & + (m y_1 X) \frac{y_1}{h_2} + \frac{y_1}{h_2} \frac{y_1}{h_1 - y_1} \tan m y_1 X \\ & = \left(\frac{\alpha y_1}{2} \right)^2 \tan m y_1 X + \frac{\alpha y_1}{2} \frac{y_1}{h_1 - y_1} \tan m y_1 X \\ & - \frac{\alpha y_1}{2} \frac{y_1}{h_2} \tan m y_1 X \dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

式 (50) において y_1 が非常に小さいときは、

$$\begin{aligned} c^2 = & \frac{g \alpha y_1}{\left(1 - \frac{\alpha y_1}{2}\right) \frac{1}{h_1 - y_1} + \left(1 + \frac{\alpha y_1}{2}\right) \frac{1}{h_2} + \frac{y_1}{h_1 - y_1} \frac{1}{h_2}} \\ & \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

が得られ、単純な二層水の場合の

$$\begin{aligned} c_0^2 = & \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{\frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2}} \quad (h_2 \text{ は下層水の, } h_1 \text{ は上層水} \\ & \text{の水深)} \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

に接続し、やや小さい波速が得られるが、この場合は y_1 が h_1, h_2 にくらべ非常に小さいため実用的には意味がない。必要とせられる解は式 (50) を試算により求める。

$\alpha y_1 = 0.02$ とし、 $\left(\frac{y_1}{h_2}, \frac{y_1}{h_1 - y_1}\right)$ を (0.1, 0.1),

(0.2, 0.2), (0.3, 0.3) の 3 組にとり、得られた解を $0 \sim y_1$ の中点 $\frac{y_1}{2}$ に界面を持つ単純な 2 層水 ($\rho_2 = 1.020$, $\rho_1 = 1.000$ とする) の場合の式 (52) による解と比較すれば、

組分け	(0.1, 0.1)	(0.2, 0.2)	(0.3, 0.3)
c/c_0 { $m y_1 = 0.01$	0.988	0.974	0.960
$m y_1 = 0.001$	0.989	0.974	0.960

と得られ、この場合は相当の厚さの混合層を考えても、波速はそれほど減少しないこととなる。

参 考 文 献

- 1) Lin, C.C.: Theory of hydrodynamic stability, Cambridge, 1955.
- 2) 浜田徳一・加藤 始: 二層流と波, 第 9 回海岸工学講演会講演集, 土木学会, 1962.
- 3) Miles, J.W.: On the generation of surface waves by turbulent shear flows, J. Fluid Mech., Vol. 7, 1960.
- 4) 浜田徳一: 密度流の問題—(1), 第 13 回海岸工学講演会講演集, 土木学会, 1966.