

パイルに働く波力のスペクトルの理論

——流れと波の共存する場合——

日 野 幹 雄*

要 旨 著者⁴⁾は、さきにパイルなどの海中の柱状体の受ける不規則波の波力の相関関数とスペクトルの理論を Borgman^{1),2)}とは異なる方法、すなわち特性関数法により求めた。

ここでは、さらに一様流と波との共存する一般的な場合の理論を導き、一様流の存在が波の波力を急増させることを明らかにした。

1. 序 論

われわれの海への関心が高まるにつれて、海中での構造物の建造の機会も多くなっている。海中構造物に働く波力は、力の方向が周期的に交番すること、加速度項による力が付加することなど、一様流による外力とは著しく異なっている。また、波は単純な周期力ではなく、種類の周波数成分から成っていることも、たとえば、材料の疲労の点からも考慮しなくてはならないであろう。

波のスペクトルと波力のスペクトルの関係については、1957年 Wiegel・Beebe・Moon³⁾が実験的な研究を行っており、最近では Borgman (1967)が確率理論により理論式を導いている。著者 (1968)も、通信理論の特性関数法により、不規則な波のみによる波力について理論を導いた。

こうした非線型不規則外力の問題については、著者は同じく特性関数の方法により、Reynolds 数の supercritical 領域 ($Re \cong 3.8 \times 10^5$ で抵抗係数の急減する領域)での円柱に働く力について論じたことがある。この際は、⑧ 円柱に働く抗力の実験値が supercritical region で大きくばらつく原因の一つが流れの乱れによることを示し、⑨ 円柱は普通 Karman 渦により流れと直角方向に振動するが、supercritical region では Karman 渦の発生は止む (さらに Re 数が増加し、transcritical region に入ると再び渦の発生がある)ので、抗力による特殊な流れ方向の振動が卓越する可能性があることを指摘した³⁾。

2. 理 論

(1) 波力の積分表示

流速を $V(t) = V_0 + V_N(t)$ (V_0 は一様流の流速, $V_N(t)$ は不規則成分), 加速度を $A(t)$, 柱体の径を D , 抗力係

数を C_D , 慣性力係数を C_M とすれば, 柱体の単位長さあたりの波力 $F(t)$ はつぎのように表わされる。

$$F(t) = \frac{\rho}{2} C_D D V(t) |V(t)| + \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} A(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

いま,

$$\left. \begin{aligned} C &= \rho C_D D / 2 \\ K &= \rho C_M \pi D^2 / 4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と置き、波力を,

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= F_V(t) + F_A(t) \\ F_V(V(t)) &= C V(t) |V(t)| \\ F_A(t) &= K A(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わす。

不規則波の波力を論ずる場合に、とくに問題となるのは非線型部分 $F_V(V)$ であるので、まずこの項について述べる。この $F_V(V)$ は、つぎのような2つの関数 $F_{V+}(V)$ と $F_{V-}(V)$ の和と考える。

$$F_V(V(t)) = F_{V+}(V(t)) + F_{V-}(V(t)) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$F_{V+}(V) \begin{cases} = C V^n & (V \geq 0) \\ = 0 & (V < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$F_{V-}(V) \begin{cases} = 0 & (V > 0) \\ = -C(-V)^n & (V \leq 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

関数 F_{V+} , F_{V-} は、それぞれつぎのように unilateral Laplace 変換が可能である。

$$\begin{aligned} f_+(iu) &= \int_0^\infty F_{V+}(V) e^{-iuV} dV \\ &= C \int_0^\infty V^n e^{-iuV} dV \\ &= C \Gamma(n+1) / (iu)^{n+1} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_-(iu) &= \int_{-\infty}^0 F_{V-}(V) e^{-iuV} dV \\ &= -f_+(-iu) \\ &= -C \Gamma(n+1) / (-iu)^{n+1} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

波力の問題では、上式の n は $n=2$ とすればよい。

式 (7), (8) の逆変換により、波力の非線型部分 $F_V \cdot (V(t))$ を、つぎのように積分表示をすることができる。

$$\begin{aligned} F_V(V(t)) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{C_+} f_+(iu) e^{iuV} dV \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_-} f_-(iu) e^{iuV} dV \right] \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、積分路 C_+ , C_- はそれぞれ実軸を $-\infty$ から

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 土木工学科

図-1 Non-linear filter of waveform.

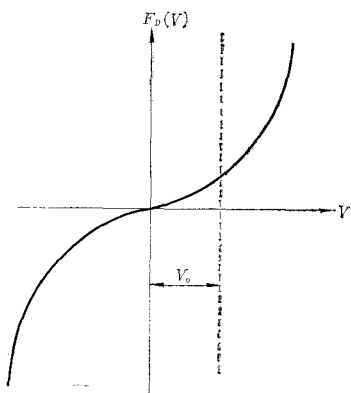
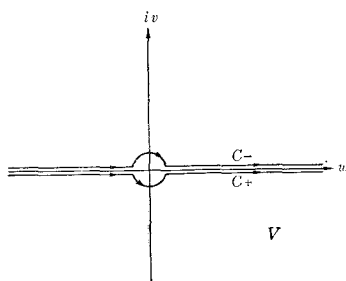


図-2 Pass of integration.



$+\infty$ に向かい、原点で反時計まわり、または時計まわりに半周するものである(図-2)。

加速度項 $KA(t)$ も、同様に unilateral Laplace 変換により

$$\left. \begin{aligned} a_+(iu) &= \int_0^{\infty} KA(t)e^{-iuA}dA = K/(iu)^2 \\ a_-(iu) &= \int_{-\infty}^0 KA(t)e^{-iuA}dA = -K/(iu)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

と表わせるから、結局、波力の積分表示として、次式を得る。

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{C_+} \{f_+(iu)e^{iuV(t)} + a_+(iu)e^{iuA(t)}\} du \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_-} \{f_-(iu)e^{iuV(t)} + a_-(iu)e^{iuA(t)}\} du \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(11)$$

このように積分表示をすれば、 $V(t)|V(t)|$ という V に関する非線型項が直接表われなくなって、以下の式の展開がしやすくなる。

(2) 波力の相関関数

波力 $F(t)$ のスペクトルを求めるに先立って、相関関数 $\Psi(\tau)$ を求めよう。

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \overline{F(t)F(t+\tau)} \\ &= \overline{\{F_V(t) + F_A(t)\} \{F_V(t+\tau) + F_A(t+\tau)\}} \\ &= \Psi_{VV}(\tau) + \Psi_{VA}(\tau) + \Psi_{AV}(\tau) + \Psi_{AA}(\tau) \end{aligned} \dots\dots\dots(12)$$

まず、 $\Psi_{VV}(\tau)$ の式を導こう。

$$\begin{aligned} \Psi_{VV}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F_V(t)F_V(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T}^T dt \left[\int_{C_+} f_+(iu)e^{iuV(t)}du \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_-} f_-(iu)e^{iuV(t)}du \right] \\ &\quad \times \left[\int_{C_+} f_+(iv)e^{iuV(t+\tau)}dv \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_-} f_-(iv)e^{iuV(t+\tau)}dv \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{C_+} f_+(iu)du + \int_{C_-} f_-(iu)du \right] \\ &\quad \times \left[\int_{C_+} f_+(iv)dv + \int_{C_-} f_-(iv)dv \right] \\ &\quad \times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp[iuV(t) + ivV(t+\tau)]dt \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

式(13)の右辺の最後の項は、特性関数(characteristic function)であり、つぎのようになる⁵⁾。

波の流速 $V_N(t)$ が Gauss 分布の不規則変動であれば、

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp[iuV_N(t) + ivV_N(t+\tau)]dt \\ = \text{average} \exp[iuV_N(t) + ivV_N(t+\tau)] \\ = \exp \left[-\frac{\varphi_0}{2} (u^2 + v^2) - \varphi_\tau uv \right] \end{aligned}$$

であり、一様流速成分 V_0 については、

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp[iuV_0 + ivV_0]dt \\ = \exp[iV_0(u+v)] \end{aligned}$$

であるから、特性関数 $g_V(u, v, \tau)$ は、

$$\begin{aligned} g_V(u, v, \tau) \\ = \exp \left[iV_0(u+v) - \frac{\varphi_0}{2} (u^2 + v^2) - \varphi_\tau uv \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

となる。ここに、 φ_τ は $V_N(t)$ の自己相関関数

$$\varphi_\tau = \overline{V_N(t)V_N(t+\tau)} \dots\dots\dots(15)$$

であり、 φ_0 は

$$\varphi_0 = [\varphi_\tau]_{\tau=0} \dots\dots\dots(16)$$

を表わす。結局、 $\Psi_{VV}(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \Psi_{VV}(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_{C_+} f_+(iu)du + \int_{C_-} f_-(iu)du \right] \\ &\quad \times \left[\int_{C_+} f_+(iv)dv + \int_{C_-} f_-(iv)dv \right] \\ &\quad \times \exp \left[iV_0(u+v) - \frac{\varphi_0}{2} (u^2 + v^2) - \varphi_\tau uv \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(17)$$

となる。

式(17)を u, v についてそれぞれ積分しうるように $\exp[-\varphi_\tau uv]$ を Taylor 級数に展開し、

$$\exp[-\varphi_r uv] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\varphi_r uv)^k / k! \dots\dots\dots (18)$$

これを式 (17) に代入すれば、 $\Psi_{VV}(\tau)$ はつぎのようになる。

$$\Psi_{VV}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} (\varphi_r)^k \dots\dots\dots (19)$$

ここに、

$$\alpha_k = \frac{(i)^k}{2\pi} \left[\int_{C_+} f_+(iu) u^k \exp \left\{ iV_0 u - \frac{\varphi_0}{2} u^2 \right\} du \right. \\ \left. + \int_{C_-} f_-(iu) u^k \exp \left\{ iV_0 u - \frac{\varphi_0}{2} u^2 \right\} du \right] \dots\dots\dots (20)$$

$\tau \rightarrow \infty$ では、 $\varphi_r \rightarrow 0$ であるから、流れと波による平均の力は、式 (19) より、

$$\bar{F} = [\Psi_{VV}(\infty)]^{1/2} = \alpha_0 \dots\dots\dots (21)$$

式 (20)、(21) に式 (7)、(8) を代入すれば、 α_k はつぎのようになる。

$$\alpha_k = \frac{C\Gamma(n+1)}{2\pi} \left[\int_{-\infty-i\delta, C_+}^{\infty-i\delta} (iu)^{k-n-1} \right]$$

$$\alpha_k = \frac{C\Gamma(n+1)}{2\pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}i} \right)^{k-n-1} \left(\frac{2}{\sqrt{\varphi_0}} \right)^{k-n} \left[\int_{C_+} t^{k-n-1} \cdot e^{-2t^2+2i\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}}t} dt + (-1)^{k+1} \int_{C_+} t^{k-n-1} \cdot e^{-2t^2-2i\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}}t} dt \right] \\ = \frac{C\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varphi_0}} \right)^{k-n} e^{-\frac{V_0^2}{4\varphi_0}} \left[\frac{2^{k-n-1+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(e^{\frac{\pi i}{2}} \right)^{k-n-1} \cdot e^{\frac{V_0^2}{4\varphi_0}} \right. \\ \left. \times \left\{ \int_{C_+} t^{k-n-1} \cdot e^{-2t^2+2i\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}}t} dt + (-1)^{k+1} \int_{C_+} t^{k-n-1} \cdot e^{-2t^2-2i\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}}t} dt \right\} \right] \\ = \frac{C\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}} \varphi_0^{-\frac{n-k}{2}} e^{-\frac{V_0^2}{4\varphi_0}} \left[D_{k-n-1} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) + (-1)^{k+1} D_{k-n-1} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) \right] \dots\dots\dots (24)$$

上式の右辺の $D_{k-n-1} \left(\mp \frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right)$ は、Weber 関数

$$D_\lambda(z) = \frac{2^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda\frac{\pi i}{2}} e^{\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty, C_+}^{\infty} e^{-2t^2-2izt} t^\lambda dt \\ [\Re(\lambda) > -1] \dots\dots\dots (25)$$

である。ただし、 λ, z はそれぞれ式 (26) のようである。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= k-n-1 \\ z &= \mp V_0/\sqrt{\varphi_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

また、Weber 関数は、合流型超幾何関数 (Kummer の関数) $F(\alpha, r; z)$ を用いて

$$D_\lambda(z) = 2^{1/2} \sqrt{\pi} e^{-z^2/4} \\ \times \left[\frac{1}{\Gamma((1-\lambda)/2)} F \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}z}{\Gamma(-\lambda/2)} F \left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} \right) \right] \dots\dots\dots (27)$$

と表わされる。ここに、

$$F(\alpha, r; z) = \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(r+n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \dots\dots\dots (28)$$

式 (25) における $(\Re(\lambda) > -1)$ は積分表示のための制約であって、式 (27) の表示による解析接続の理論に

$$\times \exp \left\{ iV_0 u - \frac{\varphi_0}{2} u^2 \right\} du \\ + (-1)^{k+1} \int_{-\infty+i\delta, C_-}^{\infty+i\delta} (-iu)^{k-n-1} \\ \times \exp \left\{ iV_0 u - \frac{\varphi_0}{2} u^2 \right\} du \dots\dots\dots (22)$$

$u' = -u$ とおけば、上式右辺の 2 つの積分路を C_+ に共通にすることができ、

$$\alpha_k = \frac{C\Gamma(n+1)}{2\pi} \left[\int_{-\infty-i\delta, C_+}^{\infty-i\delta} (iu)^{k-n-1} \right. \\ \times \exp \left\{ iV_0 u - \frac{\varphi_0}{2} u^2 \right\} du \\ \left. + (-1)^{k+1} \int_{-\infty-i\delta, C_+}^{\infty+i\delta} (iu')^{k-n-1} \right. \\ \times \exp \left\{ -iV_0 u' - \frac{\varphi_0}{2} u'^2 \right\} du' \dots\dots\dots (23)$$

さて、上式において、

$$\frac{\varphi_0}{2} u^2 = 2t^2, \quad u = 2t/\sqrt{\varphi_0}$$

の変換を行なえば、

より、この制約は不要となる。

Weber 関数は、さらに λ が 0 または正の整数 m ならば、Hermite の多項式と関係づけられる。

$$D_m(z) = e^{-z^2/4} H_m(z) = (-1)^m e^{z^2/4} d^m (e^{-z^2/2}) / dz^m \\ = e^{-z^2/4} \sum_{r=0}^{[m/2]} (-1)^r (2r-1)!! \binom{m}{2r} z^{m-2r} \\ = e^{-z^2/4} \left[z^m - \binom{m}{2} z^{m-2} + 3 \binom{m}{4} z^{m-4} + \dots \right. \\ \left. + \begin{cases} (-1)^{m/2} (m-1)!! & (m: \text{偶数}) \\ (-1)^{(m-1)/2} m!! z & (m: \text{奇数}) \end{cases} \right]$$

ここに、 $m!! = m(m-2)(m-4) \dots\dots\dots (29)$

m が -1 の場合は、

$$D_{-1}(z) = \sqrt{2\pi} e^{z^2/4} [1 - \Phi(z)] \quad \text{あるいは} \quad D_{-1}(z) \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{z^2/4} \left\{ 1 - \bar{\Phi} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right\} \dots\dots\dots (30a)$$

また、 m が -2 などの場合には、漸化式

$$D_{\lambda+1}(z) - zD_\lambda(z) + \lambda D_{\lambda-1}(z) = 0$$

により、

$$D_{-2}(z) = e^{z^2/4} [e^{-z^2/2} - \sqrt{2\pi} z \{1 - \Phi(z)\}]$$

あるいは

$$D_{-2}(z) = e^{z^2/4} \left[e^{-z^2/2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} z \left\{ 1 - \bar{\Phi} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (30b)$$

ここに,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt, \quad \bar{\Phi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

.....(31)

加速度項の相関 ψ_{AA} は, 上の諸式において, $n=1$, $V_0=0$ とし, また加速度は,

$$A(t) = dV(t)/dt$$

であるから, 加速度の相関 $\varphi_{A,\tau} = \overline{A(t)A(t+\tau)}$ が

$$\begin{aligned} \varphi_{A,\tau} &= \int_0^T V'(t+\tau) V'(t) dt \\ &= \int_0^T V'(t+\tau) dV(t) = [V'(t+\tau) V(t)]_0^T \\ &\quad - \int_0^T V''(t+\tau) V(t) dt \end{aligned}$$

と書け, $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}$ をとれば,

$$\varphi_{A,\tau} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi(\tau) = -\varphi''(\tau)$$

であって, $V(t)$ について導かれた諸式に $\varphi_\tau \rightarrow -\varphi_\tau''$, $\varphi_0 \rightarrow -\varphi_0''$ とおけばよい。

また, $\psi_{AV} \cdot \psi_{VA}$ は前報告⁴⁾ においてくわしく計算したように 0 となる。

結局, 波力スペクトル $\Psi(\tau)$ は, つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} (\varphi_\tau)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{k!} (-\varphi_\tau'')^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} (\varphi_\tau)^k - K^2 \varphi_\tau'' \quad \text{.....(32)} \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi_0^{(2-k)/2} \cdot \exp(-V_0^2/4 \varphi_0) \\ &\quad \times \left[D_{k-3} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) + (-1)^{k+1} D_{k-3} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) \right] \end{aligned}$$

であるが; $k=2m+3$ (奇数) とすれば, 式 (29) より

$$D_{2m} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) = D_{2m} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right)$$

また, $k=2m+4$ (偶数) ならば,

$$D_{2m+1} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) = -D_{2m+1} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right)$$

であるから,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= (-1)^{k+1} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} C \varphi_0^{(2-k)/2} \cdot \exp \left(-\frac{V_0^2}{4 \varphi_0} \right) \\ &\quad \times D_{k-3} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) \quad (k \geq 3) \\ \alpha_2 &= 2 C \bar{\Phi} \left(\frac{V_0}{\sqrt{2 \varphi_0}} \right) = \frac{4 C}{\sqrt{\pi}} \int_0^{V_0/\sqrt{2 \varphi_0}} e^{-t^2} dt \\ \alpha_1 &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} C \varphi_0^{1/2} \\ &\quad \times \left[e^{-V_0^2/2 \varphi_0} + \frac{2 V_0}{\sqrt{2 \varphi_0}} \int_0^{V_0/\sqrt{2 \varphi_0}} e^{-t^2} dt \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(33 a)}$$

また,

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{K}{\sqrt{2 \pi}} (-\varphi_0'')^{(1-k)/2} \\ &\quad \times [D_{k-2}(0) + (-1)^{k+1} D_{k-2}(0)] = \begin{cases} K & (k=1) \\ 0 & (k \neq 1) \end{cases} \\ &\quad \text{.....(33 b)} \end{aligned}$$

V_0 = 一様流の流速

φ_0 = 波による流速変動の mean square (= σ_V^2)

φ_τ = 流速変動の相関関数 (= $\overline{V_N(t) V_N(t+\tau)}$)

(加速度による相関が $k=1$ 以外では 0 (すなわち $\beta_k=0$) となることは, わざわざ式を展開するまでもなく, 当然のことである。)

(3) 平均波力および波力の r.m.s.

波力変動の平均は, 前節において求めた波力の相関関数の表式中で $\tau \rightarrow \infty$ の時の値, すなわち, 式 (32) の $k=0$ に対応する項であって, $\bar{F} = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}$ と表わされるが, $\beta_0=0$ となるので, 結局平均波力 $\bar{F}$ は式 (35) のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \alpha_0 \\ &= C \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi_0 \cdot \exp(-V_0^2/4 \varphi_0) \\ &\quad \times \left[D_{-3} \left(-\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) - D_{-3} \left(\frac{V_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right) \right] \\ &= C \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (V_0^2 + \varphi_0) \int_0^{V_0/\sqrt{2 \varphi_0}} e^{-t^2} dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2 \varphi_0} V_0}{\sqrt{\pi}} e^{-V_0^2/2 \varphi_0} \right] \quad \text{.....(34)} \end{aligned}$$

上式において, $\varphi_0=0$ で一様流のみにより抗力が働く場合には,

$$\bar{F} = C V_0^2$$

であり, $V_0=0$ すなわち波のみの場合には

$$\bar{F} = 0$$

である。

また, 波力の r.m.s., σ_F は,

$$\sigma_F = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{k!} \varphi_0^k - K^2 \varphi_0'' \right]^{1/2} \quad \text{.....(35)}$$

である。

(4) 波力のスペクトル

波力のスペクトル $S_F(f)$ と波力の相関関数は互いに Fourier 変換の関係により,

$$\begin{aligned} S_F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{-i 2 \pi f \tau} d\tau \\ &= 2 \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \cos 2 \pi f \tau d\tau \quad \text{.....(36 a)} \end{aligned}$$

$$\Psi(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_F(f) \cos 2 \pi f \tau df \quad \text{.....(36 b)}$$

と書き表わされる。

上式に式 (32) の関係を代入すれば,

$$S_F(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \alpha_k^2}{k!} \int_0^{\infty} (\varphi_\tau)^k \cos 2 \pi f \tau d\tau \right]$$

$$-2K^2 \int_0^\infty \varphi_\tau'' \cos 2\pi f \tau d\tau \dots (37)$$

式 (36b) で $\psi \rightarrow \varphi_V$, $S_F \rightarrow S_V$ としての τ に関する微分から

$$\varphi_\tau'' = - \int_0^\infty 8(\pi f)^2 S_V(f) \cos 2\pi f \tau d\tau$$

となり, 逆に,

$$-2 \int_0^\infty \varphi_\tau'' \cos 2\pi f \tau d\tau = (2\pi f)^2 S_V \dots (38)$$

となる。

他方,

$$2 \int_0^\infty \varphi_\tau \cos 2\pi f d\tau = S_V(f) \dots (39)$$

より,

$$\begin{aligned} S_V^2(f) &= 2 \int_0^\infty (\varphi_\tau)^2 \cos 2\pi f \tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty S_V(x) S_V(f-x) dx \dots (40) \end{aligned}$$

一般には,

$$\begin{aligned} S_V^{(k)}(f) &= 2 \int_0^\infty (\varphi_\tau)^k \cos 2\pi f \tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty S_V(f-x) S_V^{(k-1)}(x) dx \dots (41) \end{aligned}$$

であるから, 流速変動のスペクトル $S_V(f)$ が知られているときには, $\int_0^\infty (\varphi_\tau)^k \cos 2\pi f \tau d\tau$ を漸次求めることができる。

一方, 流速変動のスペクトル $S_V(f)$ と波高スペクトル $S_\eta(f)$ の間には式 (42) の関係がある。

$$S_V(f) = \left[\frac{(2\pi f)^2 \cosh^2 \kappa z}{\sinh^2 \kappa d} \right] S_\eta(f) \dots (42)$$

ここに, κ は波数を表わし,

$$(2\pi f)^2 = g \kappa \tanh \kappa d \dots (43)$$

また, 加速度のスペクトル $S_A(f)$ は, 式 (38), (42) より

$$\begin{aligned} S_A(f) &= -2 \int_0^\infty \varphi_\tau'' \cos 2\pi f \tau d\tau \\ &= \left[\frac{(2\pi f)^4 \cosh^2 \kappa z}{\sinh^2 \kappa d} \right] S_\eta(f) \dots (44) \end{aligned}$$

と表わされる。

したがって, 波力スペクトルはつぎのようになる。

$$\begin{aligned} S_F(f) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k^2}{k!} S_V^{(k)}(f) \\ &+ K^2 \left[\frac{(2\pi f)^4 \cosh^2 \kappa z}{\sinh^2 \kappa d} \right] S_\eta(f) \dots (45) \end{aligned}$$

3. 二, 三の数値的検討

波力のスペクトルは, 式 (45) と (33), (40), (41) により与えられる。

流れがない場合には, α_k は k が偶数のときは 0 であって, $k=1, 3, 5, \dots$ のみ採ればよかったが, $V_0 \neq 0$ の場合にはすべての α_k を考慮しなければならない。

また, 式 (45) の $k=1$ に関する一項のみをとる場合でも,

$$\begin{aligned} S_F(f) &\cong \left[\frac{8C^2}{\pi} \varphi_0 f_s \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}\varphi_0} \right) + (2\pi fK)^2 + \dots \right] \\ &\times S_V(f) \dots (46) \end{aligned}$$

ここに,

$$f_s \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = \left[e^{-x^2/2} + \sqrt{2}x \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \right]^2 \dots (47)$$

であって, 一様流 V_0 の影響を考慮する必要がある。

図-3 Magnification factor of the wave force spectrum by the interaction of waves with a current.

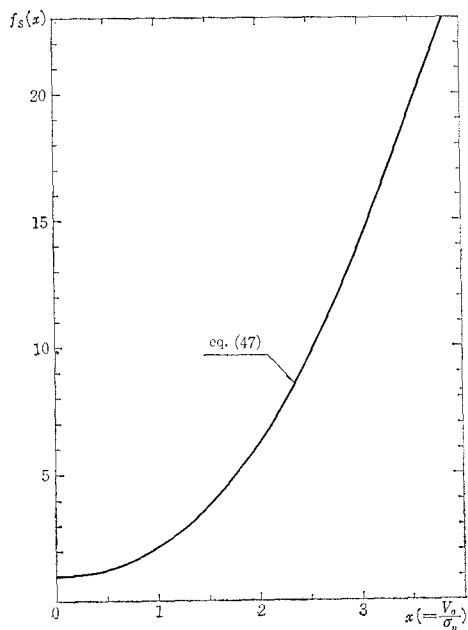


図-4 Magnification factor of mean drag force on a pile ($\bar{F}$) v.s. $x \left(= \frac{V_0}{\sigma_v} \right)$ or $\frac{1}{x} \left(= \frac{\sigma_v}{V_0} \right)$ due to the wave action. (σ_v = r.m.s. of the velocity of orbital motion of waves)

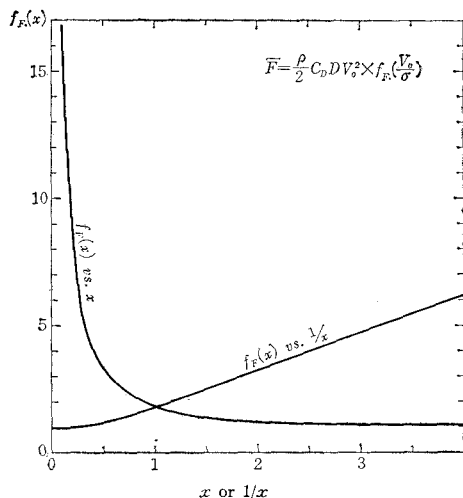


図-3 は, $f_n(x)$ の曲線を示す。この図によれば, 一様流の流速と波の変動流速の r.m.s($=\sqrt{\varphi_0}=\sigma_V$) の比 $V_0/\sqrt{\varphi_0}$ が大きくなるにつれて, 流れと波の相関作用による波力スペクトルが急激に大きくなる。

また, 平均波力 $\bar{F}$ は, 式 (34) より

$$\bar{F} = CV_0^2 \times f_F\left(\frac{V_0}{\sqrt{2}\varphi_0}\right) \dots\dots\dots (48)$$

$$f_F(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x} e^{-x^2/2} \dots\dots\dots (49)$$

である。図-4 は $\bar{F}$ v.s. $x = V_0/\sqrt{\varphi_0}$ または $y = \sqrt{\varphi_0}/V_0$ の関係を示す。やはり, 流れに波が加わることにより, パイルにかかる平均の抗力が急激に増加することがわかる。

4. む す び

波による波力に関する前報告の延長として, 流れと波が共存する場合のパイルに働く波力の問題(平均波力, 波力スペクトル, 波力の相関関数)を特性関数法により

論じ, 理論式を導いた。

この結果, 流れと波が共存する場合には, パイルに働く平均の波力や波力スペクトルは, どちらか一つのみによる値より急激に増大することが明らかにされた。

参 考 文 献

- 1) Borgman, L.E. (1967) : Random hydrodynamic forces on objects, *Annals of Mathematical Statistics*, 37-51.
- 2) Borgman, L.E. (1967) : Spectral analysis of ocean wave forces on piling, *J. of the Waterways and Harbors Div., Proc. ASCE*, vol. 93, No. WW 2, 129-156.
- 3) 日野幹雄 (1965) : Hydroelastic random vibration of a circular cylinder at high Reynolds numbers, *Proc. 11th Conference of IAHR, Leningrad*. (または, 大きなレイノルズ数域における円柱の水力弾性振動, 第9回水理講演会講演集, 25-30.)
- 4) 日野幹雄(1968) : 柱体に働く不規則波の波力-(1), 東京工業大学土木工学科 研究報告 No. 4, 35-44.
- 5) Rice, S.O. (1945) : Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, vol. 23, 283; vol. 24, 46.
- 6) Wiegel, R.L., Beebe, K.E. & Moon, J. (1957) : Ocean wave forces on circular cylindrical piles, *J. Hydraulic Div., Proc. ASCE*, vol. 83, No. HY 2.