

波 動 に よ る 球 の 振 動

椎 貝 博 美*・河 野 二 夫**

1. 概 説

海底に設置された構造物が波動によってどのような影響を受けるかといった問題は学問的にも実際のにも興味あることである。もっと抽象的に流体が波動運動をしているとき、物体におよぼす力の推定といったことなどは興味のある問題であるといえよう。

本文は以上のような問題について実験を行ない、また一部理論的な考察を加えたものである。構造物の形式としては海中構造物の一つの可能な形と考えられる球をえらびこれについて実験を行なった。図-1、図-2 に示すように隣青銅の板ばねに球を取り付け、これを造波水路底に固定して表面波を与えた時の球の振動を観測したものである。このような構造物の具体的な一例として球

図-1

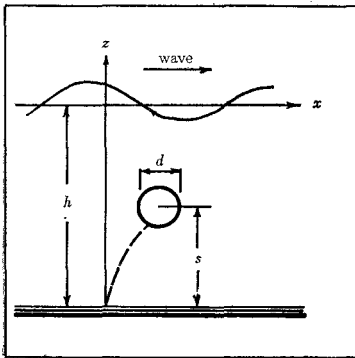
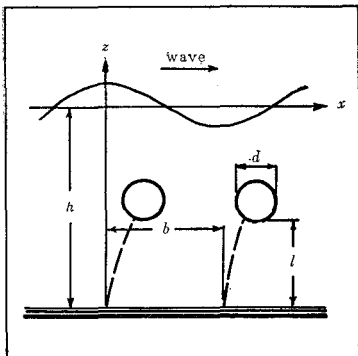


図-2



形の海中石油タンクを予想している。

さて実験の結果得られた特徴的な現象としては波の進行方向とそれに直角方向にかなり規則的な正弦波に近い振動が発生していることである。これに近い現象は流れの中におかれた円柱のまわりの二次元的な流れにおける Kármán 渦による振動があるが、これについてはかなりの解明がなされていることはいうまでもない。本研究のような波動による三次元の振動問題は非常にむずかしい問題であると考えられる。

筆者らが図-1 に示したモデルを開水路に設置して定常流による状況を観察したところ、Kármán 渦に類似した、すなわち球の後に左右交互の渦が発生しているようである。また東工大にあるプラスチック製水槽の中で球を自然落下した時の球の運動では球はらせん状に落下して行くことが判明した。以上の観測結果と本論文のような波動の中での球の振動が直接結びつくかはわからないが、何らかの関連性があるのではないかと考えられる。さて上述のように波の進行方向に直角な方向の水平振動があることがわかったので、本文では説明の便宜上これを Y 方向の振動とよぶこととし、また波の進行方向の水平振動を X 方向の振動とよぶことにする。

このほかにも鉛直方向の振動が生じうが、本論文ではこれには触れないことにする。

2. 実験装置および実験方法

(1) 実験装置

実験に用いた水路は二次元造波水路で水路幅 0.6 m, 水路長約 11 m, 高さ 1 m のもので水路の半分は両面ガラス張りのもので実験の現象が観測できるようになってゐる。

造波板は flap-type のもので約 24 c.p.m~90 c.p.m の回転が可能である。つぎに実験に使用した球はプラスチック製品（セルロイドおよび塩化ビニール）であり、板ばねは隣青銅である。表-1 には実験に使用した板ばねや、球および波の諸元を示す。

本文の図面などの説明では特につけ加える必要のない限り表-1 の実験番号によって記号を表示してある。

(2) 測定方法

振動の測定には板ばねの両側面に strain gage (PL-5 type) をはりつけ防水のために gage の面をアルルダイ

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 土木工学科

** 正会員 東京工業大学助 手 土木工学科

表—1 板ばね球および波の諸元

No.	振子の種類									波の特性			摘要
	球径 <i>d</i> (cm)	球の質量 <i>m</i> (g)	球の仮想質量 <i>m'</i> (g)	板ばねの厚さ (mm)	板ばねの長さ <i>l</i> (cm)	板ばねの幅 <i>b</i> (cm)	板ばねの定数 <i>k</i> (dyn/cm)	固有角振動数 (水中) ω_0 (rad/sec)	減衰係数 <i>c</i> (g/sec)	周期 <i>T</i> (sec)	波高 <i>H</i> (cm)	波形勾配 <i>H/L</i>	水路水深 <i>h</i> (cm)
1	3.75	2.47	13.8	0.2	5.2	0.9	1.54×10^4	28.2	50.7	0.68 ~2.2	2.8 ~1.45	0.12 ~0.008	35
2	3.75	24.4	13.8	0.2	5.2	0.9	7.18×10^4	16.57	75.8	0.64 ~1.7	2.5~8.4	0.009 ~0.11	30
3	5.84	92.5	53	0.5	5.35	0.95	6.57×10^4	24.1	303	0.63 ~1.8	0.9 ~10.2	0.003 ~0.1	30
4	5.84	17.53	53	0.4	9	0.95	0.66×10^4	15.5	119	0.65 ~2.3	1.2~8	0.003 ~0.077	30
5	5.84	17.53	53	0.4	9	0.95	0.66×10^4	15.5	119	0.62 ~1.75	3.7~14	0.013 ~0.123	40
6(A)	5.84	17.53	53	0.4	9	0.9	0.98×10^4	16.5	233	0.61 ~2.1	1~12	0.0024 ~0.114	30
6(B)	5.84	17.53	53	0.4	9	0.9	0.853×10^4	15.5	119	0.61 ~2.1	1~12	0.0024 ~0.114	30

注 実験 No. 1~No. 5 は振子を 1 個おいた場合であるが No. 6 は振子を 2 個並べておいた場合である。また 6(A) は上流側の振子を示し、6(B) は下流側の振子を示す。また No. 6 の (A), (B) の間隔は 12 cm である。

トでコーティングした。これをトランスデューサーとして板ばねの変位を直流増幅器によってビジグラフに記録させる。また抵抗線式波高計によって波高を同時に測定した。ばねは一方方向にしかたわまないの で *X* 方向と *Y* 方向の測定は別々に行なった。このように自由度を規定したことによる影響はある程度存在すると思われるが、本論文においては考慮してはいない。

3. 理論的考察

流体の媒介による構造物の作用について Allen T. Hjelmfelt ら¹⁾ はつぎの 3 つの関係をあげている。第 1 に構造物のまわりのある流体は構造物の運動によって運動する。すなわち付加質量の作用である。第 2 に流体の粘性抵抗によって系の dynamic な応答が影響される。すなわち粘性抵抗の作用である。第 3 に構造物の運動によっておこる流体運動は構造物と流体の流れの相互作用に影響される。以上の 3 つの要素の中で第 3 の要素が最も重要であると述べているが、筆者らは 3. (1) に述べるように流体の作用として線形部分の流体抵抗と非線形部分の流体抵抗を考慮した方程式を解くことにする。

(1) 一般式

線形な減衰抵抗をもった振動系に外力が作用する場合の振動方程式はたとえば *X* 方向で考えると式 (1) で与えられる。

$$\ddot{x} + 2q\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m+m'} \{P(t)\} + \frac{1}{(m+m')} \{F(t)\} \dots\dots (1)$$

ここに *m*: 球の質量, *m'*: 付加質量, $2q=c/(m+m')$, *c*: 減衰係数, ω_0 : ばねの固有角振動数, $\omega_0^2=R/(m+m')$, *R*: ばね定数, $\ddot{x}$, $\dot{x}$: おのおのの時間についての 2 回および 1 回微分, *P*(*t*): 物体に作用する外力, *F*(*t*): 流体抵抗である。式 (1) の左辺第 2 項と右辺第 2 項は同じく抵

抗を示すが、前者は抵抗のうちの線形部分をあらわすのに対し後者は振動体と流体間の相対速度の自乗に比例するような非線形部分をあらわす。したがって右辺第 2 項は流体の粒子速度を *u*, 比例定数を ϵ として式 (1) を書きかえると式 (2) になる。

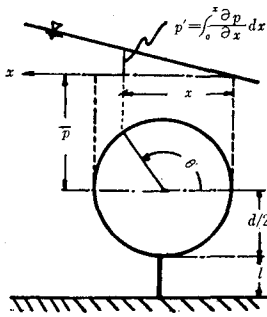
$$\ddot{x} + 2q\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m+m'} \{P(t)\} \pm \epsilon(\dot{x}+u)^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここで右辺第 2 項の±の符号は $\dot{x}+u > 0$ のとき負、 $\dot{x}+u < 0$ のとき正である。

(2) *X* 方向の振動方程式の解

式 (2) で外力 *P*(*t*) と流体の粒子速度 *u* が与えられれば解は得られる。いま外力として波動による水面変動を考えた場合の球の中心位置 $\{x=-(h-l-d/2)\}$ における水圧を球の全表面積について積分した値が球に作用する外力と仮定する。ここで *z* は静水面にとった上向きの鉛直座標である。また *u* は波の粒子速度の水平方向の成分をとるものとする。図-3 で *x*=0 の点の圧力を $\bar{p}(t)$ とすると *x* 点の圧力は $p(t)=\bar{p}(t)+p'(t)$ である。 $P'=\int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx$ であるから *p*(*t*) を球の全表面積について積分した時の全圧力を *p*(*t*) とすると *p*(*t*) は、

図-3 説明図



$$P(t) = \int_S p ds = \int_S \bar{p} ds + \int_S p' ds = \int_S \int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx ds \dots \dots \dots (3)$$

式 (3) で S は球の表面積を示す。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\rho g H}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \cdot \frac{2\pi}{L} \times \cos \left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t \right) \dots \dots \dots (4)$$

式 (4) で ϕ : 波の速度ポテンシャル, ρ : 水の密度, T : 波の周期, L : 波長, h : 水路水深である。

式 (4) を式 (3) に代入して積分すると,

$$P(t) = \frac{\rho g H}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \int_S \left(\sin \frac{2\pi}{L}x \cdot \cos \frac{2\pi}{T}t - \cos \frac{2\pi}{L}x \sin \frac{2\pi}{T}t + \sin \frac{2\pi}{T}t \right) ds \dots \dots \dots (5)$$

式 (5) で $x = (d/2)(1 - \cos \theta)$, また球の直径は波長に比べて小さいとすれば $\sin(2\pi/L)x \approx (2\pi/L)x$, $\cos(2\pi/L)x \approx 1$ とおくと,

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\rho g H}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \int_0^\pi \left\{ \cos \frac{2\pi}{T}t \cdot \frac{2\pi}{L}(1 - \cos \theta) \frac{d}{2} \right\} \times \frac{d}{2} \cdot d\theta \cdot \cos \theta \cdot \frac{d}{2} \sin \theta \cdot 2\pi \\ &= -\frac{\rho g H d^3 \pi^2}{6L} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \cdot \cos \frac{2\pi}{T}t \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

または

$$P(t) = \frac{1}{3} \rho \pi^3 \cdot d^3 \cdot \frac{H}{T^2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (7)$$

また球の密度を σ とすると球の質量は $m = (\pi/6)d^3\sigma$ となる。さらに仮想質量はほぼ理論値に等しく, $m' = (\pi/12)d^3\rho$ とすると, $m + m' = ((\pi/6)\sigma + (\pi/12)\rho)d^3$ である。

これを式 (6) に代入して d を消去すると,

$$\frac{P(t)}{(m+m')g} = -\pi \cdot \frac{H}{L} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \cdot \frac{1}{(\sigma/\rho + 0.5)} \cos \frac{2\pi}{T}t \dots \dots \dots (8)$$

つぎに式 (2) の右辺第 2 項は流体の速度成分に波の x 方向の水分子速度をとれば式 (9) になる。

$$\varepsilon(\dot{x} + u)^2 = \varepsilon \left\{ \dot{x} + \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 \dots \dots \dots (9)$$

ここで, $\varepsilon = \frac{c_D \cdot \rho \cdot d^2 \pi}{8(m+m')}$, c_D : 抵抗係数である。

さて以上の方程式においては波動を二次元的に考え, また球に作用する外力は三次元的な取扱いをしていることになるが, これは球が水中の十分深い所に設置され, 球によって波のポテンシャルが影響を受けないと仮定したことになる。式 (2) の型の方程式はすでに解かれているので本文ではその結果だけを示す。ただし摂動法によった。

① $\varepsilon = 0$ の場合

強制振動についての解は式 (2) と式 (7) により式 (10) になる。

$$\left. \begin{aligned} x &= A_0 \sin(\omega t + \beta) \\ A_0 &= \frac{\rho \pi H d^3 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{12(m+m') \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{c\omega}{\omega_0^2} \frac{1}{m+m'} \right)^2} \sinh \frac{2\pi}{L}h} \\ \tan \beta &= \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\frac{c\omega}{\omega_0^2(m+m')}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

増幅率を M とすると

$$M=\frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{c\omega}{\omega_0(m+m')}\right)^2}}\cdots\cdots\cdots(11)$$

② $\varepsilon\neq 0$ の解

$\varepsilon\neq 0$ の解の第 1 近似の解を x_1 とおくと式 (2), (9), (10) によって式 (12), (13) になる。

$$\begin{aligned} \varepsilon x_1 = & \frac{\rho c_D \cdot d^2 \frac{c}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 A_0}{6(m+m')^2 \left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left\{\frac{c}{\omega_0(m+m')}\right\}^2 \right]} \cos(\omega t - \tau) \\ & - \frac{\rho c_D \cdot d^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) A_0}{6(m+m') \left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left\{\frac{c}{\omega_0(m+m')}\right\}^2 \right]} \sin(\omega t - \tau) \\ & + \frac{\rho c_D \cdot d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1-\left(\frac{3\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 A_0}{2 \cdot 430(m+m') \left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left\{\frac{c}{3\omega_0(m+m')}\frac{\omega}{\omega_0}\right\}^2 \right]} \sin(3\omega t - \tau) \\ & - \frac{\rho c_D \cdot d^2 \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 A_0}{2 \cdot 430(m+m')^2 \left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)^2\right\}^2 + \left\{\frac{c}{3\omega_0(m+m')}\frac{\omega}{\omega_0}\right\}^2 \right]} \cos(3\omega t - \tau) + \cdots \cdots \cdots(12) \end{aligned}$$

$$\tan \tau = - \frac{A_0 \cos \beta}{\left[A_0 \cos \beta + \frac{H}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right]} \cdots\cdots\cdots(13)$$

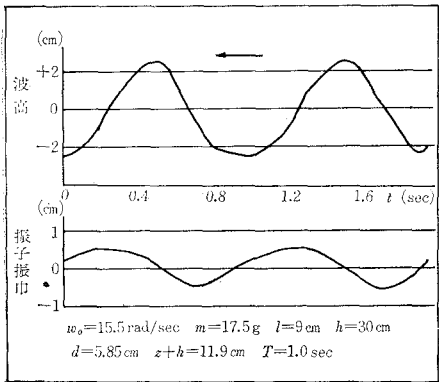
ゆえに ε^2 以下の項を考えないと

$$x=A_0 \sin (\omega t+\beta)+\varepsilon x_1 \cdots\cdots\cdots(14)$$

(3) Y 方向の振動

Y 方向の振動の原因が何であるかは簡単に決められない。しかし概説でも記述したように定常流における渦の発生, および静水中をらせん状の運動をしながら落下することなどから, 何らかの周期力を仮定して方程式をたてることもできるであろう。しかしながら, このことは本質的な問題の解決にはならないと考えられるし, さらに非定常流の場合においては, ますます問題をむずかしくしているので本論文では実験結果を取りまとめたにすぎない。

図-4 波形と X 方向の変位



4. 実験結果と考察

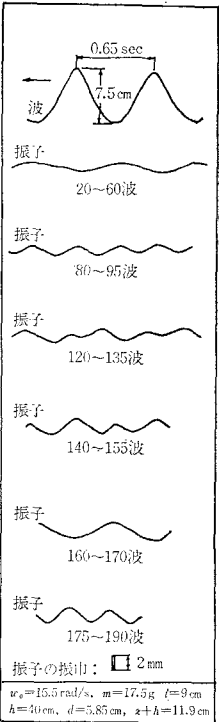
(1) 波形と変位の関係

波形と X 方向の変位の一例を 図-4 に示す。図から振子の周期と波の周期は完全に一致していることがわかる。

このことは球に作用する外力が波の特定の周期的な要素(たとえば水圧など)に支配されている強制振動であることが考えられる。また Y 方向の変位の一例を 図-5 に示した。図では最初波と同周期の振動をするがしだいに波の周期の 1/2 の周期で振動している。しかしまた, しばらくすると波と同周期にもどることもある。ただし波形の変化はみとめられない。一方振子の振幅はあまり変わらないこともある。

このことは波から振子に与えられるエネルギーが変化するこ

図-5 波形と Y 方向の変位



とを示す。このような振動の生ずる理由としては自励的な振動が生じていることも考えられる。

ただ振子の振幅は全く不変ではないから細部についてはさらに検討しなければならない。

(2) X 方向の変位

式 (12) で右辺第 3 項以下を省略した計算値と実測値の比較を図-6 に示した。計算で c_D は流体の抵抗係数を示すが、本文では 0.5 と仮定した。これは R_θ が $10^3 \sim 10^4$ 付近の値を採用した。

図で $\times$ 印と $\oplus$ 印は図-2 に示したような振子を 2 個おいた場合によるものである。この場合についての実験値を式 (14) で整理することは振動機構から考えて不合理であるが、本実験では振子間の距離を相当広げていることと、また単独の振子に対する比較をするために式 (14) で整理したにすぎない。

図によると 2 個振子を並べた場合は単独の振子の場合に比較して変位は大きく現われている。また 2 個の振子どうしでは上流側振子の変位が、下流側の振子の変位よ

りもいくぶん大きい。

(3) Y 方向の変位

図-7 は Y 方向の変位について示したものである。図で黒の記号は振子の振動数が波の振動数の 2 倍になるものを示す。図から $\omega/\omega_0 > 0.4$ になれば振子の振動数が波の振動数の 2 倍になるものと、波の振動数と同一になるものが共存していることを示す。

(4) X 方向の変位と Y 方向の変位の関係

X-Y 方向の変位の関係についての一例を図-8~図-9 に示した。他の実験について変位の絶対値は異なるが X-Y 方向の変位の割合はほぼ同様の傾向となる。

図-7 によれば ω/ω_0 が 0.5~0.6 で Y 方向の変位と波高の比率が最大になっている。また X 方向では 0.3~0.4 で最大になっている。注意すべきことは、これらの値は変位の最大値を示すものではない。

つぎに図-8、図-9 の各点を通るなめらかな曲線をひき、これによって X-Y 方向の変位の比率を求めたものが図-10~図-11 である。

図-6 X 方向の変位

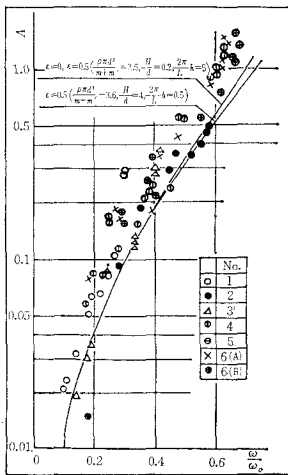


図-7 Y 方向の変位

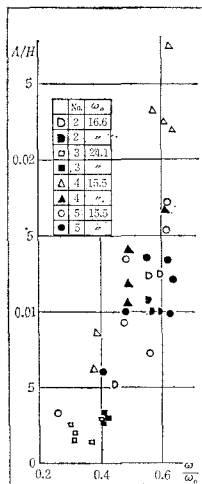


図-8 X-Y 方向の変位

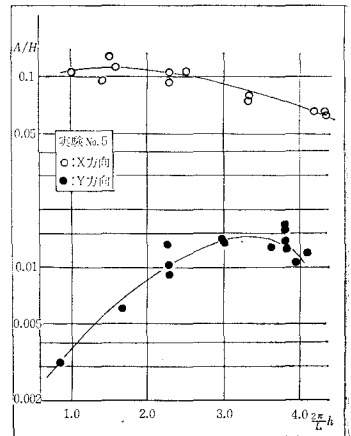


図-9 X-Y 方向の変位

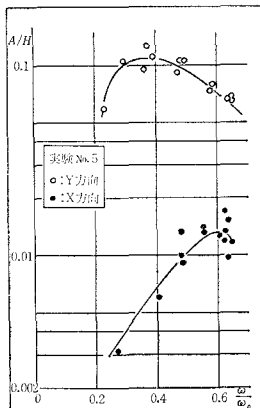


図-10 X-Y 方向の変位の比率
(図-8 により推定)

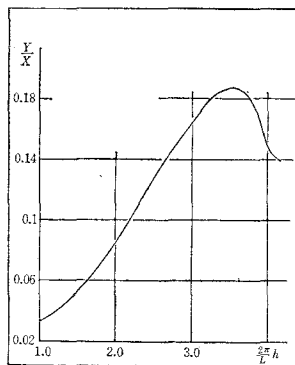


図-11 X-Y 方向の変位の比率
(図-9 により推定)

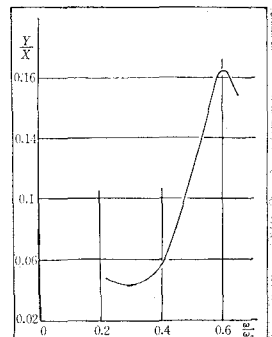


図-12 X方向の外力

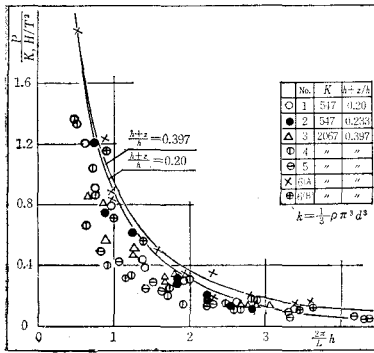


図-14 X-Y方向の外力

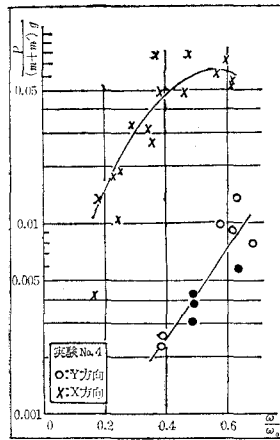


図-15 X-Y方向の外力の比率

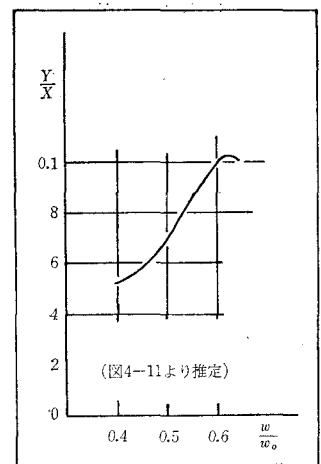
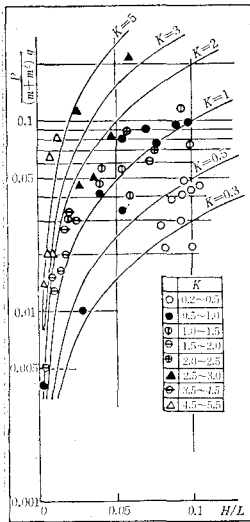


図-13 X方向の外力と H/L



によって実験結果を整理したものを図-12に示した。図では理論値は実験値より多少大きくなっているが、これは理論値がwakeの影響などを考慮していない理由によるものと考えられる。

つぎに式(8)によって波形勾配による影響を調べる。式(8)は球に作用する力が H/L , $(2\pi/L)h$ および σ/ρ に影響することを示すが、 $(2\pi/L)h$, σ/ρ を一組のパラメーターとして H/L で整理すると図-13になる。ただし図で K の値は

$$K = \frac{\pi}{(\sigma/\rho + 0.5)} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h}$$

である。

前の論文で²⁾、筆者らはX方向とY方向の比率はほぼ0.1であると提示したが、図によると ω/ω_0 または $(2\pi/L)h$ の値によって異なることを示している。このことはX方向とY方向の振動の機構が異なることを示す。

ただいずれの場合も平均的にはX,Yの変位の比率は0.1ぐらいとなっている。

(5) X方向の外力

式(7)と式(11)に

図で理論値と実験値は傾向としては一致しているようである。

(6) Y方向の外力

Y方向に作用する力について実験値を整理したものが図-14である。ちらばりが大きい図-10、図-11と同様にしてX,Y方向に作用する力の比率を取ると図-15のようになる。図からY方向にはX方向の力のほぼ1/10以下の力が作用していることがわかる。

5. 結 論

以上のことからつぎのことが結論できる。

- ① X方向の振動とY方向の振動とでは振動の機構が異なるようである。
- ② X方向の振動は水圧変動が外力として作用されるらしい。
- ③ Y方向の振動は明確でないが周期が波の周期と異なっても振幅はそれほど変わらないことから自励振動的でもある。しかしまた周期が波と同じ周期であるか、または波の周期の1/2になることから判断すると強制振動しているようにも考えられる。
- ④ 球を2個おいた場合は単独においた場合の振動に対し大きな力が作用し、したがって変位も大きい。図には示さなかったがY方向の振動はとくに複雑な振動をしている。これは付加質量の増大の効果が大きいものと思われる。

参 考 文 献

- 1) Allen T. Hjelmfelt, A.M. ASCE, John F. Carney, 111: Dynamic Response of A Restrained in A Fluid., Proc. of ASCE, 1967.
- 2) 椎貝博美, 河野二夫: 表面波による球の運動について, 第23回年次学術講演会講演概要, 1968年10月。