有限振幅波の shoaling について（2）

岩垣雄一*・酒井哲郎**

1. 緒　　言

著者らは前回[1]，クノイド波理論の初等関数表示である hyperbolic 波の理論式を誘導し，単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギーを求め，さらに海底勾配がゆるやかな場合の波の運動は，同じ水深の水平な海底上の波の運動と同じであるという仮定にもとづき，単位時間に輸送される波のエネルギー量は水深が変化しても一定であるという条件から，水深・波長比の小さい領域での水深変化にともなう波高変化の理論曲線を算出した。つぎに，この理論曲線を微小振幅波理論や Méhauté-Webb[2] が求めた Stokes 波の理論曲線とともに，従来の実験の結果[3),4),5)]と比較して，hyperbolic 波の理論曲線が Stokes 波理論にもとづく理論曲線と同じ傾向をもっていること，および水深・波長比が小さい場合に，水深の減少とともに波高が急激に増大するという，微小振幅波理論によっては説明できない実験的事実が説明できることを示した。

この論文は，まず前回[1]の hyperbolic 波のエネルギー輸送の計算に際しての若干の誤りを指摘して，波高変化の理論曲線を修正するとともに，Stokes 波理論にもとづく波高変化の理論曲線を，第3近似解[6]を用いて正確に求め，沖波波形勾配 H_0/L_0 をパラメーターとする波高比 H/H_0 と水深・沖波波長比 h/L_0 の関係によって示す。つぎに，以上の結果から，hyperbolic 波と Stokes 波の両理論にもとづいて，水深変化にともなう静水面からの波の峯高，および波速・波長の変化の理論曲線を求める。さらに，波の shoaling に関する実験を行なって，上述の理論曲線と比較し，その妥当性を検討しようとするものである。

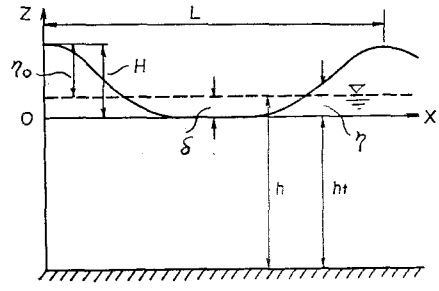
2. 水深変化にともなう波の特性の変化

（1） 波高の変化

いま座標系を図—1のようにとると，単位時間に単位幅を通過して輸送される平均の波のエネルギー $\overline{W}$ は，次式によって表わされる。

$$\overline{W}=\frac{\rho}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-h_t}^{\eta}\left\{\frac{1}{2}(u^2+w^2)+\frac{p}{\rho}+gz\right\}$$

図—1 座 標 系



$$\times u\cdot dzdt \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，T は波の周期，u および w はそれぞれ x および z 方向の水粒子の速度，p は圧力である。前回[1]の $\overline{W}$ の計算に用いた hyperbolic 波の圧力の第2近似には若干の誤りがあり，正しくは，次式のように表わされる[7]。

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho gH}=&\operatorname{sech}^2\left(\frac{2\boldsymbol{K}}{L}X\right)-\frac{z}{H}\\&-\frac{3}{4}\cdot\frac{H}{h}\operatorname{sech}^2\left(\frac{2\boldsymbol{K}}{L}X\right)\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}\right)\\&\times\left\{1-\operatorname{sech}^2\left(\frac{2\boldsymbol{K}}{L}X\right)\right\}\\&-\frac{3}{4}\underline{\frac{H}{h}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{2\boldsymbol{K}}{L}X\right)\left(1+\underline{\frac{1}{\boldsymbol{K}}}\frac{H}{h}\right)\\&\times\left\{2\frac{z}{h_t}+\left(\frac{z}{h_t}\right)^2\right\}\\&\times\left\{2-3\operatorname{sech}^2\left(\frac{2\boldsymbol{K}}{L}X\right)\right\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(2)$$

ここで，$\boldsymbol{K}$ は第1種完全だ円積分，$X=x-ct$ であり，アンダーラインの部分が修正箇所である。式(1)に hyperbolic 波の η, u, w および式(2)で表わされる p の第2近似を代入すると，$\overline{W}$ は結局次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\overline{W}=&\frac{2}{3}\rho gH^2\sqrt{gh_t}\frac{1}{\boldsymbol{K}}\\&\times\left\{1-\frac{3}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{H}{h_t}\left(\underline{\frac{2}{5}}-\frac{5}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{3}{\boldsymbol{K}^2}\right)\right.\\&\left.+\left(\frac{H}{h_t}\right)^2\left(\underline{-\frac{31}{112}}-\frac{29}{160}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{13}{4}\frac{1}{\boldsymbol{K}^2}\right)\right\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(3)$$

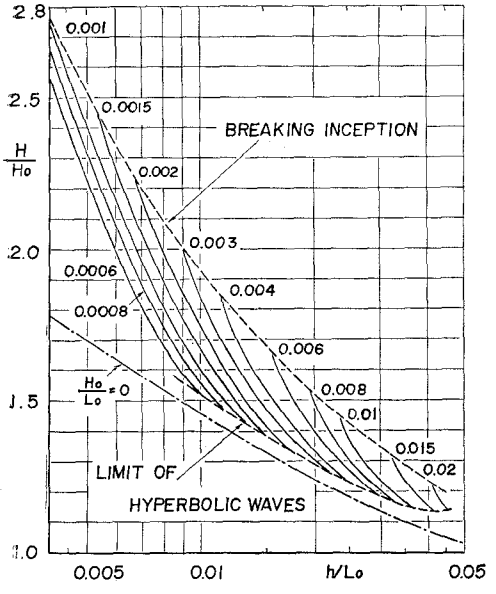
この $\overline{W}$ と，Méhauté-Webb[2] が求めた Stokes 波理論の第3次近似解による $\overline{W}$ において $h\to\infty$ として得ら

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部
** 学生会員　工修　京都大学大学院　工学研究科

れる $\overline{W}_0$ とを等しいとおいて整理すると，波高変化の理論式が次式のように求まる。

$$\frac{H}{H_0}=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{h}{L_0}\right)^{-1}\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^{1/3}\left\{1+\pi^2\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\}\times\left\{1-\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}+\frac{1}{12}\frac{1}{\boldsymbol{K}}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{-1/3}\times\left\{1-1.3\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/3}\times\left\{1-\frac{3}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{H}{h_t}\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{3}{\boldsymbol{K}^2}\right)+\left(\frac{H}{h_t}\right)^2\left(-\frac{31}{112}-\frac{29}{160}\frac{1}{\boldsymbol{K}}+\frac{13}{4}\frac{1}{\boldsymbol{K}^2}\right)\right\}^{-2/3}\quad\cdots\cdots(4)$$

図—2　hyperbolic 波の理論式にもとづく波高変化



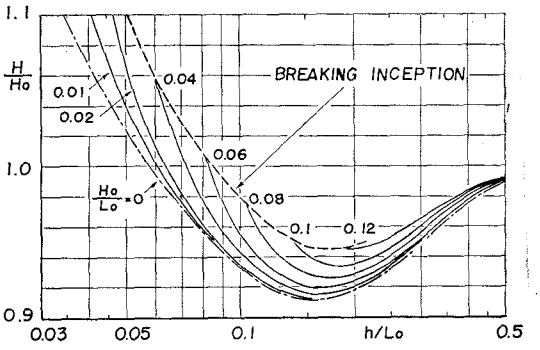
ここで，添字0は深海における値であることを示す。また，式 (3) および式 (4) におけるアンダーラインの部分が修正箇所である。式 (4) から数値計算によって求めた hyperbolic 波の波高変化の修正理論曲線が図—2である。前回[1]の曲線にくらべて，h/L_0 の大きい領域でややその勾配がゆるやかになっているが，全体の傾向はほとんど変わっていない。

Méhauté-Webb[2] は，すでに Skjelbreia[6] の Stokes 波理論の第3次近似解による $\overline{W}$ を用いて，水深変化にともなう波高変化の理論曲線を求めている。この理論曲線はパラメーターおよび横軸にそれぞれ H_0/T^2 および h/T^2 を採用しており，前回[1]においては，微小振幅波理論から $L_0=gT^2/2\pi$ の関係を用いて，それぞれ近似的に H_0/L_0 および h/L_0 に換算した。Skjelbreia[6] の Stokes 波理論の第3次近似解を用いると，$2\pi H_0/gT^2$ および H_0/L_0 と $2\pi h/gT^2$ および h/L_0 との関係が，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}\frac{H_0}{L_0}&=\frac{2\pi H_0}{gT^2}\left\{1-\pi^2\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\}\\ \frac{h}{L_0}&=\frac{2\pi h}{gT^2}\left\{1-\pi^2\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

によって与えられ，$2\pi H_0/gT^2$ の値を与えると H_0/L_0 の値は式 (5) の第1式の2次方程式を解くことによって求まり，h/L_0 の値はこの H_0/L_0 の値と $2\pi h/gT^2$ の値を第2式に代入すれば求まる。また Koh-Méhauté[8] は Méhauté-Webb[2] の波高変化の計算結果を，$2\pi H_0/gT^2$ の値に対する $2\pi h/gT^2$ と H/H_0 の関係として表に与えているので，この表から式 (5) を用いて H_0/L_0 に対する h/L_0 と H/H_0 の関係として波高変化の理論曲線を求めることができる。図—3 はこうして正確に換算した H_0/L_0 および h/L_0 を用いて表わした，Stokes 波の波高変化の理論曲線である。

図—3　Stokes 波理論にもとづく波高変化



(2)　静水面からの波の峯高の変化

hyperbolic波の理論式によると，波の谷から静水面までの高さの第2近似は次式で表わされる[7]。

$$\frac{\delta}{H}=\frac{1}{\boldsymbol{K}}\left\{1-\frac{1}{12}\frac{H}{h}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

したがって，静水面からの波の峯高 η_0 は，式 (6) を用いると，

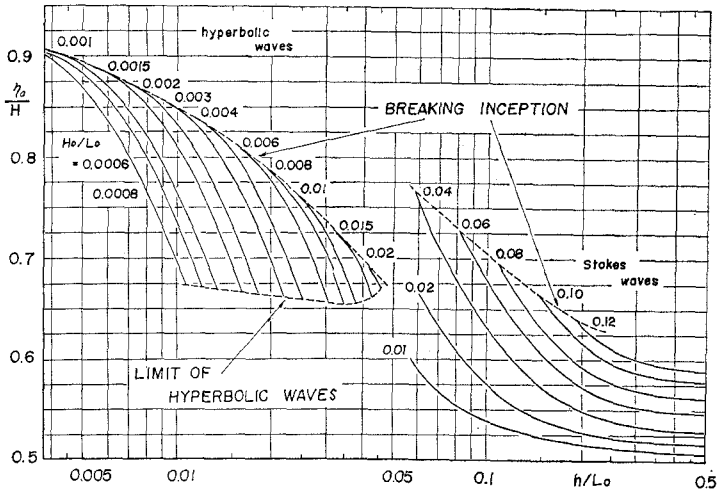
$$\frac{\eta_0}{H}=\frac{H-\delta}{H}=1-\frac{\delta}{H}=1-\frac{1}{\boldsymbol{K}}\left(1-\frac{1}{12}\frac{H}{h}\right)\quad\cdots\cdots(7)$$

上式において，第1種完全だ円積分 $\boldsymbol{K}$ は水深，波の周期および波高によってつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{K}&=\frac{\sqrt{3}}{4}T\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{H}{h}\right)^{1/2}\left\{1-1.3\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2};\quad\frac{H}{h}\leq 0.55\\ \boldsymbol{K}&=\frac{\sqrt{3}}{4}T\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{H}{h}\right)^{1/2}\left\{1-0.540\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}\right\};\quad\frac{H}{h}>0.55\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8)$$

このように $\boldsymbol{K}$ および H/h は，ともに H/H_0, h/L_0 および H_0/L_0 によって表わされるから，式 (4) の波高変

図—4 hyperbolic 波の理論式および Stokes 波理論にもとづく静水面からの波の峯高の変化



化の計算結果を用いれば，hyperbolic 波の理論式にもとづく静水面からの波の峯高 η_0/H は，H_0/L_0 をパラメーターとして，h/L_0 の関数として与えることができる。その結果を図示したのが図—4の左側の曲線群である。図—4を見てわかるように，hyperbolic 波の理論が適用できる水深・波長比の小さい領域では，沖波波形勾配が 0.02 より小さい波の峯高 η_0 は，すでに波高の 65% 以上になっており，水深の減少とともにさらに増大して砕波にいたっている。

一方，Skjelbreia[6] の Stokes 波理論の波形 η の第3次近似解は次式で与えられる。

$$\frac{\eta}{L}=A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+A_3\cos 3\theta,$$

$$\theta=\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots(9)$$

ただし，上式の η は図—1の η から δ を引いたものに相当し，A_1, A_2 および A_3 は h/L と H/h の関数として Skjelbreia によって表が与えられている。式 (9) において $\theta=0$ とおけば，静水面からの波の峯高 η_0 がつぎのように求まる。

$$\frac{\eta_0}{H}=\left(\frac{H}{L}\right)^{-1}(A_1+A_2+A_3) \quad \cdots\cdots(10)$$

一方，Koh-Méhauté[8] の波高変化の表と式 (5)，および Skjelbreia[6] の表とを用いて式 (10) を計算すれば，Stokes 波理論にもとづく水深変化にともなう静水面からの波の峯高 η_0 の変化が，H_0/L_0 をパラメーターとし η_0/H と h/L_0 の関係として計算できる。その結果を図示したのが図—4の右側の曲線群である。この図を見てわかるように，水深・波長比の大きい領域でも，水深の減少とともに η_0/H は増大する傾向を示し，その割合は hyperbolic 波の理論曲線のそれとほぼ一致しているが，その値は $H_0/L_0=0.01$ および 0.02 の2つの場合を比較してわかるように，Stokes 波の理論曲線の方が大きい。

(3) 波速および波長の変化

従来，水深変化にともなう波速および波長の変化については，微小振幅波理論による理論曲線しかない。ここでは有限振幅波理論にもとづいて，波速および波長の変化の理論曲線を求めてみる。

hyperbolic 波の理論式において，波長の第2近似は次式のように与えられる[7]。

$$\frac{L}{h}=\left(1-\frac{3}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}\right)\frac{4\boldsymbol{K}}{\sqrt{3}}\left(\frac{h}{H}\right)^{1/2}\times\left\{1-\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}\right)\frac{5}{8}\frac{H}{h}\right\}^{-1} \quad \cdots\cdots(11)$$

一方，Skjelbreia[6] の Stokes 波理論の第3次近似解によれば，沖波波長 L_0 は次式で与えられる。

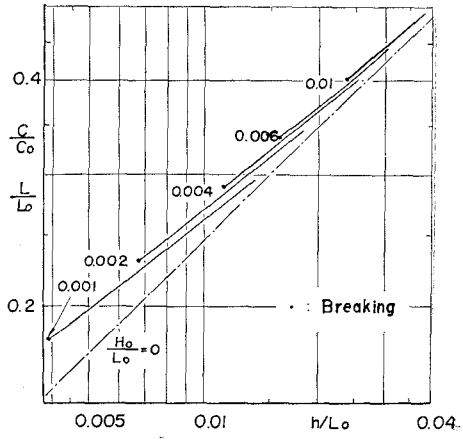
$$\frac{L_0}{T^2}=\frac{g}{2\pi}\left\{1+\pi^2\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

結局，式 (11) および式 (12) から，波速および波長の変化が次式のように表わされる。

$$\frac{C}{C_0}=\frac{L}{L_0}=\sqrt{2\pi}\left(\frac{h}{L_0}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{H_0}{L_0}\right)^2\right\}\times\left(1-\frac{3}{2}\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}\right)\left\{1-1.3\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}^{1/2}\times\left\{1-\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{K}}\frac{H}{h}\right)\frac{5}{8}\frac{H}{h}\right\}^{-1} \quad \cdots\cdots(13)$$

ただし，$H/h>0.55$ の場合は式 (8) で示したように，$\{1-1.3(H/h)^2\}^{1/2}$ の項は $\{1-0.540(H/h)^{3/2}\}$ の項でおきかえられる。このように $\boldsymbol{K}$，および H/h はともに H/H_0, h/L_0 および H_0/L_0 で表わされるから，式 (4) の

図—5 hyperbolic 波の理論式にもとづく波速および波長の変化



波高変化の計算結果を用いれば，hyperbolic波の理論式にもとづく波速比 C/C_0 および波長比 L/L_0 は，H_0/L_0 をパラメーターとし，h/L_0 の関数として与えることができる。その結果を図示したのが図—5である。図中には従来の微小振幅波理論による理論曲線をも示してある。この図を見てわかるように，hyperbolic 波の理論式を用いて求めた理論曲線が示す水深の減少にともなう波速および波長の減少の割合は，微少振幅波理論による変化の割合よりやや小さいことを示している。

Skjelbreia[6] の Stokes 波理論の第3次近似解における波速 C は次式のように表わされる。

$$\frac{C}{T}=\frac{g}{2\pi}\tanh 2\pi\frac{h}{L}\times\left\{1+(2\pi A_1)^2\frac{\cosh 8\pi\frac{h}{L}+8}{8\left(\sinh 2\pi\frac{h}{L}\right)^4}\right\}\quad\cdots(14)$$

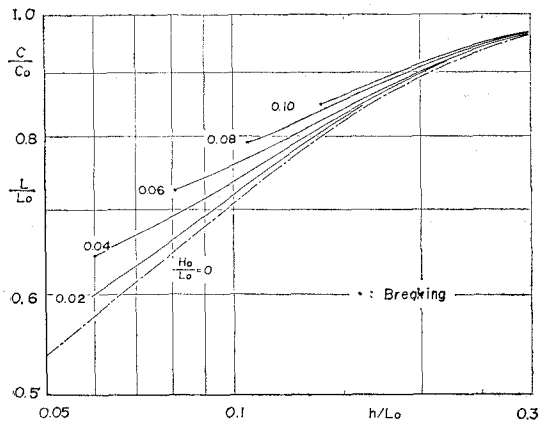
上式において $h\to\infty$ とすれば，沖波波速 C_0 が次式のように求まる。

$$\frac{C_0}{T}=\frac{g}{2\pi}\{1+(2\pi A_{1_0})^2\}\quad\cdots\cdots(15)$$

したがって，式 (14) および (15) より，波速および波長の変化が，次式のように表わされる。

$$\frac{C}{C_0}=\frac{L}{L_0}=\tanh 2\pi\frac{h}{L}\times\left\{1+(2\pi A_1)^2\frac{\cosh 8\pi\frac{h}{L}+8}{8\left(\sinh 2\pi\frac{h}{L}\right)^4}\right\}\times\{1+(2\pi A_{1_0})^2\}^{-1}\quad\cdots\cdots(16)$$

図—6 Stokes 波理論にもとづく波速および波長の変化



Koh-Méhauté[8] の表と Skjelbreia[6] の表を用いれば A_1 が求まるから，Stokes 波理論にもとづく波速比 C/C_0 および波長比 L/L_0 が，H_0/L_0 をパラメーターとし h/L_0 の関数として与えることができる。その結果を図示したのが図—6である。この図を見てわかるように，Stokes 波理論にもとづいて求めた波形勾配の大きい波の波速および波長の，水深の減少にともなう減少の割合も，微小振幅波理論にもとづく理論曲線のそれよりも小さく，hyperbolic 波の理論式にもとづく理論曲線の傾向と一致する。

3. 波の shoaling に関する実験

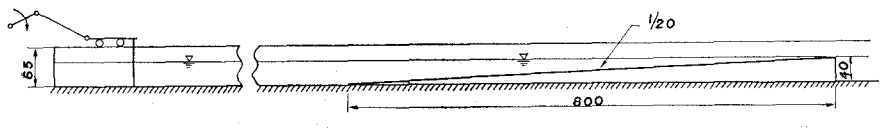
(1) 実験装置および方法

実験は京都大学防災研究所宇治川水理実験所の波浪実験水槽を用いて行なった。この水槽は，長さ 63 m，幅 50 cm，高さ 65 cm の鋼製水槽で，図—7に示すように，その一端にピストン型波起し機が取り付けられており，水槽のほぼ中央に 8 m にわたって鋼製斜面を設置した。勾配は 1/20 であって，斜面の最上端は水槽の底面からほぼ 40 cm の高さにある。実験にあたっては，一様水深部の水深はつねにほぼ 40 cm とし，波の周期は 1，1.2，1.5，2 sec，一様水深部の波高は 1.5～12.0 cm の範囲のものを用いた。記録は，一様水深部および斜面上に設置された6台の電気抵抗線式波高計によって得た。沖波波高は，一様水深部の波高と水深から，Koh-Méhauté[8] が求めた Stokes 波理論にもとづく波高変化の理論曲線図—3を用いて求め，沖波波長 L_0 は波の周期 T から近似的に $gT^2/2\pi$ で与えた。波速は隣り合う2台の波高計間を波が通過するのに要する時間から，2台の波高計間の2等分点での波速として求めた。また沖波波速 C_0 は近似的に $gT/2\pi$ で与えた。静水面からの波の峯高は，あらかじめ記録紙上の静水面の位置を記録させておき，それを基準として求めた。なお採用した波は，各記録のうち波形が安定したのちのもので，斜面上で反射した波が波起し機の往復板によってふたたび反射して帰ってくるまでの数波である。

(2) 実験結果

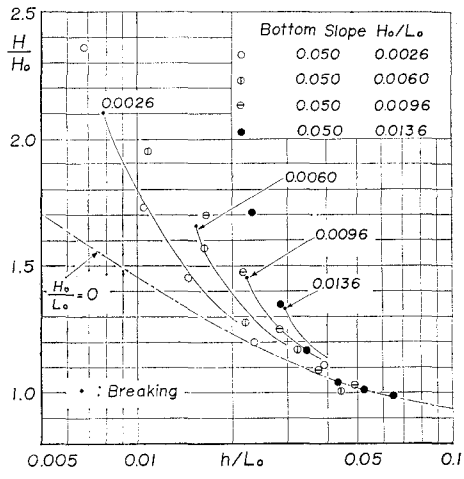
一様水深部の水深をほぼ 40 cm とし，波の周期および波高を適当に変えて行なった波高変化の実験結果のうち，沖波波形勾配の小さい4つの場合を，hyperbolic 波と微小振幅波の理論曲線とともに示したのが図—8であり，他の波形勾配の大きな4つの場合を，Stokes 波と

図—7 実験装置

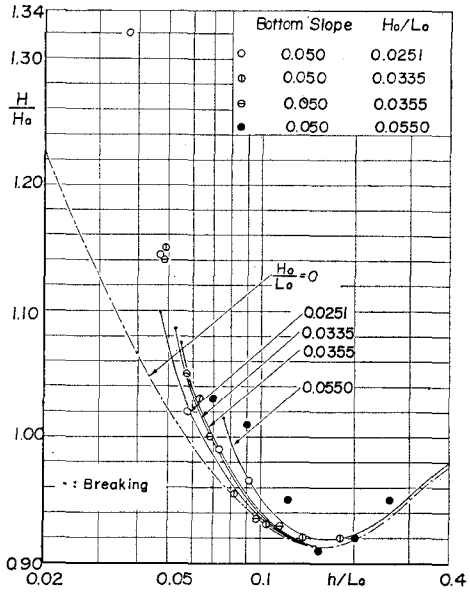


UNIT : cm

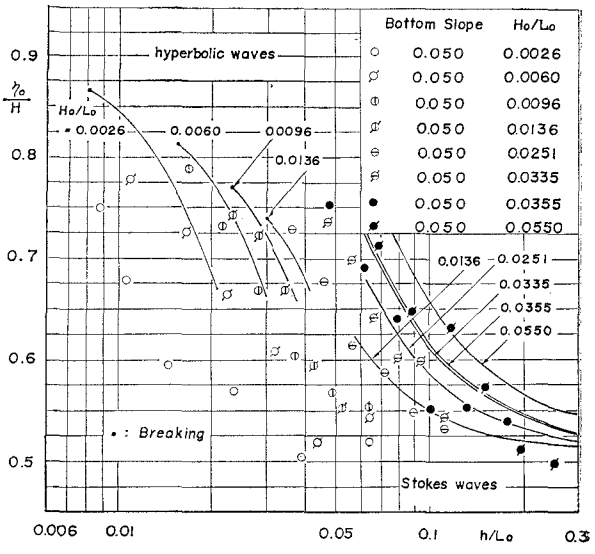
図—8　波高変化の実験結果 (1)



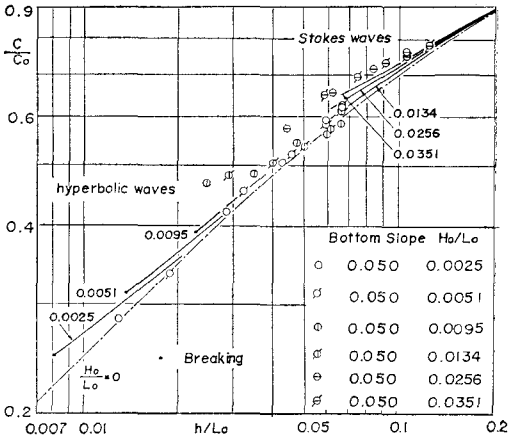
図—9　波高変化の実験結果 (2)



図—10　静水面からの波の峯高の変化の実験結果



図—11　波速の変化の実験結果



微小振幅波の理論曲線とともに示したのが図—9である。

つぎに，波高変化の実験データから求められた静水面からの波の峯高の変化の実験結果を，hyperbolic 波および Stokes 波の理論曲線とともに図示したのが，図—10 である。

最後に，波の周期および波高を適当に変えて行なった波速の変化の実験結果を，hyperbolic 波，Stokes 波および微小振幅波の理論曲線とともに図示したのが，図—11 である。

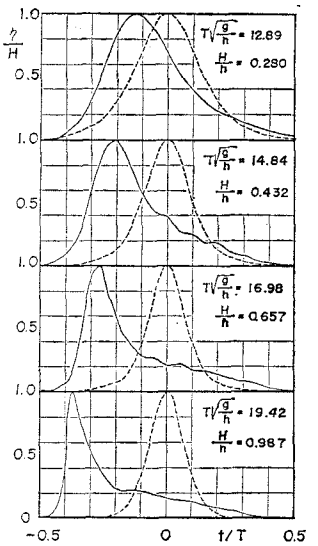
（3）　考　　察

波高の測定誤差は 4% 程度と推定されるが，図—8 を見てわかるように，hyperbolic 波の波高変化の理論曲線は実験結果とよく一致しており，波高が水深の減少にともなって微小振幅波理論によるものよりはるかに大きくなることがわかる。ただし各実験結果の点描された点のうち最小の水深の点は，視察によって求めた砕波点であり，図—8 からわかるように，Laitone[9] の最高波の式から求めた砕波限界よりも浅く，砕波高は大きい。理論的に求められた砕波限界には勾配の影響が導入されていないので，斜面上の砕波についてはさらによく検討する必要がある。一方，図—9 からわかるように，Stokes 波理論にもとづく波高と微小振幅波理論にもとづく波高との差異は実験誤差と同じ程度であり，理論曲線の妥当性を検討するには実験の精度を高める必要があるが，波高の増大の割合が微小振幅波理論にもとづくものよりもやや大きいという傾向は実験結果と一致している。

つぎに，静水面からの波の峯高の変化の実験値は水深減少にともなって増大し，その傾向は 2 つの理論曲線群とほぼ一致しているものの，値自体は理論値よりもかな

り小さい。図—12 は $H_0/L_0=0.0096$ の場合の波形の場所的変化を示したもので，上から順に沖側より視察による砕波点までの4つの点でのηの時間的変化が実線で示してある。またそれぞれ同じ条件の hyperbolic 波の理論波形の第2近似[7]が破線によって比較のために示してある。この図を見てもわかるように，沖側の最初のものはすでに波形が非対称となっており，岸側に進むにつれてさらにその傾向を増している。このように，静水面からの波の峯高の変化の実験結果が，理論曲線よりも小さい値を示す原因の1つとして，斜面上で波が変形して非対称になっていることが考えられるが，今後さらに検討する必要があろう。

図—12 実験波形と理論波形の比較



波速の測定誤差は約 1.5% と推定される。図—11 を見てわかるように，実験値は理論どおりに水深の減少とともに減少し，その傾向は一致するが，微小振幅波理論によるほど小さくはならない。また沖波波形勾配の影響は，hyperbolic 波の理論式および Stokes 波理論にもとづく理論曲線と同じ傾向を示しているといえるが，さらに詳細な実験が必要であろう。

4. 結　　語

以上，著者らは，有限振幅波の shoaling として，前回に求めた hyperbolic 波の理論式にもとづく波高変化の理論曲線を修正し，また Koh-Méhauté の計算結果を用いてあらためて正確な Stokes 波理論にもとづく波高変化の理論曲線を示すとともに，静水面からの波の峯高および波速・波長の変化の理論曲線を，hyperbolic 波と Stokes 波の両理論にもとづいて求め，さらに波の shoaling に関する実験を行なって，これらの理論曲線の妥当性を検討し，つぎのような結論を得た。

（1） hyperbolic 波の理論式にもとづく波高変化の理論曲線は実験結果とよく一致し，波高が水深の減少にともなって，微小振幅波理論によるものよりもはるかに大きくなることが確認された。ただし，斜面上の砕波についてはさらに検討する必要がある。

（2） Stokes 波理論にもとづく波高変化の理論曲線も，実験結果とほぼ一致する。

（3） 静水面からの波の峯高の変化に関する hyperbolic 波と Stokes 波の2つの理論曲線が得られた。実験結果は，理論曲線と同じ傾向を示すが，その値は理論曲線のそれよりもかなり小さく，その一因として波が変形して非対称になっているためであろうと推定された。

（4） hyperbolic 波および Stokes 波の，波速および波長の変化の理論曲線を求め，実験結果と比較した結果，両者の傾向はよく一致することがわかった。

参考文献

1) 岩垣雄一・酒井哲郎：有限振幅波の shoaling について，第 14 回海岸工学講演会講演集，昭 42.10，pp. 1～7.
2) Le Méhauté, B. and L.M. Webb : Periodic Gravity Waves over a Gentle Slope at a Third Order of Approximation, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, 1964, pp. 23～40.
3) Wiegel, R.L. : Experimental Study of Surface Waves in Shoaling Water, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 31, 1950, pp. 377～385.
4) Iversen, H.W. : Waves and Breakers in Shoaling Water, Proc. 3rd Conference on Coastal Engineering, 1952, pp. 1～12.
5) Eagleson, P.S. : Properties of Shoaling Waves by Theory and Experiments, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 37, 1956, pp. 568～572.
6) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Table of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1～337.
7) 岩垣雄一：クノイド波に関する研究（第4報）——hyperbolic waves について (1)——，京大防災研究所年報，第 10 号 B，昭 42.3，pp. 283～294.
8) Koh, R.C.Y. and B. Le Méhauté : Wave Shoaling, Jour. of Geophys. Research, Vol. 71, No. 8, April, 1966, pp. 2005～2012.
9) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430～444.