

深層取水の流れへの考察(1)

大 西 外 明*・日 野 幹 雄**

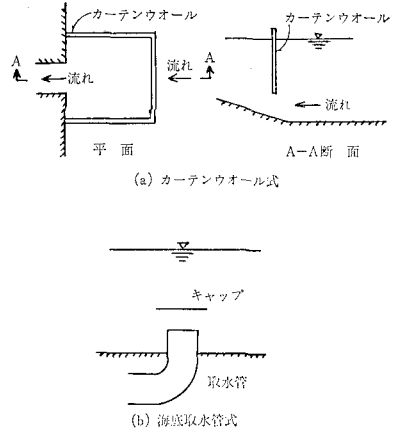
1. はじめに

最近の火力あるいは原子力発電所は次第に大容量化し、復水器冷却用に多量の水を必要としている。すなわち、火力発電所の場合、発電容量 100 MW につき $3.5 \sim 5 \text{ m}^3/\text{sec}^{1)}$ 、原子力発電所の場合、 $6 \text{ m}^3/\text{sec}$ 程度の冷却用水量を必要とする。

これらの発電所は海岸近傍に設置される場合が多く、海水は冷却用水の安定した供給源として用いられている。海水を用いる場合、淡水の場合に比較して特に問題となるのは、取水口に侵入してくる大量のクラゲの処理と海藻貝類等の海生物への対策であるが、現在のところ、これらに対する確固とした設計基準が確立されていないようである。一方、取水設備を計画、設計するのにさいして考慮しなければならない要素としては、他の海岸あるいは海中構造物におけると同様、地形、地質、波浪、漂砂、洗掘、海上浮遊物等、多くのことがらがあり、個々の発電所地点ごとの特種条件も勘案した総合判断にもとづいて、安全かつ経済的な構造物をきめなくてはならない。

以上は、冷却水取水構造物の配置、形状、寸法等をきめる場合の議論であるが、冷却水の取水をタービン熱効率の増大化の面から考えると、低温の深層水を取水することがきわめて有利である。現在、一般に用いられている深層取水工法を大別すると、カーテンウォール式取水口と海底取水管式取水口に 分けることができる。図-1 にそのおおよその概略をしめす。カーテンウォール式のもののは海底部に開口した流入口の上部および側面をコンクリートあるいは鋼製のカーテンウォールで囲むもので、カーテンウォールの平面形状は長方形のものがほとんどである。この場合の流れとして、上下二層の密度成層流について Ippen & Harleman²⁾、Huber & Reid³⁾、Elder⁴⁾、千秋・和田⁵⁾、等が検討を行なっている。長方形のカーテンウォールでは、海底の地質が悪いとか、設計波高が大きいかしたした場合、カーテンウォールを構成する部材寸法が大きくなり不経済となることがある。このような場合、平面形状に長方形を用いるかわりに円弧状としてカーテンウォール部材寸法の縮小をはかる試み

図-1 深層取水方式



が設計上の興味の対象となってくる。この型では、取水口への流れは non-homogenous な流体の軸対象流となるが、この種の流れに対する水理学的解明は多くなされていないようである。つぎに、海底取水管式取水口では、カーテンウォール式のものに比較して、発電所運転中の保守点検が不便であるが、設計波力が緩和され、海上浮遊物によりうける障害をさけることができ、また、工期も短縮できる等の利点がある。従来、大口径の鋼管を海底に沈設する工事が困難とみられ、その施工例が少なかったが、施工方法の進歩につれ、最近では大容量の取水口にも経済的に使用されつつある。この場合の流れも軸対象流となるが、前述のように水理学的解明が少なく実際設計上不明な点が多々ある。

本論では、軸対称をなす成層密度流の水理現象への一つのアプローチとして、水の密度が表面より深さとともに直線的に増加する流体を考え、これが水路底に設けた吸込み点へ流入する場合について考察を行なう。

2. 水の密度が直線的に変化する場合の軸対称流の基礎方程式

Yih は、水の密度が深さとともに直線的に変化する場合について、水路底面に分布する line sink への二次元流を理論的に取りあつかった⁶⁾。Yih は、 $F = A(g\beta d^2)^{-1/2} > 1/\pi$ のときの理論解をみちびき、 F の値が $1/\pi$ より小さいときには流れの上層部に stagnation zone が生じることをしめした。ここで、 A は const. であり $x-y$ 座標系

* 正会員 工修 日本原子力発電(株)

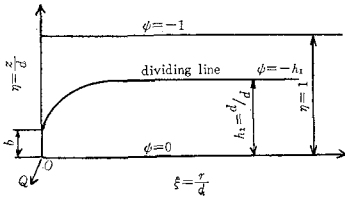
** 正会員 工博 東京工業大学助教授 土木工学科

で $u' = -\partial\psi'/\partial z, w' = -\partial\psi'/\partial x$ で定義される流れ関数 ψ' が $x = \infty$ で $\psi - Az$ であらわされるとした場合の係数で、 $x = \infty$ での u' を意味する。Debler⁷⁾は、Yih の解を実験的にたしかめ上層部に stagnation zone が生じる F の限界値は理論値の $1/\pi$ より小さい 0.28 であることをしめした。Kao⁸⁾は、 $F > 1/\pi$ に対する Yih の解を $F < 1/\pi$ の場合に適用するため、水域底面の original sink のほかに仮想の distribution sink を想定して original sink に流入する下層の流れを求める方法を提案した。Point sink に流入する定常な回転流については、Long⁹⁾ や Yih¹⁰⁾ の理論的研究があるが、発電所の深層取水口の場合、表面渦の発生防止と魚類の侵入を防ぐ意味から海底取水管の上部にキャップをとりつけるのが普通であり、これにより、流れは非回転となる¹¹⁾。また、円弧形カーテンウォールに流入する流れも非回転であろうと考えられる。非回転の流れで水の粘性および圧縮性を無視した場合、水路底に設けた吸込み点にむかう流れの運動方程式はつぎのように書ける。

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad \dots\dots\dots (2)$$

図-2 座標系と吸込み点への流れ



ここに、 r, z は図-2 に示すような円筒座標であり、 u, w は、それぞれ、 r 方向および z 方向の流速である。また、 ρ は水の密度、 g は重力の加速度である。diffusion がないものとするれば、密度は流線にそって一定である。すなわち、

$$u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

また、連続の式は

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。Yih は流速および密度に関してつぎの変換をおこなった¹²⁾。

$$(u', w') = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} (u, w) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ρ_0 は reference density で水域底部での水の密度を用いる。式 (5) を使い、(3) を考慮すると、式 (1), (2), (4) は、それぞれ、つぎのようになる。

$$u' \frac{\partial u'}{\partial r} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$u' \frac{\partial w'}{\partial r} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial(ru')}{\partial r} + \frac{\partial(rw')}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) により、つぎの式により定まる ψ' なる変形された流れ関数を考えることができることがわかる。

$$u' = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial z}, w' = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (3) および (5) から、 ψ' の場においても密度は流線にそって一定であることがわかる。式 (6) と (7) とにより ψ' に関してつぎの式を得る。

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + \frac{gz}{\rho_0} \frac{d\rho}{d\psi'} = \frac{1}{\rho_0} \frac{dH}{d\psi'} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$H = p + \frac{\rho_0(u'^2 + w'^2)}{2} + g\rho z \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) は、ベルヌーイの式である。いま、吸込み点より十分上流の位置における密度分布が、次式であらわされる直線分布をなすものとする。

$$\rho = \rho_0(1 - \beta z), \beta = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0 d \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 ρ_1 は水の表面での密度、 d は全水深である。また、おなじく十分上流の位置では、流れが水平方向に一樣に流れるものとする、

$$\psi' = -|U|Rz \quad \dots\dots\dots (13)$$

をうる。ここに、 U は十分上流の位置 $r=R$ における一樣な水平流速で負の値である。式 (12)、式 (13) を式 (10) に代入すると、

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial r} \right) + \frac{g\beta z}{|U|R} = -\frac{\beta g}{(|U|R)^2} \psi' \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) を無次元化するため、つぎの変換をおこなう。

$$\psi = \frac{\psi'}{|U|Rd} = \frac{2\pi\psi'}{Q}, \xi = \frac{r}{d}, \eta = \frac{z}{d} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 Q は流量である。

これにより式 (14) は、つぎのとおり無次元化される。

$$\frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + G^{-2} \psi = -G^{-2} \eta \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$G = \frac{|U|R}{\sqrt{g\beta}d^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

あるいは、

$$G = \frac{Q}{2\pi\sqrt{g\beta}d^3} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし、式 (18) は、流れが吸込み点の全周より流入するものとした場合である。

式 (16) をつぎにのべる境界条件を満足するように解けばよいわけである。

3. 境界条件

ξ を吸込み口より水平に上流方向にはかり、 η を水路

の底より鉛直上方にはかるものとする、境界条件はつぎのとおりである (図-2 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \xi > 0, \eta = 0 \text{ で } \psi &= 0 \\ \xi \rightarrow \infty, 0 \leq \eta \leq h_1 \text{ で } \psi &= -\eta \\ \xi = 0, 0 < \eta < b \text{ で } \psi &= -h_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $h_1 = d_1/d$ で、 d_1 は上流部で水域底面に平行に流れている下層流の厚さである。また、 b は $\xi = 0$ と dividing line がまじわる点である。Dividing line にそって $\psi = -h_1$ であり、ベルヌーイの式が満足されなくてはならない。 ψ, ξ, η を用いてベルヌーイの式を無次元化してかくと、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi d} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 \right\} + \frac{\rho_s g d}{\rho_0 (UR)^2} \eta + \frac{p}{\rho_0 (UR)^2} = \text{const.} \dots\dots\dots (20)$$

となる。ここに、 ρ_s は dividing line 上の密度で一定である。 p は dividing line 上にはたらく圧力であり、その大きさは上部の stagnation zone によって生じる静水圧にひとしく、stagnation zone の水の密度を ρ' とすれば、 $dp = -\rho' g \cdot dz$ である。式 (20) を流線にそってとった無次元距離 s により微分すると、

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{q'^2}{2} \right) = - \left\{ \frac{(\rho_s - \rho') g d}{\rho_0 (UR)^2} \right\} \cdot \frac{d\eta}{ds} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、

$$q'^2 = \frac{1}{\xi^2 d^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) より、

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{q'^2}{2} \right) = - \left\{ \frac{(\rho_s - \rho') g d}{\rho_0 (UR)^2} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ξ が十分に大きい $\xi = R$ の断面と、任意の断面で式 (23) を適用すると、

$$\frac{1}{2} \left(q'^2 - \frac{1}{R^2} \right) = - \frac{(\rho_s - \rho')}{\rho_0 (UR)^2} g d (\eta - h_1) \dots\dots\dots (24)$$

となる。stagnation zone の密度が一定値 ρ_A であるとき、上式は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(q'^2 - \frac{1}{R^2} \right) &= - \frac{(\rho_s - \rho_A)}{\rho_0 (UR)^2} g d (\eta - h_1) \\ &= - \frac{(\rho_s - \rho_A)}{\rho_0} \frac{\beta^{-1}}{d^3} G^{-2} (\eta - h_1) \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

あるいは $1/R^2 \simeq 0$ において、

$$\frac{1}{2} q'^2 = - \frac{(\rho_s - \rho_A)}{\rho_0} \frac{\beta^{-1}}{d^3} G^{-2} (\eta - h_1) \dots\dots\dots (26)$$

つぎに必要なのは、式 (16) を式 (19)~式 (26) の境界条件のもとに解くことである。

4. 基礎方程式の解

式 (16) は、吸込み点より十分上流の位置で、流れが全水深にわたり一様かつ水平に流れるという条件のもとに成り立っている。これは Q/d が、かなり大きい場合、

したがって、 G の値がある程度大きい場合に相当する。しかし、実際の設計で問題となる G の値は 10^{-1} 程度の小さな値をとる。このように小さい値の G の場合、前述のように海水の上層部に stagnation zone が生じ、下層部のみが取水口へ流入することになるが、このときの流れを式 (16) を用いて解明するのに、Kao¹³⁾ にしたがって重ね合わせの方法をとる。すなわち、原点にある吸込み点とはべつに、 $\xi = 0$ の位置で η 軸上の $\eta = b \sim 1$ の間に仮想の吸込み分布を考え、全体の G を大きくして式 (16) を解いたうえ、仮想吸込み口へ流入する部分を stagnation zone でおきかえる方法を用いる。この場合、 b の位置および仮想の吸込み分布を原点における吸込み点に流入する下層の流量が設計流量に一致するようにえらぶ。原点の吸込み点に流入する流量の全流量に対する比率を m とすれば、式 (16) の ψ は次式によりあらわされる。

$$\psi = m \psi_1 + (1 - m) \psi_2 \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 ψ_1 は吸込み点への流れ、 ψ_2 は仮想の吸込み口への流れである。 ψ_1, ψ_2 は、それぞれ、つぎの境界条件を満足する。

ψ_1 に対して

$$\eta = 1, 0 \leq \xi < \infty \text{ で } \psi_1 = -1 \dots\dots\dots (28)$$

$$0 < \eta \leq 1, \xi = 0 \text{ で } \psi_1 = -1 \dots\dots\dots (29)$$

$$\eta = 0, 0 < \xi < \infty \text{ で } \psi_1 = 0 \dots\dots\dots (30)$$

$$0 < \eta < 1, \xi \rightarrow \infty \text{ で } \psi_1 = -\eta \dots\dots\dots (31)$$

ψ_2 に対して

$$\eta = 1, 0 \leq \xi < \infty \text{ で } \psi_2 = -1 \dots\dots\dots (32)$$

$$0 < \eta < 1, \xi \rightarrow \infty \text{ で } \psi_2 = -\eta \dots\dots\dots (33)$$

$$\eta = 0, 0 < \xi < \infty \text{ で } \psi_2 = 0 \dots\dots\dots (34)$$

$$0 < \eta < b, \xi = 0 \text{ で } \psi_2 = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$$b < \eta < 1, \xi = 0 \text{ で } \psi_2 = M(\eta) \dots\dots\dots (36)$$

さて、式 (16) の一般解は、1 つの特解と、右辺を 0 とおいた同次方程式の一般解との和であたえられる。式 (16) の特解は、

$$\psi = -\eta \dots\dots\dots (37)$$

であり、十分に上流における流れをしめすものである。

つぎに、次式の一般解をもとめる。

$$\frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + G^{-2} \psi = 0 \dots\dots\dots (38)$$

$\psi(\xi, \eta) = f(\xi) \cdot g(\eta)$ として変数分離をおこなうと、

$$\begin{aligned} - \frac{1}{g(\eta)} \cdot \frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2} &= \frac{\xi}{f(\xi)} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \cdot \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\} \\ &\quad + \xi G^{-2} = n^2 \pi^2 \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

をうる。これにより、

$$g(\eta) = \sin n \pi \eta \dots\dots\dots (40)$$

また、 $f(\xi)$ は、次式を満足する必要がある。

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{df}{d\xi} + (G^{-2} \xi^2 - n^2 \pi^2) f = 0 \dots\dots\dots (41)$$

上式は $\xi = 0$ を確定特異点とする二階常微分方程式で、

その一般解は Riemann の P -関数により

$$f(\xi) = P \left\{ \begin{matrix} \infty & 0 \\ i\sqrt{a} & iN/4\sqrt{a} \\ -i\sqrt{a} & -iN/4\sqrt{a} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & \xi^2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\} \dots (42)$$

である。ただし、 $a=G^{-2}$ 、 $N=n^2\pi^2$ である。式 (42) はさらに、合流型超幾何関数型に変換することができる。

$$f(\xi) = e^{\frac{i\sqrt{a}\xi^2}{2}} \frac{\xi^2}{2} P \left\{ \begin{matrix} \infty & 0 \\ 0 & 1 + \frac{iN}{4\sqrt{a}} \\ 1 & -\frac{iN}{4\sqrt{a}} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & (-i\sqrt{a}\xi^2) \end{matrix} \right\} \dots (43)$$

$$= \frac{e^{i\frac{\sqrt{a}}{2}\xi^2} \cdot \frac{\xi^2}{2}}{2} F \left(1 + \frac{iN}{4\sqrt{a}}, 0, (-i\sqrt{a}\xi^2) \right) \dots (44)$$

ここに、 $F(\alpha, r, x)$ は合流型超幾何関数で

$$F(\alpha, r, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1)}{k! r(r+1)(r+2)\dots(r+k-1)} x^k \dots (45)$$

である。上式のように式 (41) の一般解がもとめられるが、複素数表示であって、実際計算には不便である。また、級数展開による Frobenius の方法もこの式に関しては適用しえないことはすぐに知れる。それで、以下のように、Perturbation method により近似解を求めることにする。

まず、式 (41) において、 $G^{-2} \ll 1$ のとき

$$f = f_0 + G^{-2}f_1 + (G^{-2})^2f_2 + \dots \dots (46)$$

とし摂動近似により解をもとめる。 f_0, f_1, f_2 etc. は、つぎの各式を解いて求められる。

$$\left\{ \begin{matrix} \ddot{f}_0 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_0 - n^2\pi^2 f_0 = 0 \dots (47a) \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} \ddot{f}_1 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_1 - n^2\pi^2 f_1 = -\xi^2 f_0 \dots (48a) \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} \ddot{f}_2 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_2 - n^2\pi^2 f_2 = -\xi^2 f_1 \dots (49a) \end{matrix} \right.$$

また、式 (41) において $G^{-2} \gg 1$ のときは、

$$\left. \begin{matrix} G^{-2}f = t \\ \sqrt{G^{-2}}\xi = s \\ \varepsilon = 1/G^{-2} \end{matrix} \right\} \dots (50)$$

として

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{1}{s} \frac{dt}{ds} + \left(\varepsilon s^2 - \frac{n^2\pi^2}{G^{-2}} \right) t = 0 \dots (51)$$

を解けばよい。 $G^{-2} \ll 1$ の場合と同様に

$$t = t_0 + \varepsilon t_1 + \varepsilon^2 t_2 + \dots \dots (52)$$

と摂動近似することにより

$$\ddot{t}_0 - \frac{1}{s} \dot{t}_0 - \frac{n^2\pi^2}{G^{-2}} t_0 = 0 \dots (47b)$$

$$\ddot{t}_1 - \frac{1}{s} \dot{t}_1 - \frac{n^2\pi^2}{G^{-2}} t_1 = -s^2 t_0 \dots (48b)$$

$$\ddot{t}_2 - \frac{1}{s} \dot{t}_2 - \frac{n^2\pi^2}{G^{-2}} t_2 = -s^2 t_1 \dots (49b)$$

をとけば関数 t_0, t_1, t_2 が求まる。いま、 (s, t) を $(G^{-2}f, \sqrt{G^{-2}}\xi)$ にもどせば

$$\ddot{f}_0 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_0 - n^2\pi^2 f_0 = 0 \dots (47c)$$

$$\ddot{f}_1 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_1 - n^2\pi^2 f_1 = -(G^{-2})^2 \xi^2 f_0 \dots (48c)$$

$$\ddot{f}_2 - \frac{1}{\xi} \dot{f}_2 - n^2\pi^2 f_2 = -(G^{-2})^2 \xi^2 f_1 \dots (49c)$$

をとけばよい。

(1) 第一次近似解

式 (41) の第一次近似解は、 $G^{-2} \ll 1$ のときには式 (47a) を、 $G^{-2} \gg 1$ のときには式 (47c) を解くことにより求めることができる。式 (47a) と (47c) の両式は、同じものであり、式 (41) において $G^{-2}\xi^2 \ll \pi^2$ なる場合に相当する。

式 (47a)、および式 (47c) の変数をつぎのように変換する。

$$f_0 = \xi z, \quad \xi = n\pi \cdot \xi$$

これにより、式 (47a)、(47c) は

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{dz}{du} - \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) z = 0$$

となる。上式は、Bessel の微分方程式であり、その解は

$$z(u) = A_n I_1(u) + B_n K_1(u)$$

であたえられる。変数を、 f_0, ξ にもどすと式 (47a) および式 (47c) の解として次式をうる。

$$f_0 = A_n \xi I_1(n\pi\xi) + B_n \xi K_1(n\pi\xi) \dots (53)$$

ここに、 A_n, B_n は任意の定数、 $I_1(n\pi\xi), K_1(n\pi\xi)$ は、 $n\pi\xi$ を変数とする変形された Bessel 関数である。

式 (37)、式 (40)、および式 (53) より式 (16) の第一次近似解は、

$$\psi = -\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n \xi I_1(n\pi\xi) + B_n \xi K_1(n\pi\xi) \} \sin n\pi\eta \dots (54)$$

となる。つぎに、上式を用いて ψ_1 および ψ_2 の解を求める。

a) 原点にある吸込み点への流れ ψ_1 の解 式 (31)

により、 $\xi \rightarrow \infty$ で $\psi = -\eta$ であることから、 $\xi I_1(n\pi\xi) \rightarrow \infty, \xi K_1(n\pi\xi) \rightarrow 0$ なることを考慮すると、 A_n は 0 でなくてはならない。よって、式 (54) は

$$\psi_1 = -\eta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \dots (55)$$

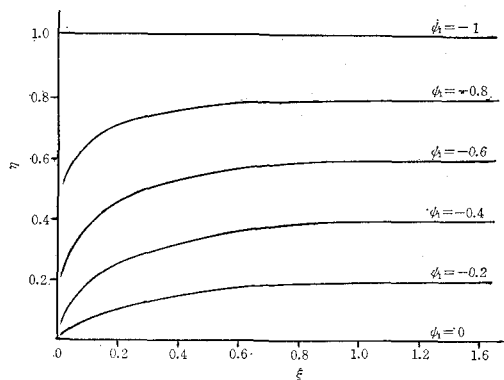
となる。また、式 (29) の条件により

$$-1 + \eta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \right)_{\xi=0} \dots (56)$$

となる。式 (56) の左辺はフーリエ変換により

$$-1 + \eta = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi\eta$$

と書ける。また、式 (56) の右辺の $\xi \cdot K_1(n\pi\xi)$ は $\xi=0$ で $2/n\pi$ となる。その結果、定数 $B_n = -1$ となることわかる。したがって、原点にある吸込み点への流れに

図-3 原点の吸込み点への流れ ψ_1 

対する第一次近似解は次式によってあたえられる。

$$\psi_1 = -\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \quad \dots\dots\dots(57)$$

この式は、 ψ_1 が満足すべき他の境界条件、式 (28)、(30) の各式をも満たすことは容易にしれる。図-3 は式 (57) を数値計算した結果をしめすものである。

b) $\xi=0$ において仮想した吸込み点への流れ ψ_2 の解式 (54) において、式 (33) の条件を考慮すると、a) の場合と同様、 $A_n=0$ となり、

$$\psi_2 = -\eta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \quad \dots\dots\dots(58)$$

となる。

ψ_2 に対しては、 $M(\eta)$ をきめる必要があるが、ここでは、つぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} M &= -1, \quad b < \eta < 1, \quad \xi = 0 \\ M &= 0, \quad 0 < \eta < b, \quad \xi = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(59)$$

$M(\eta)$ をどのような型にえらぶかは重要なことではなく、問題は前にのべた境界条件を満足する ψ をあたえる吸込みの分布を見い出すことである。式 (59) を式 (58) に代入すると、次式をうる。

$$M + \eta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \right)_{\xi=0} \quad \dots\dots\dots(60)$$

上式の左辺はフーリエ変換により

$$M + \eta = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos n\pi b \cdot \sin n\pi\eta$$

となる。また、右辺の $\xi K_1(n\pi\xi)$ は $\xi=0$ で $2/n\pi$ となることから、 $B_n = -\cos n\pi b$ である。ゆえに $\xi=0$ において仮想した吸込み点への流れの解は次式によってあたえられる。

$$\psi_2 = -\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \cdot \cos n\pi b \cdot \sin n\pi\eta \quad \dots\dots\dots(61)$$

式 (61) は、 ψ_2 に対する境界条件式 (32)~式 (35) を満足している。

c) ψ_1 と ψ_2 を重さね合わせた流れ ψ_1 と ψ_2 を式

(27) により合成した流れ、 ψ は式 (57) および式 (61) により

$$\begin{aligned} \psi = & -\eta - m \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \\ & - (1-m) \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot K_1(n\pi\xi) \cos n\pi b \sin n\pi\eta \\ & \dots\dots\dots(62) \end{aligned}$$

となる。式 (62) を η で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = & -1 - m \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot n\pi \cdot K_1(n\pi\xi) \cdot \cos n\pi\eta \\ & - (1-m) \sum_{n=1}^{\infty} \xi \cdot n\pi \cdot K_1(n\pi\xi) \cos n\pi b \cdot \cos n\pi\eta \\ & \dots\dots\dots(63) \end{aligned}$$

となる。

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $n\pi \cdot K_1(n\pi\xi) \rightarrow 0$ となり、式 (63) の右辺の2項および3項は0に収れんする。つぎに、式 (62) を ξ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = & -m \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_1(n\pi\xi) + \xi \cdot \frac{d}{d\xi} \{K_1(n\pi\xi)\} \right] \sin n\pi\eta \\ & - (1-m) \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_1(n\pi\xi) + \xi \cdot \frac{d}{d\xi} \{K_1(n\pi\xi)\} \right] \\ & \cdot \cos n\pi b \cdot \sin n\pi\eta \quad \dots\dots\dots(64) \end{aligned}$$

となる。

しかるに、

$$K_1(n\pi\xi) + \xi \cdot \frac{d}{d\xi} \{K_1(n\pi\xi)\} = -n\pi\xi K_0(n\pi\xi) \quad \dots\dots\dots(65)$$

である。式 (65) を式 (64) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = & m \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\xi \cdot K_0(n\pi\xi) \sin n\pi\eta \\ & + (1-m) \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\xi \cdot K_0(n\pi\xi) \cos n\pi b \cdot \sin n\pi\eta \\ & \dots\dots\dots(66) \end{aligned}$$

をうる。

$n \rightarrow \infty$ のとき、上式の右辺は0に収れんする。

式 (62)、式 (63)、および式 (66) を用いて、流れ内の任意の点の ψ 、 $\partial\psi/\partial\eta$ 、および $\partial\psi/\partial\xi$ 、したがって、式 (26) の左辺の q^2 を計算することができる。

G および β があたえられ、 G の分子である全流量の Q うち $m\%$ のみが水路底の吸込み点に流入する場合の上、下両層の dividing line は、つぎの手順によってもとめることができる。すなわち、

1) 式 (62) において、ある流量配分比 m に対して b を仮定し、任意の ξ に対し、 $\psi = -m$ である η を計算する。

2) 1) でえられた任意の一对の (ξ, η) に対して、式 (26) の右辺を計算する。

3) 式 (63) および式 (66) により、2) とおなじ (ξ, η) における $\partial\psi/\partial\eta$ 、 $\partial\psi/\partial\xi$ を計算し、式 (26) の左辺を求める。

4) 3) と 4) の結果を比較し、両者が一致するまで b

の仮定をしないし、以上の計算をくりかえす。

以上の計算において ρ_s は $\eta=m$ における水の密度を用いる。stagnation zone での密度 ρ' をいくらにとるかにについては、なお詳細な検討を必要とするが、予備設計の段階においては、 h_1 あるいは m より上部の stagnation layer の平均密度を用いてもよいと考えられる。

(2) 第二次近似解

つぎに第二次近似解をもとめる。式 (48 a), または (48 c) 式の右边を 0 とした同次方程式の特解は、第一近似と同様に、 $u_1=\pi I_1(n\pi\xi)$, $u_2=\xi K_1(n\pi\xi)$ である。この式の wronskian を計算すれば、

$$w(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \xi I_1 & \xi K_1 \\ (I_1 + n\pi\xi I_1') & (K_1 + n\pi\xi K_1') \end{vmatrix} \\ = n\pi\xi^2 [I_1 \cdot K_1' - I_1' \cdot K_1] = -\xi$$

となる。したがって、式 (48 a), または、式 (48 c) の特解は、 R を式 (48) の微分方程式の右边の関数として

$$u_1 \int \frac{Ru_2}{w(u_1, u_2)} d\xi = u_1 \int \frac{(G^{-2})^2 \xi^2 f \cdot u_2}{\xi} d\xi \\ = (G^{-2})^2 \xi I_1 \int \xi^3 K_1^2 d\xi \dots (67) \\ u_2 \int \frac{Ru_1}{w(u_1, u_2)} d\xi = u_2 \int \frac{(G^{-2})^2 \xi^2 f \cdot u_1}{\xi} d\xi \\ = (G^{-2})^2 \xi K_1 \int \xi^3 K_1 I_1 d\xi \\ \dots \dots \dots (68)$$

となり、式 (41) の第二次近似の一般解は

$$f_1(\xi) = C_1 \xi I_1(n\pi\xi) + C_2 \xi K_1(n\pi\xi) + (G^{-4})^\delta \xi I_1 \\ \cdot \int \xi^3 K_1^2 d\xi + (G^{-4})^\delta \xi K_1 \int \xi^3 I_1 K_1 d\xi \dots \dots (69)$$

ただし、上式で δ は $G^{-2} \ll 1$ のときは、 $\delta=0$, $G^{-2} \gg 1$ のときは $\delta=1$ としなければならない。式 (69), 式 (37), 式 (40) により式 (16) の第 2 次近似一般解は次式によってあたえられる。

$$\psi = -\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{1n} \xi I_1 + C_{2n} \xi K_1 + (G^{-4})^\delta \xi I_1 \right. \\ \left. \cdot \int \xi^3 K_1^2 d\xi + (G^{-4})^\delta \xi K_1 \int \xi^3 I_1 K_1 d\xi \right\} \sin n\pi\eta_1 \\ \dots \dots \dots (70)$$

ここに、 $I_1=I_1(n\pi\xi)$, $K_1=K_1(n\pi\xi)$ を意味する。

式 (31), 式 (33) により、 $\xi \rightarrow \infty$ で式 (70) の右边の第 2 項は 0 でなくてはならない。 $n\pi\xi$ が大きいとき、

$$I_1(n\pi\xi) \simeq \frac{0.3989 e^{-n\pi\xi}}{(n\pi\xi)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{8n\pi\xi} \right) \dots \dots \dots (71)$$

また、

$$K_1(n\pi\xi) \simeq \frac{1.2533 e^{-n\pi\xi}}{(n\pi\xi)^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{8n\pi\xi} \right) \dots \dots \dots (72)$$

である¹⁴⁾。式 (71), (72) を用いて、式 (70) の右边第 2 項内の積分項を計算すると、

$$\xi K_1 \int \xi^3 I_1 K_1 d\xi \simeq \frac{1.2533}{(n\pi)^{1/2}} e^{-n\pi\xi} \left\{ \frac{0.167 \xi^{3.5}}{n\pi} \right.$$

$$+ \frac{0.0625 \xi^{2.5}}{(n\pi)^2} - \frac{0.0702}{(n\pi)^3} \xi^{1.5} - \frac{0.0264}{(n\pi)^4} \xi^{0.5} \Big\} \\ \dots \dots \dots (73)$$

また、

$$\xi I_1 \int \xi^3 K_1^2 d\xi \simeq -\frac{0.3989}{2(n\pi)^{2.5}} e^{-n\pi\xi} \left\{ 1.572 \xi^{2.5} \right. \\ \left. + \frac{2.162}{n\pi} \xi^{1.5} - \frac{0.29 \xi^{0.5}}{(n\pi)^2} - \frac{0.515}{(n\pi)^3 \xi^{1/2}} \right\} \\ \dots \dots \dots (74)$$

$\xi \rightarrow \infty$ のとき、式 (73), 式 (74) は 0 に収れんする。また、 $\xi \rightarrow \infty$ のとき、 $\xi I_1(n\pi\xi) \rightarrow \infty$, $\xi K_1(n\pi\xi) \rightarrow 0$ なることを考慮すると、式 (70) の ψ が式 (31), または、式 (33) の条件を満たすためには、右边の C_{1n} は 0 でなくてはならない。ゆえに、式 (16) の第 2 近似一般解は、

$$\psi = -\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \xi K_1 + (G^{-4})^\delta \xi I_1 \int \xi^3 K_1^2 d\xi \right. \\ \left. + (G^{-4})^\delta \xi K_1 \int \xi^3 I_1 K_1 d\xi \right\} \sin n\pi\eta \dots \dots (75)$$

となる。ただし、 δ は $G^{-2} \ll 1$ のときには $\delta=0$, $G^{-2} \gg 1$ のときは $\delta=1$ である。 C_n は境界条件によりきまる定数である。

5. おわりに

以上、密度が水表面より底部にむかって直線的に増加する流体が、水路底の吸込み点に流入する場合についての水理的検討をおこなった。得られた厳密解は実用上不便なため、第 1 次および第 2 次の近似解を求めたが、第 2 近似解については一般解を提示するにとどめた。第 2 近似解の定数の決定、厳密解へのより進んだアプローチ、あるいは数値計算例については、機会をあらためて報告したいと考えている。また、本論においては、流速の大きさにかかわらず密度成層状態が安定にたもたれるものとして考察をすすめたが、深層取水の流れを検討する場合、流入速度とともに密度成層の安定性に対する考慮もあわせておこなわなくてはならないが、これらについても別途論じてみたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 千秋信一：“火力発電所の深層取水”，発電水力講習会テキスト，第 8 回，昭和 41 年。
- 2) Harleman, D.F., Gooch, R.S. & Ippen, A.T.：“Submerged sluice control of stratified flow”，Proc. of A.S.C.E. Apr. 1958.
- 3) Huber, D.G. & Reid, T.L.：“Experimental study of two-layered flow through a sink”，Proc. of A.S.C.E. Jan. 1966.
- 4) Harleman, D.R.F. and Elder, R.A.：“Withdrawal from two-layer stratified flows”，Proc. of A.S.C.E. July 1965.
- 5) 千秋信一・和田 明：“火力発電所冷却水の深層取水に関する研究”，電研レポート Vol. 3, 1965.
- 6) Yih, C.S., O'Dill, W. & Debler, W.R.：“Prevention of stagnation zones in flows of stratified or a rotating

- fluid", Proc. of 4th U.S. Natl. Congr. App. Mech. 1441-1453, (1962).
- 7) Debler, W.R.: "Stratified flow into a line sink", Proc. of A.S.C.E. July 1959.
- 8) Kao, T.W.: "A free-stream line solution for stratified flow into a line sink", Jour. of Fluid Mech. Vol. 21, Part 3, 1965.
- 9) Long, R.R.: "Sources and sinks at the axis of a rotating liquid", Q.J.M.A.M., Vol. 9, 1956.
- 10) 6) に同じ.
- 11) Hom-ma, M. & Horikawa, K. "Experimental studies on the cooling water intake system for the atomic power plant at Tokai, Japan", Coastal Engineering in Japan, Vol. V, 1962.
- 12) 6) に同じ.
- 13) 8) に同じ.
- 14) McLachlan, N.W.: "Bessel function for Engineers", p. 220~221, Oxford, 1955.
-