

二層流の風による混合に関する研究

岸 力*・加 藤 正 進**

1. 概 要

吹送流によって生ずる塩水淡水密度流の混合現象を解明することは、工業用水を確保する目的で造られる河口湖などにおいて非常に重要である。密度流の混合現象を考察する場合鉛直安定度を示す無次元量であるリチャードソン数

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \left/ \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right. \dots\dots\dots (1)$$

の占める役割は非常に重要である。すなわちリチャードソン数が大きければ鉛直安定度は高く、したがって混合現象も起こりにくいと考えられる。

本研究では密度流における混合現象をリチャードソン数に注目し、クーリガン流に混入速度を用いた場合と、渦動拡散の考えに基づいた場合との下層塩分の混入量をリチャードソン数の関数で示す実験式を得た。

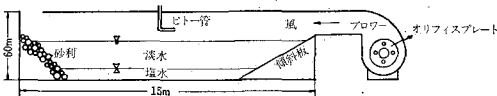
2. 実験装置および測定方法

実験に用いた風洞付水路は図-1に示すような片面ガラス張りの全長 15 m、幅 40 cm、高さ 60 cm のものである。

水路床は水平である。風速はオリフィス プレートの径を変えることにより変化し、水路中央においてピトー管を用いて測定された。流速はキシロール (C₆H₄(CH₃)₂) 比重 0.875) と四塩化炭素 (C Cl₄ 比重 1.594) の混合液に少量のアスファルトを混ぜて作られた油滴の移動時間より計算された。塩分濃度分布は水路中央において約 1 cm 間隔で測定し、濃度の測定には電導度計を用いた。電導度計は 1~10⁶ μS/cm まで測定可能で有効数字は 3 けたである。

塩水淡水の二重層は水路内にあらかじめ所定の水深まで淡水を入れておき、塩水を水路床から微流速で注入し淡水と置換させることにより作られた。境界面付

図-1 実験装置



近に濃度勾配を生ぜしめるためには、上層下層の中間で濃度の異なる塩水を注入した。

密度は塩分の含有量、水温により変化する。Knudsen によると海水の比重は塩分 1‰ につき 0.0008 の割合で増加することが確かめられている。これは水温 17.5℃ の測定値である。本実験において水温はほとんど 15℃ であったが、Knudsen の値をそのまま用い密度の換算を行なった。水深による水温の変化は本実験で用いた水深では無視できると考え、特に考慮に入らなかった。

3. 堺界面の定義および計算方法

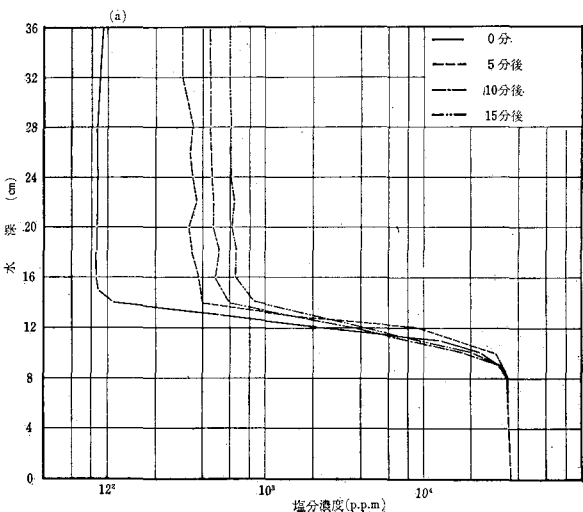
塩水淡水の密度流において密度が境界面で不連続になることは考えられず、必ず密度勾配を有する層が存在する。このような場合どの面を境界面と定義するかは、混入量、リチャードソン数の計算の際に問題となる。

図-2 (a)、(b) に鉛直濃度分布の測定例を示す。(a) は濃度勾配が大きく鉛直安定度が高い例であり、(b) は鉛直安定度が低い例である。

われわれは、下層の密度と上層の密度の平均密度を有する面を境界面と定義し、リチャードソン数を計算した。

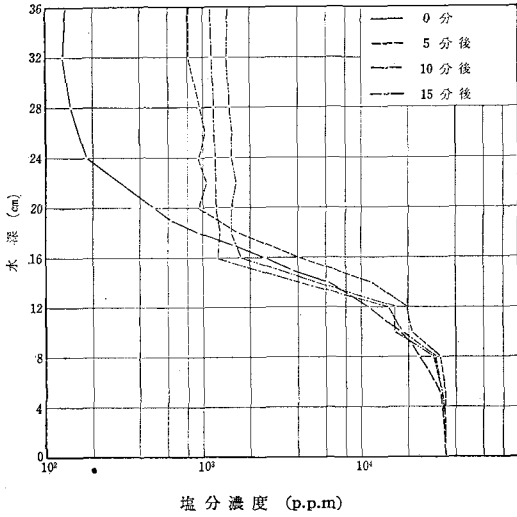
(a) の場合のように比較的鉛直安定度の高い場合には、上層水深はほとんど変化なく (a) の例では y=14 cm

図-2 鉛直濃度分布の測定例 (a)



* 正会員 工博 北海道大学教授 土木工学科
** 学生会員 北海道大学大学院

(b)



で濃度は急変する。そこで混入量の計算には $y=14$ cm より上層での濃度変化を用いた。(b) の場合のように鉛直安定度が低い場合は、時間とともに濃度勾配は大きくなり、(b) の場合は、10 分後で $y=16$ cm にて濃度の急変が起こる。(b) の例では、0 分から 10 分までは $y=20$ cm, 10 分から 15 分の間では $y=16$ cm より上層に混入した塩分量を調べた。

4. 吹送流乱流速度分布の測定

吹送流の乱流速度分布の研究は Baines と Knapp, Francis, Reid らにより行なわれている。われわれは吹送流の乱流速度分布を、淡水層だけの場合と、塩水淡水二層の場合について測定した。実験結果を図-3, 図-4 に示す。

これによると淡水層だけの場合と、淡水塩水二層の場合の分布形状はかなり類似していることが認められ、逆流の流速分布はかなり一様である。前に述べた境界面の定義にしたがって計算されるリチャードソン数は速度勾配の項を含んでいるから、境界面付近での速度勾配が問

図-3 吹送流の乱流速度分布
(淡水層一層)

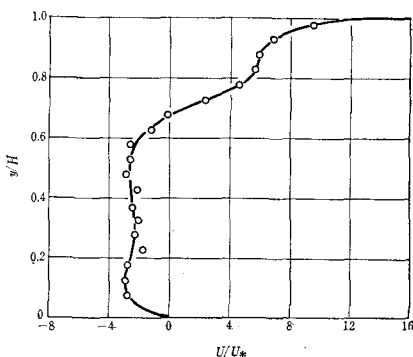
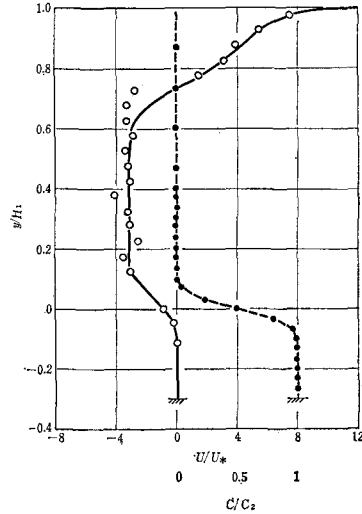


図-4 吹送流の乱流速度分布および鉛直濃度分布



題となる。図-4 より境界面付近での速度分布はほとんど直線と仮定できるから、速度勾配はつぎのように表わされる。

$$\frac{du}{dy} = 20 \frac{u_{*s}}{H_i} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を用いて以後のリチャードソン数は計算された(一部は第22回土木学会年次学術講演会にて発表済)。

5. 境界面における密度流の安定条件

密度流の安定に関する研究は古くから行なわれている。

密度分布および流速分布が与えられた場合の安定問題は Taylor らにより研究されている。Taylor によると内部波の安定条件はリチャードソン数により決定され、その値は密度分布および流速分布により異なる。

Keulegan は内部波のエネルギーが下層流体の粘性により定常的に消費されてしまうと考え、粘性を考慮した内部波の安定条件を解析し安定条件を示す無次元量としていわゆるクーリガン数

$$\theta = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_1} \nu_2 g \right)^{1/3} / u \quad \dots\dots\dots (3)$$

を提案した。彼は上層流の実験結果から限界時のクーリガン数として、図-5 に示すような結果を得た。この結果レイノルズ数を $Re_1 = u_1 c h_1 / \nu_1$ とすると、

$$\left. \begin{array}{ll} Re_1 < 1800 \text{ に対し } \theta_c = 0.127 \\ Re_1 > 1800 \text{ に対し } \theta_c = 0.178 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。内部フルード数: 内部レイノルズ数を式(5)で表わし式(3)で示されるクーリガン数を変形すると、式(6)が得られる。

$$F_i = u \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho_1} g h_2}, \quad Re_2 = u h_2 / \nu_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

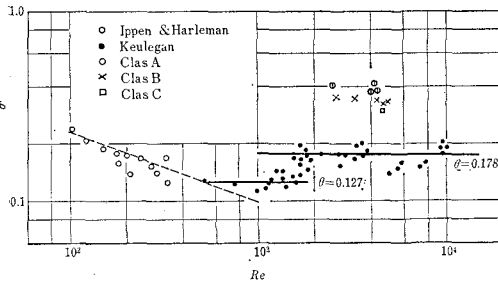
$$\theta^3 = 1/(F_i)^2 R_{e2} \dots\dots\dots (6)$$

Ippen と Harleman は下層流の実験より限界時には内部フルード数は $F_i=1$ となることから、クーリガン数は内部レイノルズ数に逆比例するとした。この実験結果を図-5 に示す。

われわれは吹送流の実験より限界時のクーリガン数がどのようにあらわされるかを調べた。風により境界面付近に生ずる逆流々速がある限界を越えると境界面には内部波が生じさらに流速が増大すると内部波は破碎し、下層の塩分は上層に混入し拡散する。われわれは観察により境界面に生ずる内部波の状態をつぎのように分類した。

- Class A. : 内部波がかすかに認められる。
- Class B. : 内部波をはっきり認められる。
- Class C. : 内部波がわずかに碎波する。

図-5 クーリガン数とレイノルズ数の関係



このような観察に基づいて得られた限界クーリガン数を、Keulegan, Ippen & Harleman の実験結果と合わせて図-5 に示す。この結果、 $Re_{e1}=u_{1c}h_1/\nu_1$ が $2 \times 10^3 < Re_{e1} < 5 \times 10^3$ の範囲においてつぎの結果を得た。

- Class A に対し $\theta_c=0.40$
 - Class B に対し $\theta_c=0.34$
 - Class C に対し $\theta_c=0.30$
- (7)

本実験で得られた限界クーリガン数は、Keulegan が実験で得た値よりかなり大きな値となっている。すなわち他の条件が同じ場合、流速が小さな場合でも境界面に内部波が生ずることになる。この実験例でのリチャードソン数とクーリガン数との関係を調べてみると、表-1 となる。

表-1

θ	0.424	0.381	0.377	0.338	0.324	0.329	0.295
R_i	41.02	12.02	41.63	16.20	31.73	8.86	20.41
Class	A	A	A	B	B	B	C

表-1 によると、クーリガン数とリチャードソン数との間には明らかな関係は認められなかった。

本実験で得られた限界クーリガン数と、Keulegan が得た値の相異の原因としてはつぎのようなことが考えられる。本実験においては、限界クーリガン数を決定する

にあたり境界面付近の逆流々速を用いたのに対し、Keulegan は上層流の平均流速を用いて決定している。彼自身その論文中で述べているように、境界面付近では流速は減少して平均流速よりかなり小さな値となる。それゆえ境界面付近の流速を用いて限界クーリガン数を決定するならばその値は彼が示した値よりも大きくなるであろう。また Keulegan は上層流の実験から限界クーリガン数を決定したが、本実験では吹送流により決定した。この実験条件の相違にも原因があると考えられる。すなわち、境界面付近での流速分布がそれぞれ異なるためとも考えられるし、また吹送流の場合水面に生ずる風波が境界面の安定にある程度の影響を与えるとも考えられる。

6. 混入速度とリチャードソン数との関係

前にも述べたが、限界クーリガン数より小さなクーリガン数を有する場合には、内部波は碎波し下層の塩分が上層に混入し始める。Keulegan は混入速度としてつぎの式を用いている。

$$u_m = \frac{Q}{A_i} \frac{dc}{c_2} \frac{1}{dt} \dots\dots\dots (8)$$

u_m : 下層塩分の混入速度

Q : 上層の全体積

A_i : 境界面の全面積

dc/dt : 時間後における上層 塩分濃度の増加量

c_2 : 下層の塩分濃度

彼は実験により下層塩分の混入速度が流速に比例することを調べ、混入速度をつぎの実験式で示した。

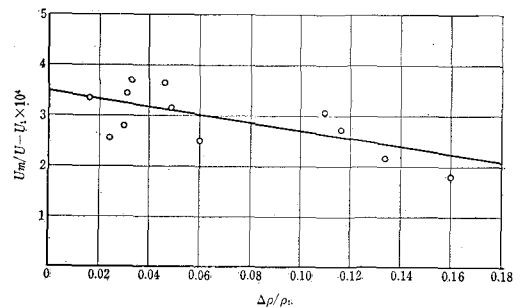
$$u_m = 3.5 \times 10^{-4} (u - u_1) \dots\dots\dots (9)$$

u_m : 下層塩分の混入速度

u : 上層の平均流速

u_1 : わずかに混合する時の上層平均流速

図-6 混入速度と密度差の関係 (Keulegan)

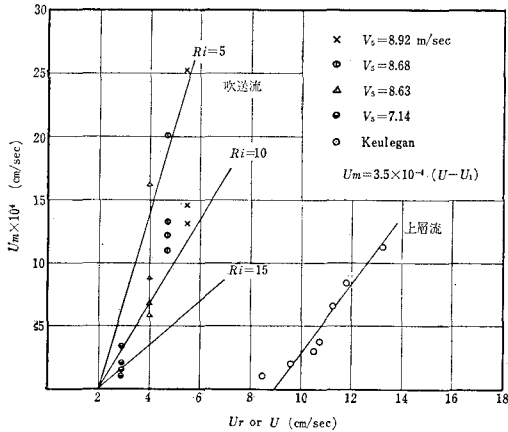


彼は密度差 $\Delta\rho/\rho_1$ と式 (9) における係数の関係を示しているが、それを図-6 に示す。これによると密度差が大きくなると式 (9) の係数は減少する傾向にある。

このことは、リチャードソン数が大きい場合には混入速度は減少することを意味するものである。

われわれは混入速度とリチャードソン数との関係について調べてみた。まず先に示した限界クーリガン数の妥当性をうらづけるため以下の考察をする。下層塩分の混入速度と境界面付近の逆流々速との関係を図-7に示す。

図-7 混入速度と流速の関係



これによると、限界時の逆流々速は約 2 cm/sec と推定される。先に述べたように、内部波がわずかに砕波する状態 Class C では、 $\theta_c = 0.30$ であるから、 $\nu_2 = 0.01$ cm²/sec, $g = 980$ cm/sec², $\Delta\rho/\rho_1 = 0.03$ として逆流々速を計算すると、

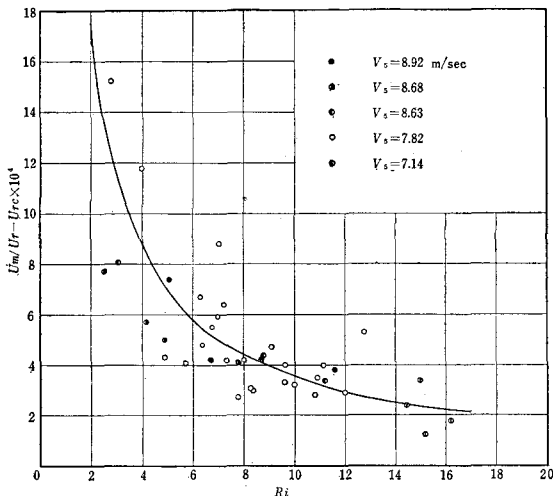
$$u_r = (0.01 \times 980 \times 0.03)^{1/3} / 0.30 = 2.2 \text{ cm/sec}$$

となり、推定値とほぼ一致する。このことから限界クーリガン数の値は妥当であると思われる。

下層塩分の混入速度 u_m とリチャードソン数 R_i との間には次元的に考え、つぎの関係が成立するはずである。

$$u_m = f(R_i)(u - u_c) \quad (10)$$

図-8 混入速度とリチャードソン数の関係



すなわち、Keulegan による式 (9) の係数はリチャードソン数の関数で示されるべきである。この考えに基づき実験より得られた混入速度とリチャードソン数との関係を調べると図-8 になる。図-8 よりつぎの実験式を得る。

$$u_m = 3.5 \times 10^{-4} R_i^{-1} (u_r - u_{rc}) \quad (11)$$

7. 渦動拡散係数とリチャードソン数との関係

乱れた流れにおいては乱れによる速度の変動により、渦動拡散が生ずる。ここでは安定限界を越えて内部波が破碎し、下層の塩分が上層へまい上げられ拡散する過程を渦動拡散と考えて考察する。

いま、 y 方向の変動速度 v' による輸送を考え、変動速度 v' を有する水塊が δt 時間に平均の距離 l だけ輸送されると考えると、単位面積当り単位時間に y 方向に乱れにより輸送される平均の塩分量 q は次式で表わされる。

$$q = -\overline{v'l} \frac{\partial \overline{c(y, t)}}{\partial y} \quad (12)$$

式 (12) において、 $\overline{v'l}$ は渦動拡散係数でありこれを ε で表わし、濃度 $c(y, t)$ を c と書きなおすと式 (12) は次式に書き換えられる。

$$q = -\varepsilon \frac{\partial c}{\partial y} \quad (13)$$

Munk と Anderson は、渦動拡散係数 ε はリチャードソン数の関数であらわされると考え、

$$\left. \begin{array}{l} R_i \rightarrow 0 \text{ の時 } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \\ R_i \rightarrow \infty \text{ の時 } \varepsilon \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

式 (14) で示される条件より渦動拡散係数をつぎの式で与えた。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + a R_i)^{-b} \quad (15)$$

ここで a, b は正の定数であり、 ε_0 は均質流体の渦動拡散係数すなわち渦動粘性係数である。

Munk, Anderson は Jacobsen および Taylor の観測値を整理して、つぎのような渦動拡散係数が妥当であるとした。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + 3.33 R_i)^{-3/2} \quad (16)$$

南, 田中は実験結果より係数 a の値は 0.75~1.542 の範囲であったと報告している。

Prichard は理論および James River での観測値より、係数 a, b を定め次式で示している。

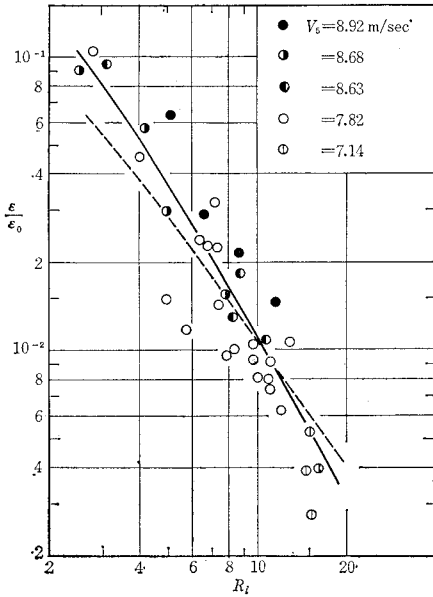
$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + 0.276 R_i)^{-2} \quad (17)$$

われわれの吹送流の実験より得られた結果を図-9に示す。均質流体の渦動拡散係数 ε_0 はつぎのように計算された。水路床付近での流速分布は対数分布をなしていると考え、 ε_0 は次式で表わされる。

$$\varepsilon_0 = \kappa u_* b y \quad (18)$$

水面に働くせん断力 τ_s と水路床に働くせん断力 τ_b の比 $m = \tau_b / \tau_s$ は流れが乱流である場合には $m = 0.1$ 程度

図-9 渦動拡散係数とチャードソン数の関係



であることが Von Dorn らにより報告されている。 $m = 0.1$, $\kappa = 0.4$ とすれば式 (18) は次式となる。

$$\epsilon_0 = 0.1265 u_{*s} y \dots\dots\dots (19)$$

われわれは実験により静水面上 5 cm の点での風速 V_s と、水面摩擦速度 u_{*s} との関係として次式を得た。

$$u_{*s} = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} = 1.289 \times 10^{-3} V_s \dots\dots\dots (20)$$

また 図-3 に示した吹送流乱流速度分布の測定により、対数分布が成立するのは $y = 0.1 H_1$ 程度までと考えられるから、 $y = 1/2 \times 0.1 \times H_1$ と考え渦動拡散係数 ϵ_0 の平均値として次式を得る。

$$\epsilon_0 = 8.15 \times 10^{-6} H_1 \cdot V_s \dots\dots\dots (21)$$

図-9 の実線 (a) は係数 $b=2$ 、破線 (b) は $b=3/2$ の最も妥当な曲線である。実験式として次式を得る。

$$(a) \quad q = -\epsilon_0 (1 + 0.848 R_i)^{-2} \frac{dc}{dy} \dots\dots\dots (22)$$

$$(b) \quad q = -\epsilon_0 (1 + 195.5 R_i)^{-3/2} \frac{dc}{dy} \dots\dots\dots (23)$$

図-9 から判断すれば (a) 曲線の方が実験値をよくとらえているように思われる。

8. 実測値との比較

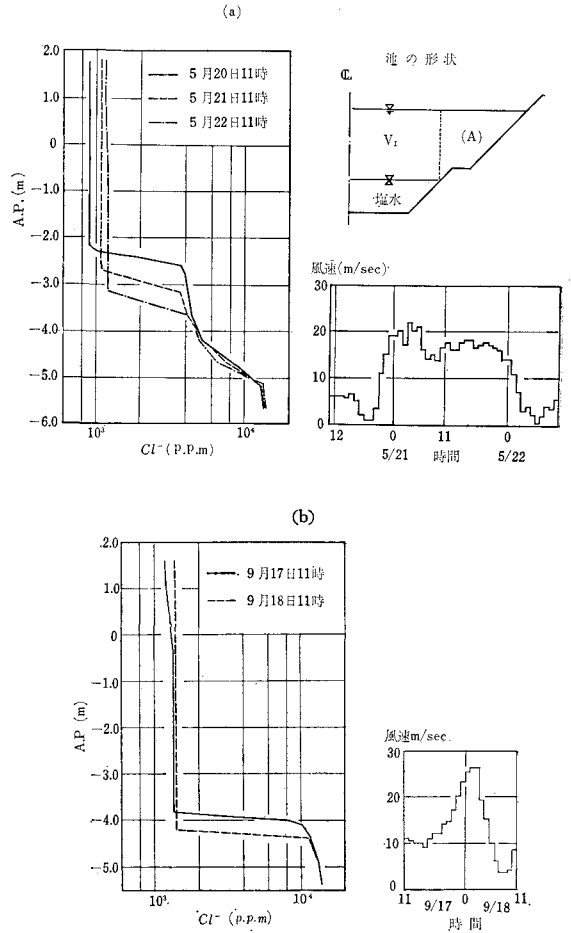
渦動拡散の考えに基づき得られた実験式を用い、小櫃川河口のモデル池での観測値を例にとり下層塩分の混入量を推定してみる。モデル池での観測値を図-10 (a), (b) に示す。

(1) 例 1

岸は風速と風により影響される表層水深を調べ次式を提案している。

$$H_1 = 5 \log_{10} V - 1.0 \dots\dots\dots (24)$$

図-10 モデル池の観測値



この例では表層水深は 4 m であるから、10 m/sec 以上の風が問題となる。平均風速は 17 m/sec と考えられ、池底は A.P. -8.10 m であるから全水深は 9.87 m である。風速は水面からの高さにより変化するが近似的に式 (20) を用い、式 (21) より ϵ_0 を計算すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.15 \times 10^{-6} \times 4.00 \times 10^2 \times 17 \times 10^2 \\ &= 5.542 \text{ cm}^2/\text{sec} \end{aligned}$$

下層を塩素イオン濃度 4000 ppm 付近と考えると、境界面での鉛直安定度は、 $1/\rho \cdot d\rho/dy = 1.623 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}$ であり、速度勾配としては本実験による式 (2) が当てはまるとするとリチャードソン数は $R_i = 13.255$ となる。境界面の濃度勾配は $dc/dy = 8.90 \times 10^{-5}$ であるから式 (22) を用いて単位時間単位面積を通り輸送される塩分量を計算すると、

$$\begin{aligned} q &= 5.542 \times (1 + 13.255)^{-2} \times 8.90 \times 10^{-5} \\ &= 3.292 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

図より 10 m/sec 以上の風が連続して 29 時間吹いているから、断面 1 m^2 の単位水柱を考えると、下層塩分の輸送量は、

$$Q' = 3.292 \times 10^{-6} \times 10^4 \times 29 \times 3600 = 3438 \text{ (g)}$$

モデル池の形状は図に示されるように逆円錐形をなしており図 (A) の部分も一様濃度になるから V_0 を表層の全体積, V_1 を (A) の部分を除いた体積とすると,

$$V_1/V_0 = 4200/11400 = 0.372$$

となるので, この補正を行ない真の輸送量を求めると,

$$Q = 3438 \times 0.372 = 1279 \text{ (g)}$$

実測値より輸送量を計算すれば, $Q = 1202 \text{ (g)}$ であるから推定値とかなりの一致をみる。

(2) 例 2

例 1 と同じ方法で下層塩分の輸送量を推定する。

平均風速 17 m/sec, 上層水深 5.50 m であるから

$$\epsilon_0 = 8.15 \times 10^{-6} \times 17 \times 10^2 \times 5.50 \times 10^2$$

$$= 7.62 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

鉛直安定度は $1/\rho \cdot d\rho/dy = 1.01 \times 10^{-3}$ であるから, $R_i = 123.7$ となる。境界面の濃度勾配は $dc/dy = 5.6 \times 10^{-4}$ であるから

$$q = 7.62(1 + 123.7)^{-2} \times 5.6 \times 10^{-4} = 3.807 \times 10^{-7}$$

10 m/sec 以上の風は 19 時間連続しているから,

$$Q' = 3.807 \times 10^{-7} \times 10^4 \times 19 \times 3600 = 260.4 \dots \text{(g)}$$

池の形状を考え補正すると,

$$Q = 0.314 \times 260.4 = 86.22 \text{ (g)}$$

実測値より計算される輸送量は $Q = 468 \text{ (g)}$ であるから推定値はかなり小さい。式 (23) を用いると $Q = 875.2 \text{ (g)}$ となり実測値より大きくなる。この不一致は, リチャードソン数の大きさによるものと考えられる。すなわち, この例では $R_i = 123.7$ という大きな値であり, われわれの実験値の範囲外にあるため, 曲線を延長しなければならないからであろう。

9. あとがき

密度流の混合現象をリチャードソン数に注目し実験的

に考察した結果, リチャードソン数が混合現象におよぼす影響は大であり, 塩分の輸送量を考える場合リチャードソン数を含む関数で考えなければならないであろう。

実測値との比較の結果, リチャードソン数がある程度小さければ本実験で得られた実験式を用いて計算される下層塩分の輸送量はかなり実測と一致した。しかし, リチャードソン数が大きな場合には実測値との差はかなりあった。

最後に, 本論文作製に当り終始協力していただいた本学 4 年生工藤君に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Keulegan, G.H. : Interfacial instability and mixing in stratified flows. Jour. of Res. of the National Bureau of Standards, Vol. 43, Nov. (1949)
- 2) Ippen, A.T. and Harleman, D.R.F. : Steady-state characteristics of subsurface flow, Gravitywave symposium, Nat. Bur. of Standards. Circulation, 521 (1951)
- 3) Munk, W.H. and Anderson E.R. : Notes on a theory of the thermocline, Jour. of Marine Research, Vol. VII (1948)
- 4) Prichard, D.W. : The movement and mixing of Contaminants in tidal estuaries, Waste disposal in the Marine environment, Pergamon Press
- 5) 南勲・田中雅史 : 定常流における塩分の鉛直分布について, 第 12 回海岸工学講演会講演集 (1965)
- 6) 岸力 : 河口湖二層流の安定に関する研究一風による二層流の混合, 河口湖開発調査委員会研究報告
- 7) 岸力・加藤正進・小野正二 : 吹送流の乱流速度分布と二層流の混合に関する研究, 第 22 回土木学会年次学術講演会講演概要 (1967)
- 8) 嶋祐之 : 密度流論, 水工学シリーズ 65-11 (1965)
- 9) 岩崎敏夫 : 密度流の諸問題, 水工学に関する夏期研修会講義集 (1966)