密 度 流 の 問 題 (2)

——古 典 的 理 論 の 検 討——

浜　田　徳　一*

1. 有限振幅の内波

(1) permanent type の時の基本方程式

問題は2次元非粘性非回転とする。座標軸のとり方は静止界面において水平にx軸，それに垂直上向きにy軸をとる。肩文字(1) は上層流体についての諸量，(2) は下層流体についての諸量を示す。

$$u^{(i)}=\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial x},\quad v^{(i)}=\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial y}\quad(i=1,2)\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta^2\phi^{(i)}=0\quad(i=1,2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

上下両層の厚さは十分大きいとしているから，$y\to\infty$ で $\phi^{(1)}$ は t のみの関数となり，$y\to-\infty$ で $\phi^{(2)}$ は t のみの関数となる。運動方程式の積分は，

$$\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{(i)}+\frac{1}{2}(\rho q^2)^{(i)}+\rho^{(i)}gy+p^{(i)}$$
$$=F^{(i)}(t)\quad(i=1,2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

であるが，これを用いて界面 $y=\eta$ でつぎの力学的条件が成立する。

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho^{(1)}q^{(1)2}+\rho^{(1)}g\eta$$
$$=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho^{(2)}q^{(2)2}+\rho^{(2)}g\eta\quad(y=\eta\text{にて})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

運動学的条件は

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u^{(1)}\frac{\partial\eta}{\partial x}=v^{(1)},\quad\frac{\partial\eta}{\partial t}+u^{(2)}\frac{\partial\eta}{\partial x}=v^{(2)}$$
$$(y=\eta\text{にて})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{-}1,2)$$

ここで permanent type の条件を用い，

$$\phi^{(i)}=\phi^{(i)}(x-ct),\quad\eta=\eta(x-ct)\quad(i=1,2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

を仮定すれば，

$$\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial x},\quad\frac{\partial\eta}{\partial t}=-c\frac{\partial\eta}{\partial x}\quad(i=1,2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

式(4)，(5-1, 2) に式(7)を代入して

$$-\rho^{(1)}c\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left\{\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right)^2\right\}+\rho^{(1)}g\eta$$
$$=-\rho^{(2)}c\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left\{\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$+\rho^{(2)}g\eta\quad(y=\eta\text{にて})\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\left.\begin{aligned}-c\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\\-c\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\end{aligned}\right\}(y=\eta\text{にて})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(9\text{-}1,2)$$

内波の波形勾配によるせつ動を用いると，

$$\left.\begin{aligned}&\phi^{(i)}=\alpha\phi_1{}^{(i)}+\alpha^2\phi_2{}^{(i)}+\alpha^3\phi_3{}^{(i)}+\cdots\cdots\quad(i=1,2)\\&\eta=\alpha\eta_1+\alpha^2\eta_2+\alpha^3\eta_3+\cdots\cdots\\&c=c_0+\alpha c_1+\alpha^2c_2+\alpha^3c_3+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

これを界面条件(8)，(9-1, 2) に代入し，$y=0$ について展開すると，式(8)より

$$-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}+\rho^{(1)}g\eta_1=-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x}+\rho^{(2)}g\eta_1\cdots\cdots\cdots\cdots(11\text{-}1)$$

$$-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial\phi_2{}^{(1)}(0)}{\partial x}-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial^2\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\rho^{(1)}c_1\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(1)}g\eta_2$$
$$=-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial\phi_2{}^{(2)}(0)}{\partial x}-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial^2\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\rho^{(2)}c_1\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x}+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(2)}g\eta_2\cdots\cdots\cdots\cdots(11\text{-}2)$$

$$-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial\phi_3{}^{(1)}(0)}{\partial x}-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial^2\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_2-\rho^{(1)}c_0\frac{\partial^2\phi_2{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\frac{1}{2}\rho^{(1)}c_0\frac{\partial^3\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y^2}\eta_1{}^2-\rho^{(1)}c_1\frac{\partial\phi_2{}^{(1)}(0)}{\partial x}$$
$$-\rho^{(1)}c_1\frac{\partial^2\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\rho^{(1)}c_2\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2{}^{(1)}(0)}{\partial x}+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial y}\frac{\partial\phi_2{}^{(1)}(0)}{\partial y}$$
$$+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial y}\frac{\partial^2\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\rho^{(1)}g\eta_3$$
$$=-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial\phi_3{}^{(2)}(0)}{\partial x}-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial^2\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_2-\rho^{(2)}c_0\frac{\partial^2\phi_2{}^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\frac{1}{2}\rho^{(2)}c_0\frac{\partial^3\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x\partial y^2}\eta_1{}^2-\rho^{(2)}c_1\frac{\partial\phi_2{}^{(2)}(0)}{\partial x}$$

* 正会員　工博　運輸省港湾技術研究所

$$-\rho^{(2)}c_1\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1-\rho^{(2)}c_2\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y}$$

$$+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\rho^{(2)}g\,\eta_3 \quad\cdots\cdots(11\text{-}3)$$

式 (9-1) より

$$-c_0\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y} \quad\cdots\cdots(12\text{-}1)$$

$$-c_0\frac{\partial\eta_2}{\partial x}-c_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1 \quad\cdots\cdots(12\text{-}2)$$

$$-c_0\frac{\partial\eta_3}{\partial x}-c_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x}-c_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\eta_1+\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial\phi_3^{(1)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_2+\frac{\partial^2\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^3}\eta_1^2 \quad\cdots\cdots(12\text{-}3)$$

式 (9-2) より

$$-c_0\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y} \quad\cdots\cdots(13\text{-}1)$$

$$-c_0\frac{\partial\eta_2}{\partial x}-c_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1 \quad\cdots\cdots(13\text{-}2)$$

$$-c_0\frac{\partial\eta_3}{\partial x}-c_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x}-c_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial\phi_3^{(2)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_2+\frac{\partial^2\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^3}\eta_1^2 \quad\cdots\cdots(13\text{-}3)$$

また,

$$\nabla^2\phi_1^{(i)}=0,\quad \nabla^2\phi_2^{(i)}=0,\quad \nabla^2\phi_3^{(i)}=0\quad (i=1,\ 2) \quad\cdots\cdots(14\text{-}1,\ 2,\ 3)$$

式 (11-1,2,3), (12-1,2,3), (13-1,2,3), (14-1,2,3) が Stokes 波型のせつ動解を得るための基本式である。

(2)　3 次近似までの解

上記のせつ動計算法を用いると，1 次近似および 2 次近似は一義的に決定せられ，つぎのごとく得られる。

$$\eta_1=A_1\cos k(x-ct) \quad\cdots\cdots(15)$$

$$\phi_1^{(1)}=-c_0A_1e^{-ky}\sin k(x-ct) \quad\cdots\cdots(16\text{-}1)$$

$$\phi_1^{(2)}=c_0A_1e^{ky}\sin k(x-ct) \quad\cdots\cdots(16\text{-}2)$$

$$c_0=\sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}}\quad(c_0>0\ \text{とする})\cdots(17)$$

$$\eta_2=\frac{1}{2}A_1^2k\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\cos 2k(x-ct) \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\phi_2^{(1)}=-c_0A_1^2k\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{-2ky}\sin 2k(x-ct) \quad\cdots\cdots(19\text{-}1)$$

$$\phi_2^{(2)}=-c_0A_1^2k\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{2ky}\sin 2k(x-ct) \quad\cdots\cdots(19\text{-}2)$$

$$c_1=0 \quad\cdots\cdots(20)$$

これらの式は $\rho^{(1)}\to 0$ の極限においても成立するが，式 (19-1,2) において $\rho^{(1)}\to 0$ の時，$\phi_2^{(2)}$ は 0 となるが，$\phi_2^{(1)}$ は 0 とならない。

3 次近似をつぎのようにおく。

$$\left.\begin{aligned}\eta_3&=A_{31}\cos k(x-ct)+A_{33}\cos 3k(x-ct)\\ \phi_3^{(1)}&=B_{31}^{(1)}e^{-ky}\sin k(x-ct)\\ &\quad+B_{33}^{(1)}e^{-3ky}\sin 3k(x-ct)\\ \phi_3^{(2)}&=B_{31}^{(2)}e^{ky}\sin k(x-ct)\\ &\quad+B_{33}^{(2)}e^{3ky}\sin 3k(x-ct)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(21)$$

これについて計算を行なうと，式 (10) の c_2 および A_{33}, $B_{33}^{(1)}$, $B_{33}^{(2)}$ は一義的に決定せられる。

$$c_2=\frac{1}{2}c_0A_1^2k^2\frac{\rho^{(1)2}+\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2} \quad\cdots\cdots(22)$$

$$A_{33}=\frac{k^2A_1^3}{4}\left\{\frac{3}{2}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\} \quad\cdots\cdots(23\text{-}1)$$

$$B_{33}^{(1)}=-c_0\frac{k^2A_1^3}{4}\left\{1+5\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\} \quad\cdots(23\text{-}2)$$

$$B_{33}^{(2)}=c_0\frac{k^2A_1^3}{4}\left\{1+\frac{5\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\} \quad\cdots(23\text{-}3)$$

しかし，A_{31}, $B_{31}^{(1)}$, $B_{31}^{(2)}$ は一義的に決定できない。ここで従来の表面波の場合の解法に類似した方法を採用するとすれば，つぎのようなものが得られる。

もし，$B_{31}^{(2)}=0$ とすれば

$$A_{31}=\frac{1}{8}\frac{A_1^3k^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\{\rho^{(2)2}-2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-11\rho^{(1)2}\} \quad\cdots\cdots(24\text{-}1)$$

$$B_{31}^{(1)}=-\frac{3}{2}c_0A_1^3k^2\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}} \quad\cdots\cdots(24\text{-}2)$$

もし，$A_{31}=0$ とすれば

$$B_{31}^{(1)}=\frac{1}{8}c_0A_1^3k^2\frac{\rho^{(1)2}-2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-11\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2} \quad\cdots\cdots(25\text{-}1)$$

$$B_{31}{}^{(2)}=\frac{1}{8}c_0A_1{}^3k^2\frac{11\rho^{(1)2}+2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2} \qquad \cdots\cdots(25\text{-}2)$$

よって3次近似までの解は，$B_{31}{}^{(2)}=0$ の時は

$$\eta=A_1\cos k(x-ct)+\frac{1}{2}A_1{}^2k\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\cos 2k(x-ct)+\frac{1}{8}\frac{A_1{}^3k^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\{\rho^{(2)2}-2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-11\rho^{(1)2}\}$$
$$\times\cos k(x-ct)+\frac{1}{4}A_1{}^3k^2\left\{\frac{3}{2}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}\cos 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(26\text{-}1)$$

$$\phi^{(1)}=-c_0A_1e^{-ky}\sin k(x-ct)-c_0A_1{}^2k\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{-2ky}\sin 2k(x-ct)-\frac{3}{2}c_0A_1{}^3k^2\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{-ky}\sin k(x-ct)$$
$$-\frac{1}{4}c_0A_1{}^3k^2\left\{1+5\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}e^{-3ky}\sin 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(26\text{-}2)$$

$$\phi^{(2)}=c_0A_1e^{ky}\sin k(x-ct)-c_0A_1{}^2k\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{2ky}\sin 2k(x-ct)$$
$$+\frac{1}{4}c_0A_1{}^3k^2\left\{1+\frac{5\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}e^{3ky}\sin 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(26\text{-}3)$$

$A_{31}=0$ の時は

$$\eta=A_1\cos k(x-ct)+\frac{1}{2}A_1{}^2k\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\cos 2k(x-ct)+\frac{1}{4}A_1{}^3k^2\left\{\frac{3}{2}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}\cos 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(27\text{-}1)$$

$$\phi^{(1)}=-c_0A_1e^{-ky}\sin k(x-ct)-c_0A_1{}^2k\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{-2ky}\sin 2k(x-ct)$$
$$+\frac{1}{8}c_0A_1{}^3k^2\frac{\rho^{(1)2}-2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-11\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}e^{-ky}\sin k(x-ct)$$
$$-\frac{1}{4}c_0A_1{}^3k^2\left\{1+\frac{5\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}e^{-3ky}\sin 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(27\text{-}2)$$

$$\phi^{(2)}=c_0A_1e^{ky}\sin k(x-ct)-c_0A_1{}^2k\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}e^{2ky}\sin 2k(x-ct)$$
$$+\frac{1}{8}c_0A_1{}^3k^2\frac{11\rho^{(1)2}+2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}e^{ky}\sin k(x-ct)$$
$$+\frac{1}{4}c_0A_1{}^3k^2\left\{1+\frac{5\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{8\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}e^{3ky}\sin 3k(x-ct) \qquad \cdots\cdots(27\text{-}3)$$

式 (26-1,2,3)，(27-1,2,3) の c は共通し

$$c=c_0\left\{1+\frac{1}{2}A_1{}^2k^2\frac{\rho^{(1)2}+\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\},\qquad c_0=\sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}} \qquad \cdots\cdots(28)^*$$

式 (26-1,2,3)，(27-1,2,3) はいずれが正しいとも決定することはできない。すなわち3次近似の一部に任意性が入る。

この解法を表面波の場合のそれと比較すれば，式 (26-1,2,3) は $\rho^{(1)}\to 0$ の時，E.V. Laitone[1] (1962) (p. 1561 (32)，(33) 両式) の用いた解法と一致し，式 (27-1,2,3) は $\rho^{(1)}\to 0$ で O.M. Phillips[2] (1960) (p. 210 (5.9)，(5.10) およびその下の式) と一致する。

$\rho^{(1)}/\rho^{(2)}\to 0$ のときは式 (26-1) と (27-1) との差は大きなものではない。しかし $\rho^{(1)}/\rho^{(2)}\to 1$ の場合は相当大きな差異を生ずる。すなわち河海両水の界面の内波を問題にする時，3次近似の一部に現われるこの任意性は無視し得ない影響を持つ。

また，$\rho^{(1)}/\rho^{(2)}\to 1$ のとき，$x-ct=0$ の位置で3次近似の符号が1次近似のそれと逆になることも注意すべきであろう（このとき2次近似はほとんど消失している）。

(3) 内波の砕波の問題

この問題は厳密にはむずかしい問題であり，また Kelvin-Helmholtz 不安定の現象でふれるように，波形の変形も考える必要があろう。しかし少なくとも permanent type のままで取り扱う時，河海両水の界面の内波は容易に砕波しがたいと思われる。前節までの近似は3次近似にとどまり，砕波の問題を論ずるには不十分であるが，$\rho^{(1)}/\rho^{(2)}$ が1に近づくとき，上述のせつ動解では取り扱い得ないことが予想されるから，傾向を調べるにはこの程度の近似でもよい。

式 (27-1,2,3) を用い，界面 $y=\eta$ における水平流速 $u^{(2)}$ は

* 実験においては内波の波速は粘性および両流体の混合によるうすい混合層の影響をうける。これらは河海両水の場合，波速を減少させる方向に作用する。

$$u^{(2)}{}_{at\,y=\eta}=\frac{1}{2}c_0A_1{}^2k^2+c_0A_1k\left\{1+\frac{1}{4}A_1{}^2k^2\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}+\frac{3}{8}A_1{}^2k^2-2A_1{}^2k^2\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}A_1{}^2k^2\frac{11\rho^{(1)2}+2\rho^{(1)}\rho^{(2)}-\rho^{(2)2}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}\cos k(x-ct)+c_0A_1{}^2k^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{2\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\right\}\cos 2k(x-ct)$$
$$+c_0A_1{}^3k^3\left\{\frac{7}{8}+\frac{3}{2}\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{1}{2}\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}-\frac{6\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}\right\}\cos 3k(x-ct)\quad\cdots\cdots(29)$$

同様の式は式 (26-1,2,3) を用いても得ることができる。もっとも単純には砕波の評価はこれらの $u^{(2)}{}_{at\,y=\eta}$ が $x-ct=0$ で式 (28) による c と一致すると考えてよい。これによる計算の結果は，$\rho^{(1)}=0.000$, $\rho^{(2)}=1.020$ で $A_1k=0.612$ (式 (27) による) $=0.602$ (式 (26) による) となり，$\rho^{(1)}=0.200$, $\rho^{(2)}=1.020$ で $A_1k=0.775$ (式 (27), (26) 両者とも) となる。$\rho^{(1)}=0.400$, $\rho^{(2)}=1.020$ に対しては $0\leq A_1k<1$ の範囲内で解は存在しない。このようにして砕波限界の steepness は $\rho^{(1)}$ の増大とともに増大してゆくことがわかり，それは $A_1k<1$ のせつ動計算の範囲内にとどまらないのではないかと予想させる。

このような近似計算値が得られる原因は界面における内波の力学的条件に求められるべきであろう。その基本形式は permanent type の時，式 (8) で与えられる。J.N. Hunt[3] (1961) (p. 519 式 (18)) はこの場合の内波の波群にその進行方向と逆に波速と等しい大いさの流れを加え，定常状態として界面条件をつぎの形に導びいた。

$$\frac{g}{kc^2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})\,e^{-\tau}\sin\theta$$
$$=\rho^{(2)}e^{2\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}+\rho^{(1)}e^{-2\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

この式を用いて検討してみる。内波の crest で下層流体の水平粒子速度が波速に近づいた極限では，$\theta\to 0$, $\tau\to-\infty$ の条件が得られる。そしてまた

$$u^{(2)}dx+v^{(2)}dy=-\frac{c}{k}d\sigma$$

(この場合は $u^{(2)}$ は (1) による $u^{(2)}$ から，波速 c を差し引いたものである) の条件があり，砕波条件では $u^{(2)}\to 0$, $v^{(2)}\to 0$ となるため，$d\sigma\to 0$ となる。また $\tau\to-\infty$ であるから，$d\tau$ は有限である。この条件のもとで式 (30) の両辺を比較すると

$$\left.\begin{array}{l}\text{左辺}\to\infty\times 0\\ \text{右辺第1項}\to 0\times\infty\\ \text{右辺第2項}\to\infty\times\infty\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

すなわち砕波条件のもとでは左辺と右辺第1項とは同じ位数であるが，右辺第2項ははるかに大きな位数となり，式 (30) の両辺はつりあわない。もし $\rho^{(1)}=0$ であれば，明らかにつりあい，これは表面波の場合砕波が可能であることを示している。この解析結果から $\rho^{(1)}$ が $\rho^{(2)}$ に近い値を持つ時，非粘性 permanent type のままでは砕波は不可能なのではないかと思われる。既述の近似計算値のもつ傾向は式 (30) による検討結果と定性的には全く同じものである。

内波がこのように砕けがたいものであるとすれば，河海両水の界面での上下両流体の混合には，内波の粘性境界層の不安定が大きな役割をもつのではあるまいか。

2. Kelvin-Helmholtz 不安定

(1) せつ動による表現と1次関係

Kelvin-Helmholtz 不安定のもつ基本的な性質を調べ，この不安定で表現される内波の増幅が生ずる場合，どのような現象があらわれるかを明らかにする。問題は2次元とし，上層流体の一般流の流速を $U^{(1)}$，下層流体のそれを $U^{(2)}$ とし，ともに一定で水平に流れ，$U^{(1)}>U^{(2)}$ とする。したがって両流体のせつ動による運動は非定常ではあるが，界面を除いて非回転であると考えることができ，式 (1), (2) が成立する。両流体の厚さも十分厚いものとする。この状態のもとで界面条件 式 (4), (5-1,2) はつぎのようになる。

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\right)^2+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}U^{(1)}+\rho^{(1)}g\eta$$
$$=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\right)^2+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}U^{(2)}+\rho^{(2)}g\eta\quad(y=\eta\text{ にて})\cdots\cdots(32)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+U^{(1)}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial y}\quad(y=\eta\text{ にて})\cdots\cdots(33\text{-}1)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+U^{(2)}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial y}\quad(y=\eta\text{ にて})\cdots\cdots(33\text{-}2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi^{(1)}=\alpha\phi_1{}^{(1)}+\alpha^2\phi_2{}^{(1)}+\alpha^3\phi_3{}^{(1)}+\cdots\cdots\\ \phi^{(2)}=\alpha\phi_1{}^{(2)}+\alpha^2\phi_2{}^{(2)}+\alpha^3\phi_3{}^{(2)}+\cdots\cdots\\ \eta=\alpha\eta_1+\alpha^2\eta_2+\alpha^3\eta_3+\end{array}\right\}\cdots\cdots(34)$$

の波形勾配によるせつ動を用い，$y=\eta$ における条件は $y=0$ を中心として展開して，式 (32) より

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial t}+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial\phi_1{}^{(1)}(0)}{\partial x}+\rho^{(1)}g\eta_1=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial t}+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial\phi_1{}^{(2)}(0)}{\partial x}+\rho^{(2)}g\eta_1\quad\cdots\cdots(35\text{-}1)$$

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial t}+\rho^{(1)}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_1+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial x}$$
$$+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(1)}g\eta_2$$
$$=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial t}+\rho^{(2)}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_1+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\left(\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\right)^2+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}$$
$$+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(2)}g\eta_2 \quad\cdots\cdots(35\text{-}2)$$

$$\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_3^{(1)}(0)}{\partial t}+\rho^{(1)}\frac{\partial^2\phi_2^{(1)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_1+\rho^{(1)}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_2+\frac{1}{2}\rho^{(1)}\frac{\partial^3\phi_1^{(1)}(0)}{\partial t\partial y^2}\eta_1^2+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial x}$$
$$+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y}\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y}+\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1$$
$$+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial\phi_3^{(1)}(0)}{\partial x}+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial^2\phi_2^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_2+\rho^{(1)}U^{(1)}\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y^2}\eta_1^2+\rho^{(1)}g\eta_3$$
$$=\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_3^{(2)}(0)}{\partial t}+\rho^{(2)}\frac{\partial^2\phi_2^{(2)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_1+\rho^{(2)}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial t\partial y}\eta_2+\frac{1}{2}\rho^{(2)}\frac{\partial^3\phi_1^{(2)}(0)}{\partial t\partial y^2}\eta_1^2+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}$$
$$+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y}+\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1$$
$$+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial\phi_3^{(2)}(0)}{\partial x}+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial^2\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_2+\rho^{(2)}U^{(2)}\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y^2}\eta_1^2+\rho^{(2)}g\eta_3$$
$$\cdots\cdots(35\text{-}3)$$

式 (33-1) より

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+U^{(1)}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y}\quad\cdots\cdots(36\text{-}1)$$
$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+U^{(1)}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1\quad\cdots\cdots(36\text{-}2)$$
$$\frac{\partial\eta_3}{\partial t}+U^{(1)}\frac{\partial\eta_3}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(1)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial\phi_3^{(1)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_2^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\frac{\partial^2\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^2}\eta_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(1)}(0)}{\partial y^3}\eta_1^2\quad\cdots\cdots(36\text{-}3)$$

式 (33-2) より

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+U^{(2)}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y}\quad\cdots\cdots(37\text{-}1)$$
$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t}+U^{(2)}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1\quad\cdots\cdots(37\text{-}2)$$
$$\frac{\partial\eta_3}{\partial t}+U^{(2)}\frac{\partial\eta_3}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x\partial y}\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1^{(2)}(0)}{\partial x}\frac{\partial\eta_2}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial\phi_3^{(2)}(0)}{\partial y}+\frac{\partial^2\phi_2^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_1+\frac{\partial^2\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^2}\eta_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^3\phi_1^{(2)}(0)}{\partial y^3}\eta_1^2\quad\cdots\cdots(37\text{-}3)$$

1次近似は式 (35-1), (36-1), (37-1) により決定せられる。

$$\phi_1^{(1)}=A_1(U^{(1)}-c_r)\sin k(x-c_rt)e^{kc_it}e^{-ky}$$
$$-A_1c_i\cos k(x-c_rt)e^{kc_it}e^{-ky}\quad\cdots\cdots(38\text{-}1)$$
$$\phi_1^{(2)}=-A_1(U^{(2)}-c_r)\sin k(x-c_rt)e^{kc_it}e^{ky}$$
$$+A_1c_i\cos k(x-c_rt)e^{kc_it}e^{ky}\quad\cdots\cdots(38\text{-}2)$$
$$\eta_1=A_1\cos k(x-c_rt)e^{kc_it}$$

(A_1 は real(>0) とする)$\cdots\cdots\cdots\cdots$(38-3)

$$c=c_r+ic_i=\frac{\rho^{(1)}U^{(1)}+\rho^{(2)}U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}$$
$$+i\left\{\frac{\rho^{(1)}\rho^{(2)}(U^{(1)}-U^{(2)})^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}-\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\right\}^{1/2}$$
$$\cdots\cdots(39)$$

ただし,

$$\frac{\rho^{(1)}\rho^{(2)}(U^{(1)}-U^{(2)})^2}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})^2}-\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}\geqq 0$$

の場合を考える。

(2) せつ動流増幅の機構

Kelvin-Helmholtz 不安定により, せつ動流が漸次増幅せられ, その時間的増幅率は kc_i により示されることがわかった。せつ動流がこのようにして増幅せられてゆくためには, 一般流からせつ動流への力学的エネルギーの輸送がなければならぬ。この機構について調べる。この場合注意すべきは Kelvin-Helmholtz 不安定では c_i/c_r がかならずしも小さくないことであり, これは他の安定理論で $(c_i/c_r)^2\to 0$ とおき得る場合と対比せらるべき

である。したがって $(c_i/c_r)^2 \fallingdotseq 0$ として計算を進めてゆく。

この Kelvin-Helmholtz 不安定によるせつ動流増幅の機構については，風波発達の問題と関連して，J.W. Miles[4] (1959) が一般化への議論を進めている。しかし以下に述べる見解はそれとは異なっている。

まず内波の運動エネルギーを求めると

$$\frac{1}{4}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gA_1^2e^{2kc_it} + \frac{1}{2}(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})A_1^2kc_i^2e^{2kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

ポテンシャル エネルギーは

$$\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gA_1^2\cos^2 k(x-c_rt)e^{2kc_it} \cdots\cdots(41)$$

よって dE/dt の時間的平均値は

$$\frac{dE}{dt}=(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gA_1^2\,kc_ie^{2kc_it} + (\rho^{(1)}+\rho^{(2)})A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it} \cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

つぎにモーメンタム輸送について考えると，上層流体につき

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)} &= -\frac{1}{2}A_1^2k\,\rho^{(1)}\rho^{(2)}\frac{U^{(1)}-U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\,e^{2kc_it} \\ \frac{dM^{(1)}}{dt} &= -A_1^2k^2c_i\rho^{(1)}\rho^{(2)}\frac{U^{(1)}-U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\,e^{2kc_it} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

下層流体につき

$$\left.\begin{aligned} M^{(2)} &= \frac{1}{2}A_1^2k\,\rho^{(1)}\rho^{(2)}\frac{U^{(1)}-U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\,e^{2kc_it} \\ \frac{dM^{(2)}}{dt} &= A_1^2k^2c_i\,\rho^{(1)}\rho^{(2)}\frac{U^{(1)}-U^{(2)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\,e^{2kc_it} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

このモーメンタム輸送の性質は，Kelvin-Helmholtz 不安定により増幅される波の大きな特徴であり，上層，下層両流体は絶対値相等しく符号相反するモーメンタム輸送を行ない，上層流体の密度 $\rho^{(1)}$ が 0 に近づく時，下層流体のモーメンタム輸送も 0 に近づくこととなる。

これに対し，$U^{(1)}=U^{(2)}=0$ したがって $c_i=0$ の時は，上層流体のモーメンタム輸送は

$$M^{(1)}=\frac{1}{2}A_1^2k\,\rho^{(1)}\sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}} \cdots\cdots\cdots(45)$$

下層流体のモーメンタム輸送は

$$M^{(2)}=\frac{1}{2}A_1^2k\,\rho^{(2)}\sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}} \cdots\cdots\cdots(46)$$

これは

$$E=\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gA_1^2,\quad c=\sqrt{\frac{g}{k}\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}}$$

を用いれば，$E=c(M^{(1)}+M^{(2)})=cM$ の関係を満足し，表面波の場合と同様であるが，式 (43)，(44) では $M^{(1)}+M^{(2)}=0$ である。

非粘性の現在の問題では，一般流からせつ動流への力学的エネルギーの輸送は，Reynolds 応力によるものであることが考えられる。上下両流体の非回転を仮定しているから，流体内でこの応力を求めると，不安定が生じている場合においてもそれは 0 である。しかし界面 $y=0$ における応力は

$$\begin{aligned} &-\overline{(u_1^{(1)}-u_1^{(2)})(v_1^{(1)}-v_1^{(2)})}_{at\,y=0} \\ &=-\{-A_1^2(U^{(1)}-c_r)c_ik^2e^{2kc_it} \\ &\quad +A_1^2(U^{(2)}-c_r)c_ik^2e^{2kc_it}\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47) \end{aligned}$$

に支配されるであろう。式 (47) の両項の表現形式と，モーメンタム輸送についての式 (43)，(44) とを比較する時，式 (47) の第1項は $y=0$ の界面の上側から下層流体に対してはたらき，第2項は界面の下側から上層流体に対しはたらくことが理解される。すなわち式 (47) の第 1 項に $\rho^{(1)}$ を乗じたものは式 (44) と一致し，第 2項に $\rho^{(2)}$ を乗じ，符号を変えれば，式 (43) と一致する。このようにして界面の上側でこれに沿って波の進行方向にはたらく Reynolds 応力

$$\tau_{(+0)}=\rho^{(1)}A_1^2(U^{(1)}-c_r)c_ik^2e^{2kc_it} \cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

と，界面の下側でこれに沿って波の進行方向と逆の方向にはたらく

$$\tau_{(-0)}=-\rho^{(2)}A_1^2(U^{(2)}-c_r)c_ik^2e^{2kc_it} \cdots\cdots\cdots(49)$$

を考えることができる。

この Reynolds 応力によりなされる仕事は

$$\tau_{(+0)}U^{(1)}-\tau_{(-0)}U^{(2)}=(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gA_1^2c_ike^{2kc_it} + (\rho^{(1)}+\rho^{(2)})A_1^2c_i^3k^2e^{2kc_it} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

となり，これは式 (42) による内波エネルギーの増幅率と一致する。

非粘性の場合の Reynolds 応力により，flexible boundary を通じてなされる仕事は，また界面における圧力動揺のなす仕事として，理解されなければならぬ。

界面において

$$\left.\begin{aligned} p_1^{(1)} &= -\rho^{(1)}\frac{\partial\phi_1^{(1)}}{\partial t}-\rho^{(1)}u^{(1)}U^{(1)}-\rho^{(1)}g\,\eta_1 \\ p_1^{(2)} &= -\rho^{(2)}\frac{\partial\phi_1^{(2)}}{\partial t}-\rho^{(2)}u^{(2)}U^{(2)}-\rho^{(2)}g\,\eta_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

これを計算すると

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= -\rho^{(1)}A_1kc_i(U^{(1)}-c_r)\sin k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad +\rho^{(1)}A_1(U^{(1)}-c_r)kc_r\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad +\rho^{(1)}A_1kc_i^2\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad +\rho^{(1)}A_1c_ikc_r\sin k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(1)}U^{(1)}A_1k(U^{(1)}-c_r)\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(1)}U^{(1)}A_1kc_i\sin k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(1)}gA_1\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \cdots\cdots\cdots\cdots(52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1^{(2)} &= \rho^{(2)}A_1kc_i(U^{(2)}-c_r)\sin k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(2)}A_1(U^{(2)}-c_r)kc_r\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(2)}A_1kc_i^2\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \\ &\quad -\rho^{(2)}A_1c_ikc_r\sin k(x-c_rt)e^{kc_it} \end{aligned}$$

$$+\rho^{(2)}U^{(2)}A_1k(U^{(2)}-c_r)\cos k(x-c_rt)e^{kc_it}$$
$$+\rho^{(2)}U^{(2)}A_1kc_i\sin k(x-c_rt)e^{kc_it}$$
$$-\rho^{(2)}gA_1\cos k(x-c_rt)e^{kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

これを用いて

$$\overline{-p_1^{(1)}v_1^{(2)}}$$
$$=\rho^{(1)}A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it}+\rho^{(1)}A_1^2kc_ig\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}e^{2kc_it}$$
$$-\rho^{(1)}A_1^2k^2c_i^3\frac{1}{2}e^{2kc_it}+\rho^{(1)}gA_1^2kc_i\frac{1}{2}e^{2kc_it}$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{(2)}A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it}$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{(2)}gA_1^2kc_i\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}e^{2kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

$$\overline{p_1^{(2)}v_1^{(1)}}$$
$$=\rho^{(2)}A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it}+\rho^{(2)}A_1^2kc_ig\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}e^{2kc_it}$$
$$-\rho^{(2)}A_1^2k^2c_i^3\frac{1}{2}e^{2kc_it}-\rho^{(2)}gA_1^2kc_i\frac{1}{2}e^{2kc_it}$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{(1)}A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it}$$
$$+\frac{1}{2}\rho^{(1)}A_1^2kc_ig\frac{\rho^{(2)}-\rho^{(1)}}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}e^{2kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

ただし，式 (54), (55) において右辺第1項，第2項は波形勾配に同位相の成分により構成せられ，第3項以下は波形に同位相の成分により構成せられている。

界面の圧力動揺によりなされる仕事は

$$-\overline{p_1^{(1)}v_1^{(2)}}+\overline{p_1^{(2)}v_1^{(1)}}=(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})A_1^2k^2c_i^3e^{2kc_it}$$
$$+A_1^2kc_ig(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})e^{2kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

これは式 (42), (50) と一致する。そして式 (54), (55) より明らかなとおり，これは波形勾配と同位相の成分によりなされた仕事である。

以上の計算結果から，少なくとも1次近似については，Kelvin-Helmholz 不安定は必要な仮定が満足されれば成立可能な増幅機構である。しかし実際の現象として，仮定が相当厳密に満足される場合は非常に少ないであろう*。

(3) 2次近似の検討

2次近似計算の詳細は省略する。得られた η_2 はつぎのようになる。

$$\eta_2=\{2A_{21}\cos 2k(x-c_rt)$$
$$-2A_{22}\sin 2k(x-c_rt)\}e^{2kc_it} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

において，

$$A_{22}=c_i\frac{B}{E},\quad A_{21}=-\frac{D}{E} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(58\text{-}1,\ 2)$$

となり，B, D および E はつぎのごとく表わされる。

$$B=\frac{k^2A_1^2}{2}\{\rho^{(2)}(U^{(2)}-c_r)-\rho^{(1)}(U^{(1)}-c_r)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(59\text{-}1)$$

* たとえば参考文献 (5) 参照

$$D=\frac{k^2A_1^2}{4}\{\rho^{(2)}((U^{(2)}-c_r)^2-c_i^2)$$
$$-\rho^{(1)}((U^{(1)}-c_r)^2-c_i^2)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(59\text{-}2)$$
$$E=g(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})-2k\{\rho^{(2)}(U^{(2)}-c_r)^2$$
$$+\rho^{(1)}(U^{(1)}-c_r)^2\}+2kc_i^2(\rho^{(2)}+\rho^{(1)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(59\text{-}3)$$

式 (18) と比較する時，$c_i \neq 0$ の現在の問題では，1次近似と $\pi/2$ だけ位相のずれた項が，2次近似の中に現われている。

(i) $c_i^2 \to 0$，すなわち c_i が十分小さい時の A_{22}, A_{21} の性質を調べてみる。A_{21} についての計算の結果は $A_{21}<0$ と得られる。式 (18) ではこれに対応する項は正である。つぎに A_{22} についての計算の結果は $A_{22}>0$ となる。$c_i^2\to 0$ の仮定のもとで，$\rho^{(1)}$ が $\rho^{(2)}$ に近づいた時には

$$\left.\begin{array}{l} A_{21}\to 0,\quad A_{22}\to\dfrac{kA_1^2}{U^{(1)}-U^{(2)}}c_i, \\ \left(c_r\to\dfrac{U^{(1)}+U^{(2)}}{2}\right) \end{array}\right\} \cdots\cdots(60)$$

$\rho^{(1)}\to 0$, $\rho^{(2)}\to 1$ の時には

$$A_{21}\sim\text{order of}\left(-\frac{k}{4}A_1^2\right),\ A_{22}\to 0,\ (c_r\to U^{(2)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

すでに1次近似においてこの波の実波速は波数に無関係な非分散のかたちをとったが，2次近似においてもきわめて特徴的であり，$A_{21}<0$ は波形の crest を低め，trough を深めるはたらきをし，$A_{22}>0$ は進行方向と逆方向に波形を変形させることとなる。S. Chandrasekhar[6] (1961) の Fig. 117 およびその説明がはたして Kelvin-Helmholtz 不安定によるものかさらに検討の必要があろう。

(ii) $\rho^{(1)}$ が限りなく $\rho^{(2)}$ に近づいた状態での A_{21}, A_{22} を調べるためには，$c_i^2\to 0$ の仮定をおいてはならない。若干の考察の結果，A_{21} はこの場合も負の有限値をとるが，A_{22} は $\Delta\rho=\rho^{(2)}-\rho^{(1)}$ に逆比例して限りなく増大することが示される。すなわち波形は急速に倒壊するわけであるが，$\Delta\rho>0$ の現在の問題では上側が進行方向に逆方向に，$\Delta\rho<0$ の場合は進行方向と同方向にかたむくこととなる。このようにして Kelvin-Helmholtz 不安定の立場から，計算を進める時，速度不連続面に発生する不安定な攪乱は，$\Delta\rho\to 0$ の極限において，$\Delta\rho$ の符号によりその波形の2次変形の方向を異にすることとなる。これは $\rho^{(1)}=\rho^{(2)}$ の場合の計算により，L. Rosenhead[7] (1931) が得た結果と比較し，興味あるものであろう。

付記：式 (60), (61) に示した A_{21}, A_{22} の性質は Kelvin-Helmholtz 不安定特有の性質か，あるいは一般の shear flow による内波増幅の場合にも現われるものか不明である。もし一般の内波増幅の場合にも現われる

ものとすれば，河海両水の界面における shear flow による内波増幅の場合，2次近似において波形の deformation を考慮してやらねばならぬこととなる。

参考文献

1) Laitone, E.V., : Limiting conditions for cnoidal and Stokes waves, Journal of Geophysical Research, vol. 67, No. 4, 1962.
2) Phillips, O.M., : On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, Part. I., The elementary interactions, Journal of Fluid Mechanics, vol. 9, 1960.
3) Hunt, J.N., : Interfacial waves of finite amplitude, La Houille Blanche, N°4, 1961.
4) Miles, J.W. : On the generation of surface waves by shear flows, Part 3, Kelvin-Helmholtz instability, Journal of Fluid Mechanics, vol. 6, Part 4, 1959.
5) 浜田徳一・加藤　始：2層流と波，第9回海岸工学講演会講演集，土木学会，1962.
6) Chandrasekhar, S. : Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford, 1961.
7) Rosenhead, L. : Formation of vortices from a surface of discontinuity, Proc. Roy. Soc. Ser. A., vol. 134, 1931.