

波浪中の浮体の動揺による支持柱に 働く衝撃力に関する研究 (その1)

永井 莊七郎*・小田 一 紀**

1. 緒 言

この研究は本州四国連絡橋の橋脚の施工時において、橋脚ケーソンが周囲の支持構造物（橋脚建造のための erection pier）に固定されない前に、あるいは十分固定されていない場合に、波浪による動揺によって、支持構造物にどの程度の力が働くかを調べるのが目的である。

この研究はその性質上波浪中の大型タンカー船などがドルフィンにおよぼす衝撃力の問題にも共通するものである。

この研究においては、橋脚ケーソンの衝突によって erection pier（実験においては鋼管を用いた）に働く衝撃力が波の特性によってどのように変化するか、またその衝撃力がいかなる運動によって明らかにすることに重点を置いた。

2. 浮体の衝突における力学的な予備考察

(1) 衝突時間が微小な場合の erection pier に働く力積

Erection pier を1つのばね系と考えると、波によって浮体が動揺し、これが erection pier に衝突する際におよぼす力積は、図-1 に示すようにばね系に衝突する際の浮体の運動を考えることによって求めることができる。

A点においてばね系に衝突する浮体の運動方程式は、水の粘性抵抗を無視するとつぎのように表わすことができる。

重心 G の並進運動に関して

$$M\ddot{x}_G = -F_h + \sum P \quad (1)$$

重心 G の周りの回転運動に関して

$$I\ddot{\theta} = -aF_h + \sum M_p \quad (2)$$

ここに

$$M = M_0 + M_a$$

M_0 : 浮体の質量

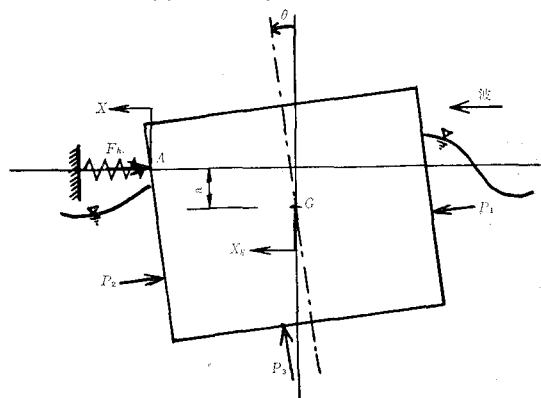
M_a : 並進運動に関係する付加質量

x_G : 重心の水平変位

F_h : 浮体に働くばね系の水平反力

$\sum P$: 浮体に働く波力（静水圧を含む）の水平方向の合力

図-1 衝突時に浮体に働く力



$$I = I_0 + I_a$$

I_0 : 重心周りの浮体の慣性モーメント

I_a : 重心周りの付加慣性モーメント

θ : 浮体の回転角

$\sum M_p$: 波力（静水圧を含む）による重心周りのモーメント

a : 接点と重心の鉛直距離

$t=0$ （衝突した瞬間）から $t=t$ （ $\leq \tau$: 衝撃力の作用時間）まで式（1）および式（2）の両辺を積分すると

$$\int_0^t M\ddot{x}_G dt = -\int_0^t F_h dt + \int_0^t \sum P dt \quad (3)$$

$$\int_0^t I\ddot{\theta} dt = -a\int_0^t F_h dt + \int_0^t \sum M_p dt \quad (4)$$

いまばね系のばね定数が非常に大きく、衝突時間が微小であれば、浮体に働く力はばねの反力が主であって、微小時間内に働く波力はばねの反力にくらべて無視できると考えると、式（3）、（4）は近似的につぎのようにおこなうことができる。

$$\int_0^t M\ddot{x}_G dt = -\int_0^t F_h dt \quad (5)$$

$$\int_0^t I\ddot{\theta} dt = -a\int_0^t F_h dt \quad (6)$$

接点Aの水平方向の変位速度 $\dot{x}$ は

$$\dot{x} = \dot{x}_G + a\dot{\theta} \quad (7)$$

であるから、式（5）はつぎのように書ける、

$$\int_0^t M(\ddot{x} - a\ddot{\theta}) dt = -\int_0^t F_h dt \quad (8)$$

$t=0$: $\dot{x} = u_0, \dot{\theta} = \omega_0$
 $t=t \leq \tau$: $\dot{x} = u_t, \dot{\theta} = \omega_t$ } とおくと、式（8）および

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部

** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部

式（6）はつぎのようになる、

$$F_h^0 = M(u_0 - u_t) - Ma(\omega_0 - \omega_t) \dots \dots \dots (9)$$

$$aF_h^0 = I(\omega_0 - \omega_t) \dots \dots \dots (10)$$

ここに、

$$F_h^0 = \int_0^t F_h dt : \text{ばね系 (erection pier) の反力による力積}$$

$$I = M_r r^2, M_r : \text{ローリングに関する付加質量を含む浮体の質量}$$

$$r : \text{付加質量を考慮した回転半径}$$

式（9）および式（10）より、時間 $0 \sim t (\leq \tau)$ の間に働くばね系の反力による力積 F_h^0 は

$$\left. \begin{aligned} F_h^0 &= \frac{M(u_0 - u_t)}{1 + \frac{Ma^2}{I}} \\ \text{あるいは} \\ &= \frac{M(u_0 - u_t)}{1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{M}{M_r}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

式（11）は衝突中に浮体に働く波力がばね系の反力に比し無視できるという仮定のもとになりたつものである

（2）浮体の衝突による erection pier の応答

Erection pier を1自由度のばね系と考え、浮体が衝突したときの erection pier の応答について調べてみる。

図-2に示すような1自由度のばね系に浮体の衝突によって衝撃力が働いたときの運動方程式は、減衰を考慮しない場合つぎのように書ける。

$$m\ddot{x} + Kx = F_h \dots \dots \dots (12)$$

ここに F_h は浮体の衝突によって生じる衝撃力で、この力積は式（11）で与えられる。

K : erection pier のばね常数

m : erection pier の質量

$F_h(t)$ は一般に

$$F_h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F_h(t) dt = \frac{d}{dt} F_h^0(t) \dots \dots \dots (13)$$

と書けるので、式（11）を式（13）に代入して、 $\dot{u}_t = \ddot{x}$ とおくと

$$F_h(t) = -\frac{M\ddot{x}}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}} \dots \dots \dots (14)$$

$$\text{ここに、} \alpha = \frac{a^2}{r^2} \dots \dots \dots (15)$$

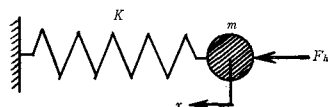
運動方程式 式（12）に式（14）を代入し

初期条件

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(0) &= u_0 \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

u_0 : 接触点の
接近速度

図-2 1自由度ばね系の応答



を用いて解くと、erection pier の動的応答は次式のようになる。

$$x = \frac{u_0}{\varphi} \sin \varphi t \dots \dots \dots (17)$$

ここに、

$$\varphi = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{M}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}}}} \dots \dots \dots (18)$$

$$x_{\max} = \frac{u_0}{\varphi} = u_0 \sqrt{\frac{m + \frac{M}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}}}{K}} \dots \dots \dots (19)$$

$x_{\max}$ を生じるまでの時間 τ_1 は

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2\varphi} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m + \frac{M}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}}}{K}} \dots \dots \dots (20)$$

浮体がその重心点を通る水平線上で erection pier に衝突するときは $a=0$ ($\alpha=0$) であるから、 x , $x_{\max}$, τ_1 はつぎのように書ける。

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m+M}{K}} \sin \sqrt{\frac{K}{m+M}} t \dots \dots \dots (21)$$

$$x_{\max} = u_0 \sqrt{\frac{m+M}{K}} \dots \dots \dots (22)$$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m+M}{K}} \dots \dots \dots (23)$$

この場合 u_0 は浮体の重心の接近速度である。

（3）浮体の衝突による2自由度ばね系の応答

後述するように、実験においては erection pier に働く衝撃力は鋼管に取付けられたロードセルによって測定する方法をとっている。鋼管とロードセルの組み合わせは2自由度のばね系を構成し、ロードセルによって得られた実験値はその応答結果である。

図-3に示すような2自由度のばね系に強制力 F_h が働いた場合の応答はつぎの運動方程式によって表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + K_1(x_1 - x_2) &= F_h \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 - K_1(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

強制力 F_h は浮体の衝突によって生じる衝撃力で前節と同様に式（14）で与えられる。

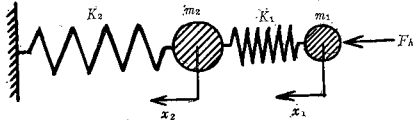
初期条件

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= u_0 \\ x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

より式（24）を解くとつぎの解が得られる。

$$x_1 = \frac{u_0}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \left\{ \frac{l - \beta_2^2}{\beta_1} \sin \beta_1 t - \frac{l - \beta_1^2}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right\} \dots \dots \dots (26)$$

図-3 2 自由度ばね系の応答



$$x_2 = \frac{u_0}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \left\{ \frac{l - \beta_1^2}{l} \cdot \frac{l - \beta_2^2}{\beta_1} \sin \beta_1 t - \frac{l - \beta_2^2}{l} \cdot \frac{l - \beta_1^2}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

質点 m_1 の m_2 に対する相対変位 x_r は

$$x_r = x_1 - x_2 = \frac{u_0}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \times \left\{ \frac{\beta_1^2 - n}{\beta_1} \sin \beta_1 t - \frac{\beta_2^2 - n}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{1}{2} \{ (l+m+n) + \sqrt{(l+m+n)^2 - 4ln} \} \\ \beta_2^2 &= \frac{1}{2} \{ (l+m+n) - \sqrt{(l+m+n)^2 - 4ln} \} \\ l &= \frac{K_1}{m_1 + \frac{M}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}}} \\ m &= \frac{K_1}{m_2} \\ n &= \frac{K_2}{m_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

x_r が最大になるまでの時間 τ_1 は $\dot{x}_r(\tau_1) = 0$ より

$$\frac{\cos \beta_1 \tau_1}{\cos \beta_2 \tau_1} = \frac{\beta_2^2 - n}{\beta_1^2 - n} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$K_1 x_r = F_L$ とおくと、 F_L はばね定数 K_1 のばねによる反力であって、ばね系に作用した外力 F_h とは異なる。

いま $t=0 \sim \tau_1$ までの F_L の力積 $F_L^0(\tau_1)$ を求めると

$$F_L^0(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} K_1 x_r dt = \left(m_1 + \frac{M}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}} \right) u_0 \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

浮体の接触点の速度が 0 になるまでにばね系に働いた力積 F_h^0 は式 (11) において $u_t=0$ とおくと、

$$F_h^0 = \frac{Mu_0}{1 + \alpha \frac{M}{M_r}} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$F_L^0(\tau_1)$ と F_h^0 の比をとると

$$\phi = \frac{F_L^0(\tau_1)}{F_h^0} = \left\{ 1 + \left(1 + \alpha \frac{M}{M_r} \right) \frac{m_1}{M} \right\} \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$\frac{m_1}{M} \simeq 0$ であれば

$$\phi = 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \quad \dots\dots\dots (34)$$

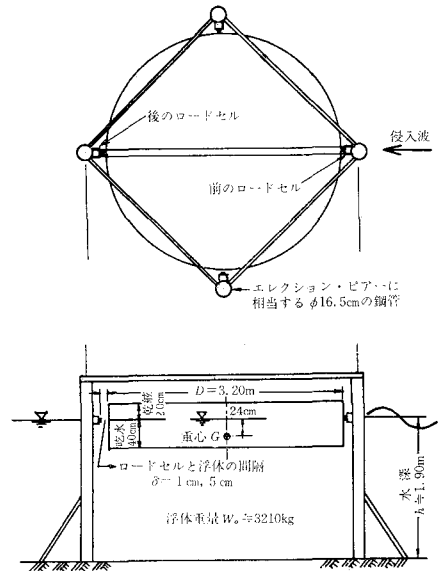
式 (33) あるいは式 (34) で示される ϕ は外力の力積がばね定数 K_1 のばねに吸収される割合を表わす。

3. 実験装置および実験方法

実験は長さ 60 m、幅 10 m (模型浮体の設置個所における有効幅 8 m) の波浪水槽で行ない、浮体は水槽のほぼ中央に図-4 に示すように設置された。

模型実験の縮尺は 1/25 で、浮体は鋼板で作られ、形は底付の円筒である。直径 3.20 m、高さ 60 cm、吃水約 40 cm、重量約 3 210 kg、重心は底から約 16 cm の位置である。水中におけるローリング周期は $T_n \simeq 1.94$ sec であった。

図-4 浮体の設置状況



Erection pier に相当するものとして、直径約 16.5 cm の鋼管を用い、これを浮体の四方にラーメン構造に組合わせ、浮体との間に間隔をあけて設置した。

浮体の動揺によって生じる衝撃力は四方の鋼管にロードセルを取付けて測定し、ロードセルと浮体との間隔 δ は 1 cm および 5 cm の 2 種類に変えた。

浮体は波の進行方向のみの運動しか行なわず、実際には横方向のロードセルには力は働かなかった。

図-5 は実験状況を示す。

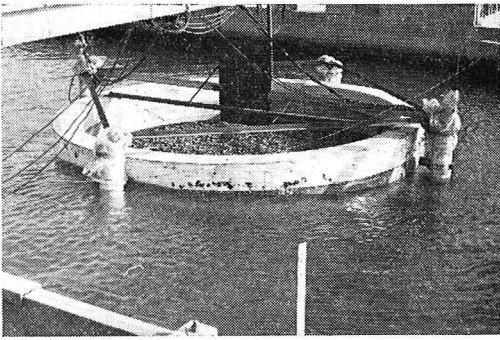
4. 実験結果の検討

ロードセルによって得られた衝撃力は一般に図-6 に示されるような時間的変化を示す。

衝撃力が最大になるまでの時間 τ_1 は式 (30) で表わ

図-5 実験状況

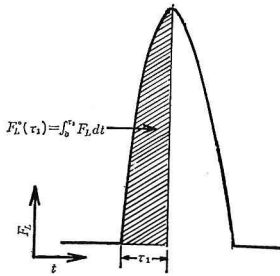
$T \div 2.0 \text{ sec}$, $H \div 9 \text{ cm}$



される。図-6の斜線部はロードセルが測定した力積で式(31)で表わされる。

実験に用いた浮体においては、ロードセルと浮体の重心点との鉛直距離が小さいので、近似的に重心点で衝突するものとする、式(30)~(34)はつぎのようになる。

図-6 衝撃力の時間変化



$$\frac{\cos \beta_1 \tau_1}{\cos \beta_2 \tau_2} = \frac{\beta_2^2 - n}{\beta_1^2 - n} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$F_L^0(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} K_1 x_r dt = (m_1 + M) u_0 \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$F_h^0 = M u_0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\phi = \frac{F_L^0(\tau_1)}{F_h^0} = \left(1 + \frac{m_1}{M} \right) \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$m_1 \ll M$ のとき (m_1 : ロードセルのひずみ部の質量, M : 浮体の全質量)

$$\phi = 1 - \left(1 - \frac{\beta_1^2}{n} \right) \cos \beta_1 \tau_1 \quad \dots\dots\dots (39)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{K_1}{m_1 + M} \simeq \frac{K_1}{M} \\ m &= \frac{K_1}{m_2} \\ n &= \frac{K_2}{m_2} \\ \beta_1, \beta_2 &: \text{式 (29) に同じ} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ロードセルで測定した力積 $F_L^0(\tau_1)$ およびその作用時間 τ_1 の値は図-7~10に示すとおりである。

図-7, 8 はロードセルによって測定された力積と波高の関係, 図-9, 10 は力積とその作用時間の関係を示している。

図-7 力積と波高の関係

$\delta = 1 \text{ cm}$

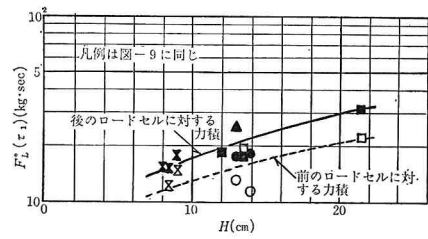
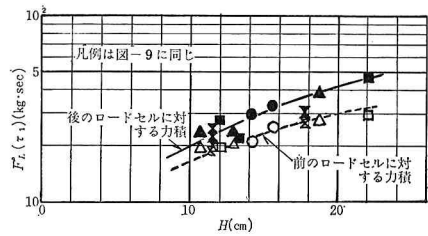


図-8 力積と波高の関係

$\delta = 5 \text{ cm}$



力積の作用時間 τ_1 は力積の大きさに関係なく、前後のロードセルに対してほぼ一定の値を示している。作

図-9 衝撃力の作用時間と力積の関係

$\delta = 1 \text{ cm}$

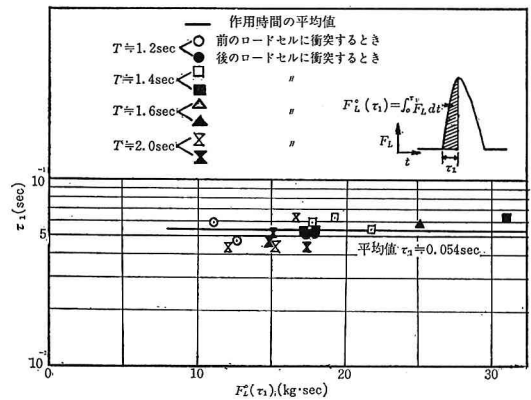
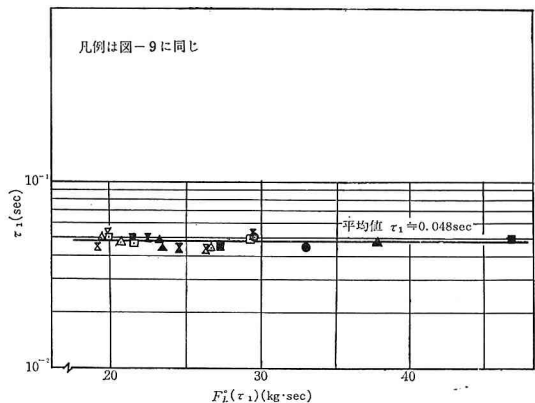


図-10 衝撃力の作用時間と力積の関係

$\delta = 5 \text{ cm}$



用時間の平均値は浮体とロードセルの間隔 $\delta=1\text{ cm}$ の場合 $\tau_1 \div 0.054\text{ sec}$, $\delta=5\text{ cm}$ の場合 $\tau_1 \div 0.048\text{ sec}$ であった。

ロードセルのばね定数 $K_1 \div 8 \times 10^3\text{ kg/cm}$, ラーメン構造に組合わせた鋼管柱のばね定数 $K_2 \div 4.5 \times 10^3\text{ kg/cm}$, 振動テストより求めた鋼管柱の質量 $m_2 \div 0.09\text{ kg}$, sec^2/cm , ロードセルのひずみ部の質量 $m_1 \div 0$, および測定された作用時間 τ_1 から付加質量を含む浮体の全質量 M を式(35)および式(40)を用いて求めることができる。

このようにして求めた M の値は表-1に示すとおりである。

表-1 作用時間から逆算した浮体の全質量 M

δ	K_1	τ_1	M_0	M	M_a	M_a/M_0
(cm)	(kg/cm)	(sec)	(kg·sec ² /cm)	(kg·sec ² /cm)	(kg·sec ² /cm)	
1.0	4.5×10^3	0.054	3.36	6.48	3.12	0.93
5.0	"	0.048	3.28	5.19	1.91	0.58

δ : 浮体とロードセルの間隔

K_2 : 鋼管柱等のばね定数

M_0 : 浮体の質量

M_a : 付加質量

表-1によれば付加質量は, $\delta=1\text{ cm}$ の場合は浮体の質量の約 90%, $\delta=5\text{ cm}$ の場合は約 60% である。

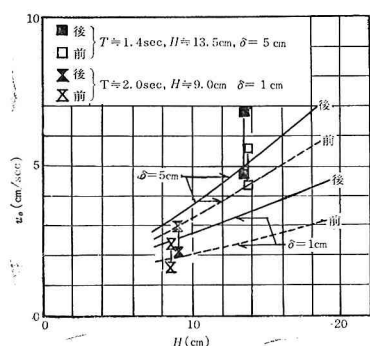
一方力積 $FL^0(\tau_1)$ は波高とともに増大しているが, 波の周期による相違は明確でない。これは浮体とロードセルの間隔が小さいため, 浮体の運動が十分発達しない間(過渡状態)に衝突することが原因の1つと考えられる。

式(39)より ϕ を計算すると, $\phi=0.95 \sim 0.97$ であるので, 測定された力積 $FL^0(\tau_1)$ はほぼ作用した力積 F_h^0 に等しいと考えられる。したがって $FL^0(\tau_1) \div F_h^0 = Mu_0$ と書けるから

$$u_0 \div \frac{FL^0(\tau_1)}{M} \dots\dots\dots (41)$$

式(41)より浮体がロードセルに衝突するときの接触点の接近速度 u_0 (a が小さいため, ほぼ重心の接近速度

図-11 式(41)より求めた接触点の接近速度と実測値との比較



度に等しい) を計算すると 図-11 に示すようである。

図-11 によれば接近速度はロードセルと浮体の間隔が大きいほど大きく, また波の進行方向に運動するときの方が反対方向に運動するときよりも大きい値を示している。

連続写真撮影によって実測された接触点における接近速度はあまり精度は良くないが, 図-11 に示すようにほぼ式(41)から計算された値と一致している。

図-12 は浮体の中央に棒を立て, 浮体の動揺とともに動く棒の軌跡を連続撮影によって追跡した一例である。この図から接触点(棒の先端から 66 cm 下方)の速度の時間的变化は 図-13 に示すように得られる。図-13 において速度が 0 になる時刻から τ_1 時間前の速度を求め, これを近似的に接近速度 u_0 にとった。

図-12 連続撮影によって追跡した浮体に取りつけた棒の軌跡

$T \div 2.0\text{ sec}$, $H \div 9\text{ cm}$ の場合

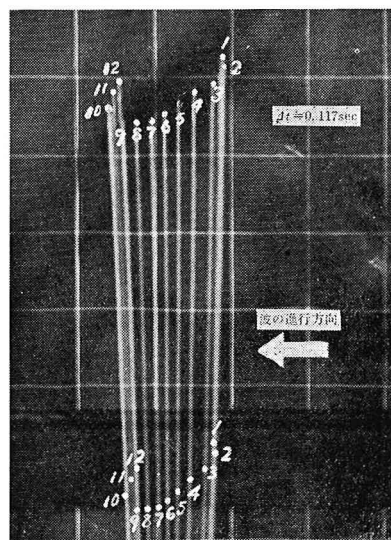
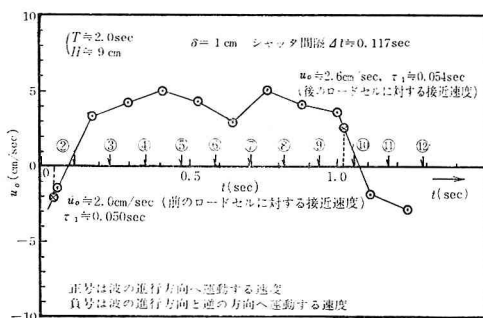


図-13 連続写真撮影による接触点の速度変化



5. 結 び

以上の研究結果からつぎの結論が得られた。

(1) 実験においてロードセルによって測定された

力積 $F_L^0(\tau_1)$ およびその作用時間 τ_1 は2自由度のばね系の運動方程式より導かれた式 (35) および式 (36) にほぼ一致する。

(2) 実験の結果、図—4に示されるような形状の浮体の付加質量 M_a は浮体の質量 M_0 のほぼ 60~90% で、浮体と衝突点との間隔によって変化するようである。

(3) 浮体の衝突によって erection pier に働く衝撃力 F_h は衝突中に浮体に働く波力を無視すれば式 (14) で、またその力積 F_h^0 は式 (11) によって求められる。

(4) 現地において浮体が衝突した場合の erection pier の応答は式 (17) で与えられ、衝突点の変位が最大になるまでの時間 τ_1 は式 (20) で与えられる。

(5) (4) において、浮体はその重心を通る水平線上で erection pier に衝突する場合の動的応答は式 (21) で、変位の最大が起るまでの時間 τ_1 は式 (23) で与えられる。

以上の研究は erection pier のばね定数が非常に大きい場合について行なったが、実際の erection pier のばね定数はこれよりかなり小さいものと考えられる。

ばね定数が小さくなると衝突中の接触時間も長くなるため、この間に浮体に働く波力も無視できなくなるであろう。ばね定数や浮体の吃水を変化させた場合の研究はつぎの機会に発表する。