

長波の研究用造波装置とその特性について (2)

岩 崎 敏 夫*・楊 沢 民**

1. 序 論

津波のような長波の研究用として東北大学において設置された造波装置の総合特性について、第 13 回海岸工学講演会にその第 1 報を報告した¹⁾。そのブロック線図は図-1 に示すように電気-油圧式自働制御機構の伝達関数 $G_2(S)$ 、水理系造波装置の伝達関数 $G_1(S)$ 、流量水位の伝達関数 $K(S)$ からなり、設定電流量 V が、水槽入口の水位 η に変換され、系は η のフィードバックによる自働制御系となっている。前報では $G_1(S)$ の解析結果を実験と比較してほぼ満足しうる結果をえたので、本報では、 $K(S)$ についての研究結果について報告する。

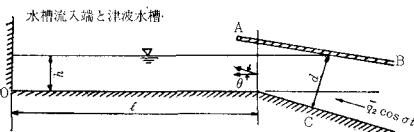
津波水槽の流入端では、図-2 に示すように q_2 なる流量が出入する。前報では解析したようにその入口 A において呈すべき水位 η は、実は津波水槽そのものの特性値 $\sigma_1 = cm\pi/l$ (c : 伝播速度, l : 水槽長, m : 成分波の次数) および $h \cos \theta/lbd$ (h : 水深, b : 幅, d : 流入管高, θ : 流入流線の水平とのなす角) によって影響をうけることは注目されてよい。

まず $K(S)$ に関する周波数応答の実験を行なったところ、前報に所載の理論解析とかなりことなつた結果をえた。そこでつぎに、その原因は水槽の減衰特性を無視した結果であると推定し、減衰項を考慮した理論解析をもとめて実験と比較したところ、比較的良好な結果をうることができた。

図-1 ブロック線図



図-2 水槽流入端と津波水槽



2. 流量水位伝達関数 $K(S)$ の周波数応答に関する実験

図-1 に示すフィードバックを開いたオープン・ループのままでは、はじめ 500 mm ロートバルブの開きが 70° に一定になるように調節計によって設定電流信号 V を与えておく。津波水槽の水位が定常になったときの水槽入口 A での水位 η を定常水位として記録する。

つぎにプログラムセッターによって正弦波電流信号 V を、500 mm ロートバルブの開きが 50° から 90° の間で開閉するように与えると、津波水槽には周期波があらわれる。図-3, 4, 5 に周期 $T=0.5/7, 1/7$, および $4/7$ 分の場合の測定例を示す。

図でわかるように、 η の波形はかならずしも単調でな

図-3 振動記録波形
 $T=0.5/7$ 分

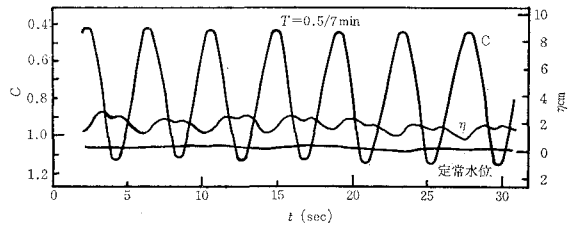


図-4 振動記録波形
 $T=1/7$ 分

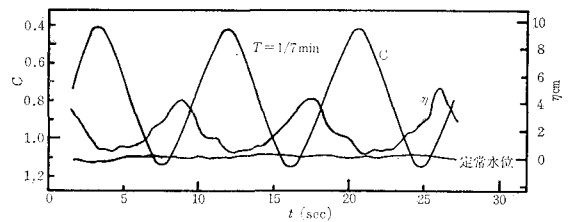
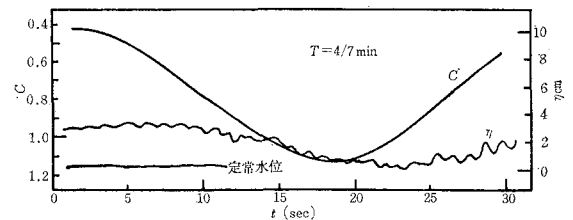


図-5 振動記録波形
 $T=4/7$ 分



* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

** 学生員 工修 東北大学大学院学生

く、多くのスペクトル成分をもつようである。

また振動波形の平均水位はつねに定常水位よりも高い。これは津波水槽への流入時に比し、水槽より $\phi 600$ mm の鉄管への逆流時の方が抵抗損失が著しく多いことを示している。

ところで 図-3~5 のような記録から、 η と c との振幅比、したがってゲイン、および η と c との位相差が求められる。他方、前報の研究結果によって、 q_2 と c とのゲインおよび位相差が求められているから、この両者を用いて、 η と q_2 とのゲインおよび位相差がえられる。

かくしてえられたゲイン値および位相差の実測値をつぎに理論と対比することにする。

3. 水槽伝達関数 $K(S)$ の理論解 (減衰項無視の場合) の実測値との比較

前報において減衰項を考慮しないときの $K(S)$ の理論解が与えられている。

すなわち H, Q_2 を η, q_2 のラプラス変換とすると、

$$K(S) = H/Q_2 = \frac{2h \cos \theta}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S \sigma_1}{S^2 + \sigma_1^2} \dots (3.1)^*$$

いま、 $l=22.4$ m, $b=5$ m, $d=0.5$ m, $h=0.3$ m, $\theta=16.4^\circ$ として、 m の4次項まで計算すると次式をうる。

$$K(S) = 1.2 \times 10^{-2} \left(\frac{\sigma_{11}^2}{S^2 + \sigma_{11}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2 + \sigma_{12}^2} \right)$$

図-6 $K(S)$ のゲイン曲線

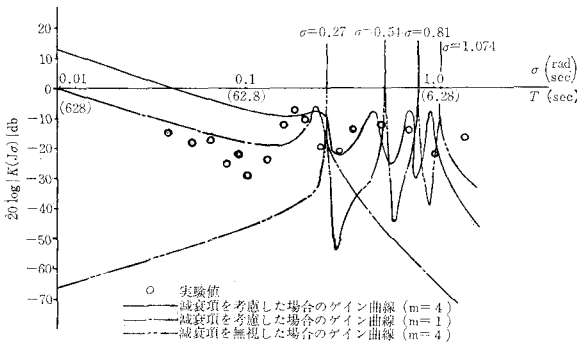
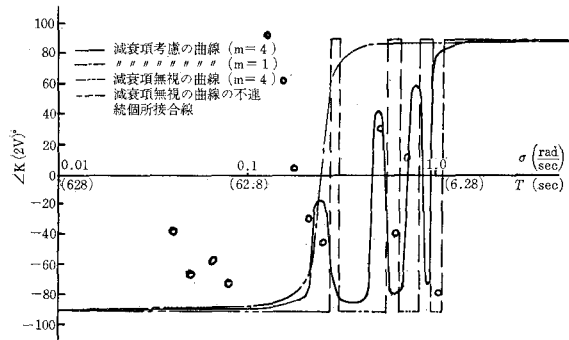


図-7 $K(S)$ の位相曲線



* 前報では右辺に $(-1)^m$ が入っていたが、計算のミスと思われるので省略した。

$$+ \left(\frac{\sigma_{13}^2}{S^2 + \sigma_{13}^2} + \frac{\sigma_{14}^2}{S^2 + \sigma_{14}^2} \right) S \dots (3.2)$$

ここに、 $\sigma_{11}=0.27$, $\sigma_{12}=2\sigma_{11}=0.54$, $\sigma_{13}=3$, $\sigma_{14}=0.81$, $\sigma_{14}=4\sigma_{11}=1.08$ である。さらに書き直すと、

$$K(S) = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$\cdot \left(\frac{30 S^6 + 546 \sigma_{11}^2 S^4 + 2460 \sigma_{11}^4 S^2 + 2304 \sigma_{11}^6}{(S^2 + \sigma_{11}^2)(S^2 + 4\sigma_{11}^2)(S^2 + 9\sigma_{11}^2)(S^2 + 16\sigma_{11}^2)} \right) \cdot \sigma_{11}^2 \cdot S$$

$$S = j\sigma$$

とおくと、

$$K(j\sigma) = -2.624 \times 10^{-2}$$

$$\cdot \left(\frac{\sigma^6 - 1.327 \sigma^4 + 0.436 \sigma^2 - 0.0298}{(S^2 + \sigma_{11}^2)(S^2 + 4\sigma_{11}^2)(S^2 + 9\sigma_{11}^2)(S^2 + 16\sigma_{11}^2)} \right) j\sigma \dots (3.3)$$

式 (3.3) によってゲイン曲線および位相曲線は容易にえがきうる。図-6, 7 の2点鎖線がそれであって、特定角振動数 $\sigma=0.27$ rad/sec およびその整数倍のところに共振部分が存在し、位相は $\pm 90^\circ$ で反転している。

さて前節のようにしてえられた実験値を同様に示した。実験値と理論値との一致はよくなく、ことに低い周波数のときにははなだよくない。

そこでつぎに減衰項を考慮した解析を進めてみることにした。

4. 減衰項を考慮した波動方程式

海底摩擦による波高の減衰については、1964 年に Jonsson が研究の概括化をこころみ²⁾、また岩垣・土屋が層流境界層に関する理論的研究を行なうまで³⁾、過去 20 年間に、数多くの研究がなされてきた。ここでは Jonsson の方法にしたがって計算をすすめてみる。いまコンクリート水槽として $n=0.016$ とし、径深 $R \approx 0.3$ m とする。このとき周期 $T=20$ 秒、波高 $H=2$ cm の波の場合、境界層は厚さ $\delta=0.816$ cm の乱流境界層であって、抵抗係数 $f_w=0.047$ がえられ、したがって底面応力 τ_b は、

$$\tau_b = f_w \cdot \frac{1}{2} \rho u^2 \dots (4.1)$$

で表わされる。ここに u は底面にそう水粒子の速度である。

粘性を考慮した運動方程式は、2次元波動水槽で鉛直方向の速度を無視すると、つぎの式であらわされる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} \right) \dots (4.2)$$

ここに、 p_{xx}, p_{yx} は、 x 方向に垂直な面での垂直および切線応力であって、乱流の場合には、

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p - \rho \overline{u'u'} \\ p_{yx} &= \tau_\mu - \rho \overline{u'v'} \end{aligned} \right\} \dots (4.3)$$

で表わされる。ここに p は静水圧、 τ_μ は粘性による切

線応力, $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$ は変動速度 u' および v' の積の時間的平均値である。ここで $\partial \rho \overline{u'u'}/\partial x$ は, $\partial p/\partial x = \rho g \cdot \partial \eta/\partial x$ に比して小さく, 粘性応力 τ_a は乱流応力 $\rho \overline{u'u'}$ に比して小さいと仮定すると式 (3.5) より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \overline{u'u'})}{\partial y}$$

となるが, 長波の場合 y 方向の速度が一定であることを考慮して, 上式を y 方向について積分し, 水深 $h+\eta$ でわることにより次式をうる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho(h+\eta)} (\tau_a - \tau_b)$$

ここに, τ_a は水と空気との, また τ_b は水と底面との摩擦応力であり, この場合には τ_a の効果は考えないので無視し, τ_b として式 (4.1) を用いると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f_w}{h+\eta} u^2 \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

いま近似的に右辺第2項を $k_1 u$ とおくと。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - k_1 u \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

連続方程式は,

$$\eta = -h \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

また, $\xi = \int u dt$ とおき, 式 (4.5), (4.6) より η を消去すると,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (c^2 = gh) \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

をうる。境界条件は前報と同じく,

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } \xi=0 \\ x=l \text{ で } \xi=f(t)=\frac{a}{\sigma} \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

ただし, $(a=\bar{q}_2/bd) \cos \theta$, 初期条件も同じく,

$$t=0 \text{ で } \xi=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}=0 \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

Stokes の方法によりとけば, 式 (4.7) の解として, 次式をうる。

$$\begin{aligned} \xi(t, x) = & -2\pi a \left(\frac{c}{l}\right)^2 \Sigma \frac{(-1)^m m}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ & \cdot \left[\frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_1}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2 + \sigma^2} - \frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_2}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2 + \sigma^2} \right] \\ & \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots (4.10) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = & -\frac{k_1}{2} + j \left(\sigma_1^2 - \frac{k_1^2}{4} \right)^{1/2} \\ \lambda_2 = & -\frac{k_1}{2} - j \left(\sigma_1^2 - \frac{k_1^2}{4} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \sigma_1 = \frac{cm\pi}{x} \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

したがって,

$$\eta(t, x) = -h \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2\pi^2 ah \frac{c^2}{l^3} \Sigma \frac{(-1)^{m+1} \cdot m^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[\frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_1}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2 + \sigma^2} - \frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_2}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2 + \sigma^2} \right] \\ & \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \quad \dots\dots\dots (4.12) \end{aligned}$$

をうる。 $x=l$ においては,

$$\begin{aligned} \eta(t, l) = & -2\pi^2 ah \frac{c^2}{l^3} \Sigma \frac{m^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ & \cdot \left[\frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_1}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1^2 + \sigma^2} - \frac{\cos \sigma t + \frac{\lambda_2}{\sigma} \sin \sigma t - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2^2 + \sigma^2} \right] \\ & = B \Sigma_{m=1}^{\infty} (Y_{1m} \cos \sigma t + Y_{2m} \sin \sigma t \\ & + Y_{3m} e^{\lambda_1 t} + Y_{4m} e^{\lambda_2 t}) \cdot \bar{q}_2 \quad \dots\dots\dots (4.13) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} B = & \frac{2\pi^2 h \cdot \cos \theta}{bd} \frac{c^2}{l^3}, \quad Y_{1m} = m^2 \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1^2 + \sigma^2)(\lambda_2^2 + \sigma^2)} \\ Y_{2m} = & \frac{-m^2(\sigma^2 - \lambda_1 \lambda_2)}{\sigma(\lambda_1^2 + \sigma^2)(\lambda_2^2 + \sigma^2)}, \quad Y_{3m} = \frac{m^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + \sigma^2)} \\ Y_{4m} = & \frac{-m^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2^2 + \sigma^2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

式 (4.13) をラプラス変換すると, 流量水位伝達関数 $K(S)$ は減衰項を考慮の場合, 次式で表わされる。

$$\begin{aligned} K(S)H/Q_2 = & B \Sigma_{m=1}^{\infty} \\ & \cdot \left(Y_{1m} + Y_{2m} \frac{\sigma}{S} + Y_{3m} \frac{S^2 + \sigma^2}{S(S - \lambda_1)} + Y_{4m} \frac{S^2 + \sigma^2}{S(S - \lambda_2)} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4.15)$$

5. 減衰係数 k_1

式 (4.15) を計算するためには, 減衰係数 k_1 を知る必要がある。これを実験的に求めるために, 前節の結果を参照し, あらかじめ水槽内に基本周期 ($m=1$) に相当する強制振動を生じせしめておき, ちょうど振動変位が0になる瞬間を見はからって造波を停止して自由振動のままに放置し, 水槽入口端における水位変動の減衰を記録し, 対数減衰率を求めることによって減衰係数 k_1 を求める。

すなわち式 (4.7) において境界条件は,

$$x=0 \text{ で, } \xi=0, \quad x=l \text{ で, } \xi=0 \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

初期条件は,

$$t=\tau \text{ で, } \xi=0, \quad \partial \xi / \partial t = \phi(x) \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

式 (4.10) において, $m=1$ のみを取り, 式 (5.2) を求める。

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \left\{ \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} \right\}_{t=\tau} = 2\pi a \left(\frac{c}{l}\right)^2 \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ & \cdot \left[\frac{-\sigma \sin \sigma \tau + \lambda_1 \cos \sigma \tau - \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}}{\lambda_1^2 + \sigma^2} \right. \\ & \left. - \frac{-\sigma \sin \sigma \tau + \lambda_2 \cos \sigma \tau - \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau}}{\lambda_2^2 + \sigma^2} \right] \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

$t=\tau$ は次式を満足すべきものである。

$$\frac{\cos \sigma \tau + \frac{\lambda_1}{\sigma} \sin \sigma \tau - e^{\lambda_1 \tau}}{\lambda_1^2 + \sigma^2} - \frac{\cos \sigma \tau + \frac{\lambda_2}{\sigma} \sin \sigma \tau - e^{\lambda_2 \tau}}{\lambda_2^2 + \sigma^2} = 0 \dots (5.4)$$

これより、式(4.7)の解を求め、 $\eta = -h(\partial \xi / \partial x)$ を用いると、 η の表現式として、

$$\eta = \eta_0 e^{-k_1 t/2} \cdot \sin \sigma t \dots (5.15)$$

ただし、

$$\eta_0 = 2\pi^2 a h \left(\frac{c^2}{l^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cdot \left\{ \frac{-\sigma \sin \sigma \tau + \lambda_1 \cos \sigma \tau - \lambda_1 e^{\lambda_1 \tau}}{\sigma^2 + \lambda_1^2} - \frac{-\sigma \sin \sigma \tau + \lambda_2 \cos \sigma \tau - \lambda_2 e^{\lambda_2 \tau}}{\sigma^2 + \lambda_2^2} \right\} \dots (5.16)$$

をうる。

図-8 に実験記録を示す。これより、

$$k_1 \approx 0.027$$

をえた。

6. 減衰項を考慮した理論解と実測値との比較

周波数特性を求めるために、 $S=j\sigma$ とおくと、式(4.15)の右辺第3, 4項は0となるので、

$$K(j\sigma) = H/Q2 = B \sum_{m=1}^{\infty} (Y_{1m} - jY_{2m}) \dots (6.1)$$

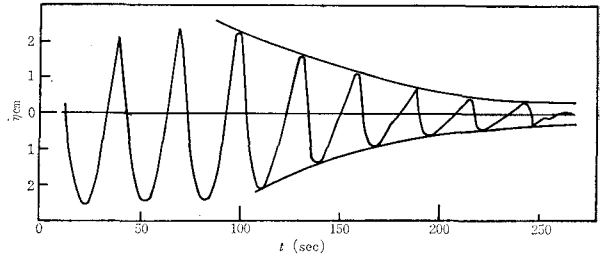
式(4.11), (4.14)の諸数値を求めて表-1をえた。

図-6 に基本波 $m=1$ のみの場合と、 $m=4$ までとった場合を、それぞれ1点鎖線および実線によって書き加えた。ゲイン曲線においては、 $\sigma < \sigma_{11}$ 、すなわち長周期の場合には、 $m=1$ のみの場合においてむしろよく実験値とあっており、 $\sigma_{11} < \sigma < \sigma_{14}$ の場合には、 $m=4$ までとった場合によくあっているように思われる。おそらく長周期波の場合に計測時間をさらにのばしてゆくと、 $m=4$ の場合に近づくと思われるが、津波の実験そのものが、有限個の波数で行なわれると考えられるので、これ以上の追究の必要はないであろう。

図-7 にも同様にして理論解を加えた。 $\sigma > \sigma_{11}$ においては、 $m=4$ までの理論解に比較的よく一致している。そして、 $\sigma < \sigma_{11}$ においては、実験値はあまりよく理論解によって表わされているとはいいがたい。これは

図-8 自由振動の減衰波形

($T=30$ sec)



長周期波ほど波の山谷の読みとりが困難なためであろうと推測される。それにしても、実験値でも、理論値でも、低周波ではつねに位相が、プログラム設定値からずれるということは注目されてよいことと思われる。

7. 結 語

長波の研究用造波装置の特性について、今回は流量水位伝達関数 $K(S)$ の特性の解明にとどまってしまった。

本論にのべたように、その場合ですら、水理実験の包蔵する本質的な問題たる反射波との干渉に多くの困難が内在することがわかる。しかも本論文では、津波水槽の流入端の相手側、すなわち $x=0$ では完全反射を仮定しているが、模型がここにすえられ、反射率が1より小さくなった場合には、この特性も若干変わってくることが予想される。

フィードバックによる偏差の解消、すなわち最適制御は電気-油圧系伝達関数 $G_2(S)$ によって行なわれることになるはずであるが、これについての報告はつぎの機会に行ないたい。

最後に本研究は、昭和41年度文部省試験研究費「津波の湾内変形に関する研究」に一部の援助をうけた。ここに記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫・楊 沢民：“長波の研究用造波装置とその特性について(1)”，土木学会第13回海岸工学講演会講演集[1966]，昭和41年12月。
- 2) Jonson, I.G.: “Wave Boundary Layers and Friction Factors”, Proc. of Tenth Conf. on Coastal Engineering, Sept. 1966.
- 3) Iwagaki, Y. and Y. Tsuchiya: “Laminar Damping of Oscillatory Waves Due to Bottom Friction” Proc. of Tenth Conf. on Coastal Engineering, Sept. 1966.

表-1 津波水槽の振動特性

$l=22.4$ m, $b=5$ m, $d=0.5$ m, $h=0.3$ m, $\theta=16.4^\circ$, $k_1=0.027$ rad/sec, $C=1.72$ m/sec, $B \approx 6 \times 10^{-4}$

m	1	2	3	4
σ_1 rad/sec	0.27	0.54	0.81	1.08
$\lambda_1, (\lambda_2)$	$-0.0135 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 0.2407j$	$-0.0135 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 0.4820j$	$-0.0135 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 0.7231j$	$-0.0135 \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 0.9643j$
Y_{1m}	$\frac{-0.027}{\sigma^4 - 0.1156\sigma^2 + 33.83 \times 10^{-4}}$	$\frac{-0.018}{\sigma^4 - 0.4644\sigma^2 + 5.41 \times 10^{-2}}$	$\frac{-0.243}{\sigma^4 - 1.046\sigma^2 + 27.37 \times 10^{-2}}$	$\frac{-0.432}{\sigma^4 - 1.859\sigma^2 + 86.50 \times 10^{-2}}$
Y_{2m}	$\frac{-(\sigma^2 - 0.0581)}{\sigma(\sigma^4 - 0.1156\sigma^2 + 33.83 \times 10^{-4})}$	$\frac{-(\sigma^2 - 0.2325)}{\sigma(\sigma^4 - 0.4644\sigma^2 + 5.41 \times 10^{-2})}$	$\frac{-(\sigma^2 - 0.5232)}{\sigma(\sigma^4 - 1.046\sigma^2 + 27.37 \times 10^{-2})}$	$\frac{-(\sigma^2 - 0.9301)}{\sigma(\sigma^4 - 1.859\sigma^2 + 86.50 \times 10^{-2})}$