底面および側壁が直線的に変化する湾における長波の波高変化

杉 本 修 一*・西 村 益 夫**

1. まえがき

深海波としての沖波がV字型のそして奥へ行くにしたがい，浅くなってゆくような湾内に進入してきたときには，水深は浅くなってゆくので波高は相対的に増大してゆき，湾の最奥部においては波高が非常に増大することはよく知られた事実である。

傾斜した海浜に深海波としての沖波が進入してくるとき，これを深さのみが直線的に変化するときの問題として解くことは「長波のうちあげ高」の問題と関連して多くの研究者によって試みられている。たとえば，古くは Peters[1] や Roseau[2] 最近になって Carrier and Greenspan[3] や Greenspan[4] があげられる。わが国においては岸博士[5]や首藤および松村[6]両氏や首藤氏[7]などによって研究されている。

水深も幅も変化するような場合に対する式として，Green[8] の式がよく知られている。また原点から水深も幅も直線的に変化する場合については Lamb[9] によって示されている。

しかし，実際の海岸にあるように，海岸壁においてはある水深を有し，それより沖に向かうにしたがい水深も幅も増大してゆくような場合に対する沖波の変化というものについては理論的に調べたものはまだないように思われる。

そこで，このような問題を調べてゆくについての予備計算のようなつもりで，原点においてある水深を有し，幅は0で，それより沖にゆくにしたがいいずれも直線的に変化するような場合について少しばかり計算を試みた。V字型をした側面からの反射波については当然考えねばならないのであるが今回は反射の影響については考えないことにした。

2. 理論的考察

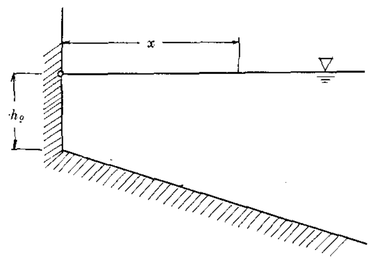
水深も幅もともに変化するような湾の中を長波が進行するような場合における波高に関する方程式はよく知られているように[10]，波高を η，水深を h，幅を b，波の周期を T とすると，原点よりの距離を x として，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(hb\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{b\sigma^2}{g}\eta=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，$\sigma=2\pi/T$

として与えられる。

図—1



いま，$h=h_0+K_1x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$b=K_2x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

であると仮定して，これらの式を式(1)に代入すると，

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{h_0+2K_1x}{x(h_0+K_1x)}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{g}\frac{1}{(h_0+K_1x)}\eta=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

を得る。さらに

$$\frac{K_1x}{h_0}=\xi,\quad \frac{\sigma^2h_0}{gK_1{}^2}=\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

とおいて式(4)を書き換えると

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{1+2\xi}{1+\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+\frac{\lambda}{1+\xi}\eta=0\cdots\cdots\cdots(6)$$

を得る。

この方程式を Frobenius の方法で解くことにする。この方程式は $\xi=0$ および $\xi=-1$ の2点において特異点を有する。しかし，いま $\xi=0$ の点の付近においてベキ級数に展開されるとして，その級数における各項の係数を決定してゆくことにする。

いま，この方程式の1つの解 η_1 を

$$\eta_1=\xi^p(a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots(7)$$

であると仮定して，これを式(6)に代入すれば，

$$\begin{aligned}&\xi^{p-1}(1+\xi)[p(p-1)a_0+(p+1)pa_1\xi+\\&\quad(p+1)(p+2)a_2\xi^2+(p+2)(p+3)a_3\xi^3+\cdots]\\&+\xi^{p-1}(1+2\xi)[pa_0+(p+1)a_1\xi\\&\quad+(p+2)a_2\xi^2+(p+3)a_3\xi^3+\cdots\cdots]\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\xi^{p+1}\lambda[a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\cdots\cdots]=0\end{aligned}$$

* 正会員 神戸大学工学部
** 正会員 工修 明石工業高等専門学校

を得る。この式において ξ^{p-1}, ξ^{p}, ξ^{p+1}…… のそれぞれの項を 0 とすれば

$$\xi^{p-1}[p(p-1)+p]\,a_0=0$$
$$\xi^{p}\{[(p+1)p+(p+1)]\,a_1+[p(p-1)+2p]\,a_0\}=0$$
$$\xi^{p+1}\{[(p+2)(p+1)+(p+2)]\,a_2+[(p+1)p+2(p+1)]\,a_1+\lambda a_0\}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

が与えられる。これらの式の

第 1 項より，$p(p-1)+p=0$, $p^2=0$, $p=0$……(8)

第 2 項より，$a_1+0=0$, $a_1=0$

第 3 項より，

$$[2+2]\,a_2+[2]\,a_1+\lambda a_0=0,\quad a_2=-\frac{\lambda a_0}{4}$$

第 4 項より，

$$[6+3]\,a_3+[2+4]\,a_2+\lambda a_1=0,\quad a_3=\frac{\lambda a_0}{6}$$

同様にして

$$a_4=-\frac{[3\cdot2+2\cdot3]}{4\cdot3+4}a_3-\frac{\lambda a_2}{4\cdot3+4}$$
$$a_5=-\frac{[4\cdot3+2\cdot4]}{5\cdot4+5}a_4-\frac{\lambda a_3}{5\cdot4+5}$$
$$a_6=-\frac{[5\cdot4+2\cdot5]}{6\cdot5+6}a_5-\frac{\lambda a_4}{6\cdot5+6}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m=-\frac{[(m-1)(m-2)+2(m-1)]}{m(m-1)+m}a_{m-1}-\frac{\lambda a_{m-2}}{m(m-1)+m}$$

……(9)

を得る。

いま，$T=12$ sec, $h_0=10$ m, $K_1=1/10$……(11)

と仮定して上式の係数を計算してみると，**表—1** のごとくなる。

表—1

m	a_m/a_0	m	a_m/a_0	m	a_m/a_0
1	0	11	−0.774	21	0.220
2	−6.990	12	−0.935	22	−0.195
3	4.660	13	0.991	23	0.175
4	8.675	14	−0.787	24	−0.159
5	−12.130	15	0.612	25	0.144
6	3.385	16	−0.488	26	−0.132
7	4.574	17	0.400	27	0.122
8	−3.763	18	−0.336	28	−0.113
9	−1.241	19	0.287	29	0.105
10	1.167	20	−0.249	30	−0.098

方程式 (6) の 1 つの解 η_1 は求めることができた。もう 1 つの他の解 η_2 をつぎに求めることにする。式 (8) の指数を決定する式をみてみると指数 p は重根で，かつ 0 であることがわかる。この場合におけるもう 1 つの解 η_2 はよく知られているように

$$\eta_2=\eta_1\ln\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial a_n}{\partial p}\right)_{p=0}\xi^n\cdots\cdots(12)$$

で与えられる。そこで第 2 項を

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial a_n}{\partial p}\right)\xi^n=b_1\xi+b_2\xi^2+b_3\xi^3+\cdots\cdots(13)$$

の型に書き η_1 を求めた方法と同様の方法で式 (13) の係数 b_n を求むれば，

$$b_1=-a_0$$
$$b_2=\frac{a_0}{2}-a_2$$
$$b_3=\frac{-a_0(3-\lambda)+a_2-6a_3}{9}$$
$$b_4=\frac{-48a_4+6a_3-a_2(8-6\lambda)-a_0(11\lambda-24)}{96}$$
$$b_5=\frac{1}{1\,800}\{-720a_5+72a_4-6a_3(15-8\lambda)+2a_2(60-49\lambda)+a_0(-8\lambda^2+189\lambda-360)\}$$

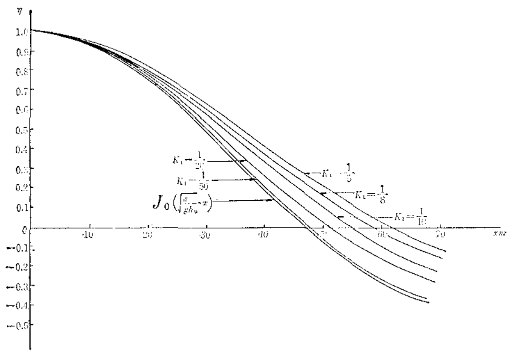
……(14)

を得る。

しかし，$\xi=0$ においては波高は有限であり，かつ $\partial\eta/\partial\xi=0$ なる条件を満足せねばならない。この条件を考慮すれば η_2 なる式 (12) は不要となり，結局 η_1 の式 (7) のみを考慮すればよいことがわかる。

この計算は前にも述べたように壁よりの反射波による影響は考えていない。そこで式 (7) にもとづいて $\xi=0$ すなわち，湾の最奥点付近における性状に重点をおき，最奥点における水深 $h_0=10$ m, 波浪の周期 $T=12$ sec, これらの値を一定にした場合 $\left[\text{すなわち } \eta\propto J_0\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{gh}}\cdot x\right)\right]$ と，底面の傾斜 K_1 を $K_1=1/5$, 1/8, 1/10, 1/20 および 1/50 の 6 種類の場合について $\xi=0$ 付近における波浪の形を計算してみると，**図—2** のごとくなる。この図をみると底面の傾斜が急になるにしたがって波浪の半波長が長くなってゆき，波形の傾斜が緩やかになってゆくことがわかる。

図—2



3. あとがき

海岸壁においてはある水深を有し，それより沖に向かうにしたがい水深も幅も直線的に変化するようなV字型の湾に，深海波としての沖波が進入してきたとの波形の変化についての理論的研究の予備計算のような意味において，側壁の反射波による影響については今回は考えないことにして波動方程式を Frobenius の方法によって

解いたものである。

最奥部海岸壁における水深を 10 m，沖波の周期を 12 sec として，海底勾配を零，1/5，1/8，1/10，1/20 および 1/50 の 6 種類の場合について数値計算を行なった結果は図—**2** のごとくである。この図をみると底面の傾斜が急になるにしたがい，波浪の半波長は長くなり，波形の傾斜は緩やかになってゆくことがわかる。

この研究をなすにあたって神戸大学田中教授の変わらぬご援助に対して謝意を表する。

参　考　文　献

1) Peters, A.S. : "Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary problem for $\nabla^2\phi-k^2\phi=0$ in a sector" Communication on Pure and Applied Mathematics, Vol. 5, 1952, pp. 87-108.
2) Roseau, M. : "Contribution à la théorie des ondes liquids de gravité en profondeur variable" Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, No. 275, Paris, 1952.
3) Carrier, G.E. and Greenspan, H.P. : "Water waves of finite amplitude on a sloping beach" J. of Fluid Mech. 1958.
4) Greenspan, H.P. : "On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach" J. of Fluid Mech. 1958.
5) 岸力・花井正次：「津波の変形と陸上への打上げ高」，第 8 回海岸工学講演会講演集，昭 36.9，pp. 41-45.
6) 首藤伸夫・松村圭二：「長波について（一様傾斜面へのうち上げ高）」第 12 回海岸工学講演会講演集，昭 40-11 pp. 176-179.
7) 首藤伸夫：「長波のうち上げ高」第 13 回海岸工学講演会講演集，昭 41.12，pp. 216-222
8) Lamb, H. : "Hydrodynamics" 1932, 6 Ed. pp. 275.
9) ditto pp. 276.
10) ditto pp. 275.