

波浪の予測フィルター・変換フィルター (1)

日 野 幹 雄*

要 旨 まず電子計算機で発生させた乱数から、Neumann スペクトルをもつ不規則波を合成する方法を述べた。つぎに、こうして作られた不規則波の近い未来における波高を時々刻々予測する問題を取扱った。

1. 序 論

現象の予測は機械や構造物の設計上から、また防災上からも重要な課題の一つである。従来の fetch graph などによる波浪予測が巨視的な、あるいは平均値的な観点からの予測であるのに反し、ここで述べようとする問題はより微視的瞬間的な観点からの波の一波一波の予測についてである。

こうした予測の可能性についての研究が今ただちに海岸構造物の設計その他に取り入れられようとは考えられないが、構造物が巨大化するにつれて、従来もっぱら単に外力に抗する立場から設計されて来ている土木構造物にも、なんらかの形で制御機構を取り入れることの方が経済的となることもありえよう。

また、ここで取扱う問題の直接の目的は、波浪観測の精度の向上——つまり波浪観測にともなう波形のひずみや雑音を取り除くことにある。

さて、最近是不規則変動の統計的处理方法や情報理論に関する知識が広く普及して、これらの方法を応用した研究が種々の分野で行なわれるようになった。

海岸工学の分野では、酒匂 (1963) が河口湖の塩水濃度の予測に流入河川流量と湖水塩分との spectrum および cross-spectrum より応答関数を求めて線型系としての予測を試み、日野 (1964) は東京湾の振動特性の解析に不規則入射波に対する湾内各点の水面変動を統計的に処理して、ただ 1 回の実験で振動特性のすべての情報を得る方法を示したし、本間・堀川・小森 (1965) は圧力式波高計の記録による spectrum と (水位式波高計による) 真の spectrum との関係から、圧力式波高計による波の spectrum のひずみを補正しようとした。

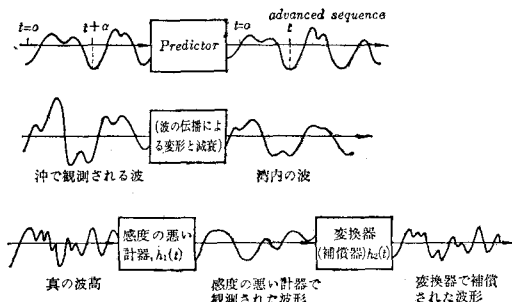
これらの研究は、いずれも対象とする現象が“線型系である”と仮定して論じられたものであり、いわば情報理論の初期段階での応用であるといえよう。しかし、一般にはある入力-出力系が“線型である”と仮定することは厳しすぎ、そのためにむしろ結果に不必要な誤差を

導入したり、あるいは情報理論の応用があまり好ましい結果を与えない場合が多いと思われる。

こうした場合、むしろ今考えている系は“線型系ではないが”それを“線型系で近似してその結果の誤差を最少にするよう”に考える方がよい。こうした問題は戦時中および以後の通信における雑音の除去—optimum filtering の理論として、Wiener や Kolmogorov によって論じられたものである。

問題を特に波浪に限れば、つぎのような場合を取扱うことができる。

図—1 波浪の予測・変換フィルターの例



- i) 湾外の波浪の時々刻々の通報 (雑音を含んでいても良い) から湾内のある点の時々刻々の波高を予測する。波の観測点と予測点が一致していても良い。
- ii) 水圧式波高計の記録から真の波高記録やスペクトルを求める。いわば、感度の悪い変換器を通して歪んだ情報をできるだけ元の形に近く再現してやることである。

最適予測の理論

波高計とか湾内の水位などを一つの伝達系と考える。この系は一般には線型系ではないが、線型系で近似することが可能である。Wiener らの理論は、この近似系への入力+ (雑音) に対する出力と、実際に起こる出力 (望ましい出力) との差の二乗平均根 *r.m.s.* を最少にするような近似系の伝達関数を求めることである (Wiener, Lee)。

入力を $f_i(t) = f_m(t) + f_n(t)$ ($f_n(t)$ は雑音) とすると、近似系の伝達関数を $h(t)$ として、出力 $f_o(t)$ は

$$f_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f_i(t-\tau) d\tau \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。実際の出力を $f_d(t)$ とすれば、最適予測

* 正会員 工博 東京工業大学 工学部

の問題は

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f_0(t) - f_d(t)]^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \\ &\quad \times \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f_i(t-\tau) d\tau - f_d(t) \right]^2 dt \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を最小にする $h(t)$ を求めることである。式 (2) を多少変形すれば、

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_0^{\infty} h(\sigma) d\sigma \varphi_{ii}(\tau-\sigma) \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \varphi_{id}(\tau) + \varphi_{dd}(0) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

となる。ここに、 φ_{ii} , φ_{dd} , φ_{id} はそれぞれ入力・出力の自己相関と入出力の相互相関である。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ii}(\tau) &= \overline{f_i(t) f_i(t+\tau)} \\ \varphi_{dd}(\tau) &= \overline{f_d(t) f_d(t+\tau)} \\ \varphi_{id}(\tau) &= \overline{f_i(t) f_d(t+\tau)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\overline{\varepsilon^2(t)}$ を最小にすることは、変分法によりつぎの積分方程式を解くことに帰着する。

$$\varphi_{id}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma \quad (\tau \geq 0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

この式は、**Wiener-Hopf** の積分方程式と呼ばれるもので、 $\tau \geq 0$ なる条件が付加されていることが特徴であり、また重要である。

もし、この式に $\tau \geq 0$ の条件がなく、 $\tau < 0$ でも成立する場合には、式 (5) の Fourier 変換からただちに

$$H(\omega) = \Phi_{id}(\omega) / \Phi_{ii}(\omega) \quad \dots\dots\dots (6)$$

が求まる。ここに、 $H(\omega)$, $\Phi_{id}(\omega)$, $\Phi_{ii}(\omega)$ はそれぞれ $h(t)$, $\varphi_{id}(t)$, $\varphi_{ii}(t)$ の Fourier 変換である。なお、出力のスペクトル $\Phi_{00}(\omega)$ は

$$\Phi_{00}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ii}(\omega) \quad \dots\dots\dots (7)$$

で表わされる。

式 (5) は現象の観測が無限大の過去まで逆のぼりうる場合の応答関数 $h_{\text{opt}}(t)$ を求める式である。しかし、実際問題として、過去の観測は有限時間 T である。有限な観測時間 T の場合への式 (5) の拡張は Zadeh and Ragazzini (1950) や Davies (1952) によって試みられ、次式を得ている。

$$\varphi_{id}(\tau) = \int_0^T h_{\text{opt}}(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma \quad (0 \leq \tau \leq T) \quad \dots\dots\dots (8)$$

式 (5) を解く方法は Wiener (1949) の spectrum factorization 法, Davies (1952) による固有関数展開法, Zadeh and Ragazzini (1950) による直接的な方法がある。Wiener の spectrum factorization 法は特別な場合以外には適用しえず他の方法にくらべて一般的でないといわれるが、次節に述べるようにこの問題では他の方

法よりも Wiener の方法の方がはるかに有効であった。

2. Neumann スペクトルをもつ波浪のシミュレーション

表題や序論にあげた不規則波浪の予測や変換に先立って、まず Neumann スペクトルをもつ不規則波をシミュレートすることを行なう。というのは、著者は現在適切な波浪記録をもっていないし、また波浪の予測・変換には digital computer を使用するのであるから、どうせならすべてを一連の作業として計算機を使って行なってしまうと考えたのである。

海洋の波のスペクトルとして最も良く用いられるのは Neumann スペクトル (式 (9)) である。

$$E(\omega) = \frac{\pi C_0}{2} \frac{1}{\omega^6} \exp\left(-\frac{2g^2}{\omega^2 U^2}\right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ところで式 (9) に含まれる e^{-1/ω^2} の形は、スペクトルの因数分解ができない。しかし、つぎのような関数形で近似すればこれが可能になる。

$$e^{-1/\omega^2} \approx \left(\frac{n\omega^2}{1+n\omega^2} \right)^n \quad \dots\dots\dots (10)$$

したがって、式 (9) は

$$E(\omega) = \frac{\pi}{2} C_0 \frac{1}{\omega^6} \left\{ \frac{n \left(\frac{U}{\sqrt{2}g} \omega \right)^2}{1 + n \left(\frac{U}{\sqrt{2}g} \omega \right)^2} \right\}^n \quad (n > 3) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$E(\omega') = \frac{\pi}{2} C_0' \frac{1}{\omega'^6} \left\{ \frac{\omega'^2}{1 + \omega'^2} \right\}^n \quad (n > 3) \quad \dots\dots (12)$$

図-2 (a) Neumann スペクトル, 式 (13), と近似式 (14) の比較

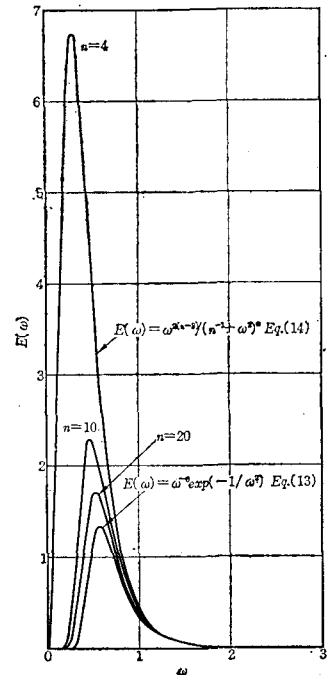
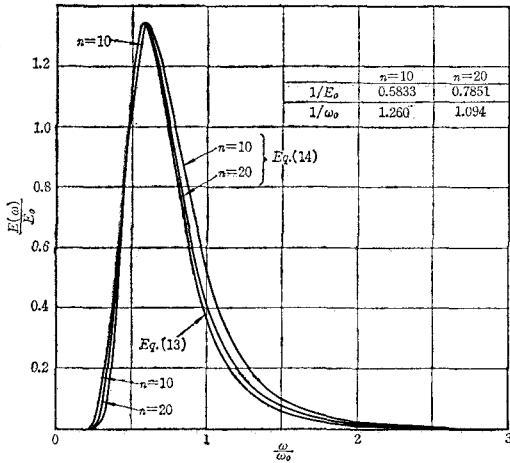


図-2 (b) Neumann スペクトル, 式 (13), と近似式 (14) との比較



$$\omega' = \frac{\sqrt{n} U}{\sqrt{2} g} \omega, \quad C_0' = C_0 \left(\frac{n U^2}{2 g^2} \right)^{5/2} \quad \text{..... (12 a)}$$

表とせる。図-2 は

$$F(\omega) = \omega^{-5} e^{-1/\omega^2} \quad \text{..... (13)}$$

と
$$F_1(\omega) = \frac{1}{\omega^5} \left(\frac{n \omega^2}{1 + n \omega^2} \right)^n \quad \text{..... (14)}$$

との比較を示したものである。図から明らかなように、 n の増加につれて式 (14) の曲線は式 (13) の曲線に近づくが、さらにスペクトルの極大が一致するように正規化すれば、小さな n でも両者はほとんど一致する。

さて、ある線型の応答系に（電子計算機で発生させた）乱数あるいは雑音を入力として与え、出力として Neumann スペクトルをもつ不規則変動を得る問題を考える。入力、出力のスペクトルを $\Phi_{ii}(\omega)$, $\Phi_{00}(\omega)$, 応答関数を $h(t)$ その Fourier 変換である system function を $H(\omega)$, その conjugate を $H^*(\omega)$ とすれば、

$$\Phi_{00}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ii}(\omega) \quad \text{..... (7)}$$

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H^*(\omega) \quad \text{..... (15)}$$

である。今、入力として乱数をとれば、これは white noise であり、そのスペクトルは $\Phi_{ii}(\omega) = C = \text{const}$ となる。 $\Phi_{00}(\omega)$ は Neumann spectrum である。一方、 $h(t)$ が $h(t) = 0$ ($t \leq 0$) の性質を持つことを考えると、 $H(\omega)$ は複素平面 ω 上の上半面にのみ零点と極を分布させている。一方、 $\Phi_{00}(\omega)$ は

$$\begin{aligned} \Phi_{00}(\omega) = E(\omega) &= \frac{\pi}{2} C_0' \frac{(\omega^2)^{n-3}}{\left(\frac{1}{n} + \omega^2 \right)^n} \\ &= \frac{\pi C_0'}{2} \frac{(i\omega)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\omega \right)^n} \frac{(-i\omega)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - i\omega \right)^n} \quad \text{..... (16)} \end{aligned}$$

と因数分解しうる。

したがって、 $H(\omega)$ と $H^*(\omega)$ はそれぞれ次式のようにになる。

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{C_0'}{C} \frac{(i\omega)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\omega \right)^n} \quad \text{..... (17)}$$

$$H^*(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{C_0'}{C} \frac{(-i\omega)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - i\omega \right)^n} \quad \text{..... (18)}$$

それゆえ、応答関数 $h_N(t)$ は $H(\omega)$ の Fourier 変換により求められる。

$$\begin{aligned} h_N(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{st} ds \quad \text{..... (19)} \end{aligned}$$

$t \geq 0$ の場合の式 (19) の積分は図-3 の積分路に沿った周積分に等しく、したがって、領域中の residues の総和を求めれば良い。

ところで、 $H(s)$ は式 (20) のように部分分数にわけられる。

$$\begin{aligned} H(s) &= C_1 \frac{s^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + s \right)^n} \\ &= C_1 \sum_{\nu=1}^n \frac{K_\nu}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + s \right)^{n-\nu+1}} \quad \text{..... (20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } K_\nu &= \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} (s^{n-3}) \right]_{s=-1/\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{(\nu-1)!} (n-3)(n-4) \cdots (n-\nu-1) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2} \quad \text{..... (21)} \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} n-\nu-2 \geq 0, \quad K_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-3} \quad \text{..... (21 a)}$$

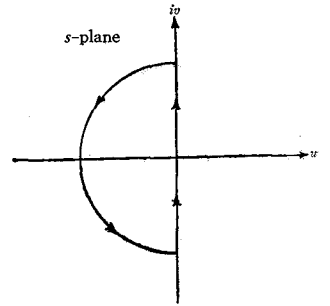
したがって、 $h_N(t)$ はつぎのように求まる。

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \text{Res} \left\{ C_1 \sum_{\nu=1}^n \frac{K_\nu}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + s \right)^{n-\nu+1}} e^{st} \right\}_{\text{left half-plane}} \\ &= C_1 \sum_{\nu=1}^n \frac{K_\nu}{(n-\nu)!} \left[\frac{d^{(n-\nu)}}{ds^{(n-\nu)}} e^{st} \right]_{s=-1/\sqrt{n}} \\ &= C_1 \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_\nu}{(n-\nu)!} t^{n-\nu} e^{-t/\sqrt{n}} \quad (t \geq 0) \quad \text{..... (22)} \end{aligned}$$

また、 $H(s)$ は右半平面に極をもたないから、 $t < 0$ に対しては零である。

$$\begin{aligned} h_N(t) &\begin{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{C_0'}{C} \left(\frac{n U^2}{2 g^2} \right)^3 \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-3} t^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n-2} \frac{(n-3)(n-4) \cdots (n-\nu-1)}{(n-\nu)!(\nu-1)!} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2} t^{n-\nu} \right\} e^{-t/\sqrt{n}} & (t \geq 0) \\ = 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{..... (23)} \end{aligned}$$

図-3 式 (19) 積分路



時々刻々の乱数を $r(t)$ とすれば、擬似 Neumann 波の波高 $y(t)$ は

$$y(t) = \int_0^\infty h_N(\tau) r(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (24)$$

$$y(i\Delta) = \sum_{m=0}^\infty h_N(m\Delta t) r(i-n) \Delta t \dots\dots\dots (24a)$$

となる。

図-4 は $h_N(t)$ 、図-5 は上述の方法により作られた擬似 Neumann 波の一例、図-6 は Tukey and Blackman の方法によるスペクトル解析の結果である。

乱数は乗算型合同式法

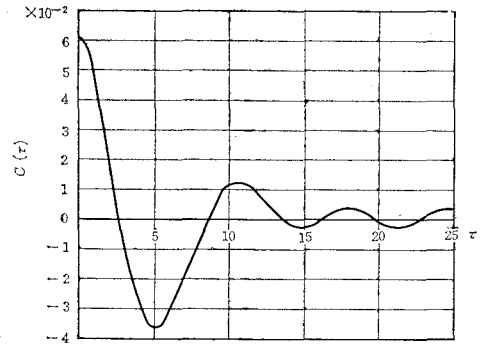
$$x_{n+1} \equiv \lambda x_n \pmod{M} \dots\dots\dots (25)$$

によった。($M=2^{31}$, $\lambda=48828125$)

図-6 によれば、上述の方法で乱数から合成された擬似波浪が理論的に期待したように Neumann spectrum をもつことが明らかである。

乱流現象をシミュレートする試みは、日野(1964,

図-6 (a) 擬似 Neumann Wave 自己相関関数 (図-5 の波形より計算したもの)



1965) や高橋・広瀬(1965)によって行なわれているが、ここに述べた方法はより一般的であり、単に Neumann wave に対してのみならず、一般的に任意のスペクトルをもつ不規則変動を作ることに応用しうるのである。

図-4 White noise より Neumann スペクトルをもつ波浪を作るための応答関数

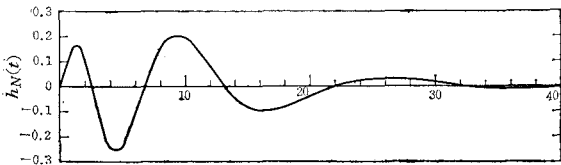


図-5 (a) 上段の乱数列から式 (23) (24 a) により合成された Neumann Wave (下段)

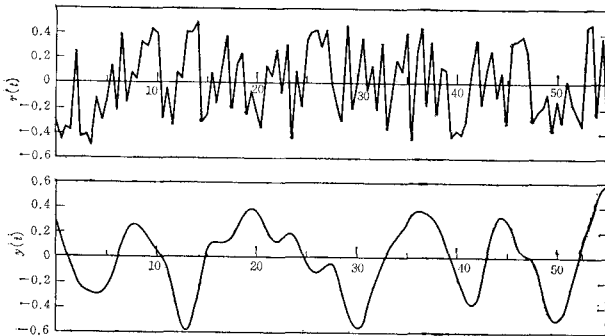


図-5 (b) 同上

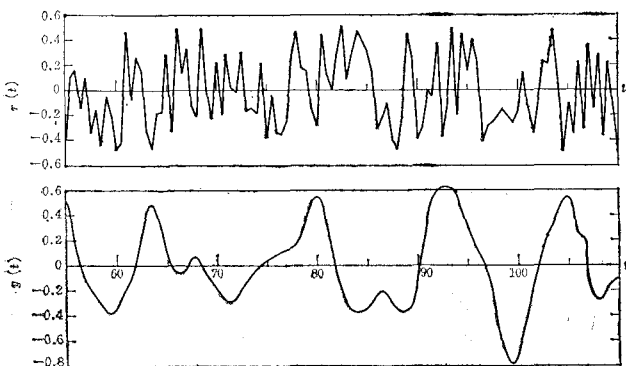
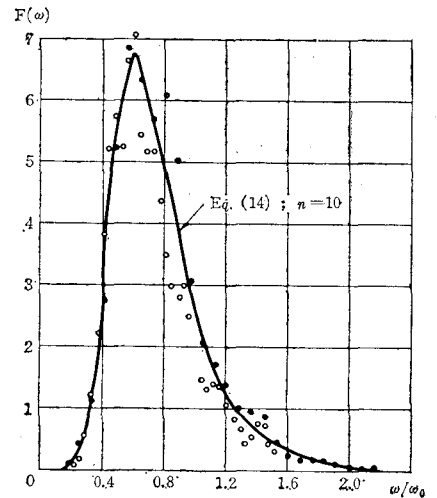


図-6 (b) 擬似 Neumann Wave のスペクトル



ついでながら、Neumann 波の相関関数

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \dots\dots\dots (26)$$

は、つぎのようになる。

$$C(\tau) = \sum_{\nu=1}^n \frac{M_\nu}{(n-\nu)!} |t|^{n-\nu} e^{-|t|}$$

ここに、

$$M_\nu = \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{(\nu-1)}}{ds^{(\nu-1)}} \times \left\{ \frac{(-1)^{n-3} s^2(n-3)}{(1-s)^n} \right\} \right]_{s=-1/\sqrt{n}} \dots\dots\dots (27)$$

3. 波高変化の予測 (a)

波浪予測の問題の一番簡単な場合として、ここでは $t=-\infty \sim t$ までのある点での波高変化を観測しつつ、その点での時々刻々 $t=t+\alpha$ の

波高を予測する問題を取扱う。(観測時間は一般には有限であり、厳密には式(8)を解かなければならないが、 $h_{\text{opt}}(t)$ の性質を考慮し、また、十分長い時間にわたる観測の記憶が可能であるとすれば、式(5)を解けば十分である。)

Putz (1953) は、式(5)を差分化し、線型一次の多元連立方程式を解くことにより、最適予測関数 $h_{\text{opt}}(t)$ を数値的に求めている。しかし、これでは $h_{\text{opt}}(t)$ を予測時間をパラメーターに含む一般的な関数形で表わすことができないので、この論文では式(5)を解析的に解くことを試みる (Wiener, Lee)。

Wiener-Hopf Eq. の解は一般に ($h_{\text{opt}}(\sigma)$ の Fourier 変換 $H_{\text{opt}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\sigma) e^{-i\lambda\sigma} d\sigma$ の形で)

$$H_{\text{opt}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\phi_{ii}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\tau} d\tau \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{id}(\omega)}{\phi_{ii}^-(\omega)} e^{i\omega\tau} d\tau \dots\dots\dots (28)$$

であるが、この予測問題の場合には、式(5)は

$$\varphi_{ii}(t+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(\sigma) \varphi_{ii}(\tau-\sigma) d\sigma (\tau \geq 0) \dots\dots\dots (29)$$

となり、したがって、この Wiener-Hopf 型積分方程式の解は、

$$H_{\text{opt}}(\lambda) = \frac{1}{\phi_{ii}^+(\lambda)} \int_0^{\infty} \psi(\tau+\alpha) e^{-i\lambda\tau} d\tau \dots\dots (30 a)$$

それゆえ、式(30 b) の $\psi(\tau+\alpha)$ は

$$\begin{aligned} \psi(\tau+\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}^+(\lambda) e^{i(\tau+\alpha)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} \phi_{ii}^+(s) e^{(\tau+\alpha)s} ds = \text{Res} \left\{ \frac{(\varepsilon+s)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+s\right)^n} \cdot e^{(\tau+\alpha)s} \right\}_{\text{left half-plane}} \\ &= \text{Res} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{K_{\nu}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+s\right)^{n-\nu+1}} \cdot e^{(\tau+\alpha)s} \right\}_{\text{l.h.p.}} = \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_{\nu}}{(n-\nu)!} (\tau+\alpha)^{n-\nu} \cdot e^{-(\tau+\alpha)/\sqrt{n}} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} K_{\nu} &= \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} (\varepsilon+s)^{n-3} \right]_{s=-1/\sqrt{n}} = \frac{(n-3)(n-4)\dots(n-\nu-1)}{(\nu-1)!} \left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2} \dots\dots\dots (34) \\ (K_1 &= \left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-3}, \nu \leq n-2) \end{aligned}$$

式(30 a, b) の最適予測のシステム関数 H_{opt} は次のようになる。

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(\lambda) &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+i\lambda\right)^n}{(\varepsilon+i\lambda)^{n-3}} \int_0^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_{\nu}}{(n-\nu)!} (\tau+\alpha)^{n-\nu} e^{-\left(\frac{\tau+\alpha}{\sqrt{n}}\right)} e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+i\lambda\right)^n e^{-\alpha/\sqrt{n}}}{(\varepsilon+i\lambda)^{n-3}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{p=1}^{n-\nu+1} \\ &\times \frac{K_{\nu} \alpha^{p-1}}{(n-\nu-p+1)!(p-1)!} \int_0^{\infty} \tau^{(n-\nu-p+1)} e^{-(1/\sqrt{n}+i\lambda)\tau} d\tau = \frac{e^{-\alpha/\sqrt{n}}}{(\varepsilon+i\lambda)^{n-3}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{p=1}^{n-\nu+1} \frac{K_{\nu} \alpha^{p-1}}{(p-1)!} \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+i\lambda\right)^{(\nu+p-2)} \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

予測器を analogue 回路で構成するときには、式(35)によれば良い。

式(35)を Fourier 変換すれば最適予測の応答関数 $h_{\text{opt}}(t)$ となるが、この際に $p=n-\nu+1$, $n-\nu$, $n-\nu-1$ の場合は $(1+i\lambda)^{(\nu+p-2)}$ の次数が $(\varepsilon+i\lambda)^{n-3}$ の次数より高くなるので、別個に考える必要がある。

$$h_{\text{opt}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{opt}}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{e^{-\alpha/\sqrt{n}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{p=1}^3 \frac{K_{\nu} \alpha^{(n-\nu+p-3)}}{(n-\nu+p-3)!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+i\lambda\right)^{n+p-4}}{(\varepsilon+i\lambda)^{n-3}} \right]$$

$$\psi(\tau+\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}^+(\lambda) e^{i(\tau+\alpha)\lambda} d\lambda \dots\dots (30 b)$$

と表しうる。ここに、 $\phi_{ii}^+(\lambda)$ は $\phi_{ii}(\lambda)$ を因数分解する際に複素平面 λ の上半面にのみ零点と極を有する項、 $\phi_{ii}^-(\lambda)$ は λ の下半面にのみ極と零点を有する項である。

なお、式(5)の解を時間領域で示せば、

$$h_{\text{opt}}(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^+(\tau) r_{ii}^+(t-\tau) d\tau \dots\dots (30 c)$$

である。ここに

$$r_{ii}^+(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\phi_{ii}^+(\lambda)} e^{i\lambda\tau} d\lambda$$

$$\psi^+(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_{id}(\lambda)}{\phi_{ii}^-(\lambda)} e^{i\lambda\tau} d\lambda$$

となる。

ところで、Neumann スペクトル式(12)を次のように多少修正する(ただし、係数部分は省略)。

$$\phi_{ii}(\lambda) = \frac{(\varepsilon^2 + \lambda^2)^{n-3}}{\left(\frac{1}{n} + \lambda^2\right)^n} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 ε はきわめて小さい正の値であり、その意味と導入の理由については次節4において説明する。これより、 $\phi_{ii}^+(\lambda)$ は次のように書ける。

$$\phi_{ii}^+(\lambda) = \frac{(\varepsilon + i\lambda)^{n-3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\lambda\right)^n} \dots\dots\dots (32)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n-3} \sum_{p=1}^{n-\nu-2} \frac{K_{\nu} \alpha^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\lambda\right)^{(\nu+p-2)}}{(\varepsilon + i\lambda)^{n-3}} e^{i\lambda t} d\lambda \dots\dots\dots (36)$$

式(36)の第2項目は前と同様 residues を求めることにより, 第1項目はさらに二項展開し, 分子が分母より次数の高い項と低い項に分け, 前者については

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\lambda)^n e^{i\lambda t} d\lambda = \delta^{(n)}(t) \dots\dots\dots (37)$$

を考慮すれば,

結局, $h_{\text{opt}}(t)$ をつぎのように求めることができる。

$$\begin{aligned} h_{\text{opt}}(t) = & e^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-3} \sum_{p=1}^{n-\nu-2} \sum_{q=1}^{\nu+p-1} \frac{\alpha^{p-1} K_{\nu} J_q}{(p-1)!(n-q-3)!} t^{n-q-3} e^{-\varepsilon t} + e^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{\alpha^{(n-\nu)} K_{\nu}}{(n-\nu)!} \\ & \times \left\{ \sum_{r=1}^{n-3} \frac{(n-3)! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^r}{(n-3-r)! r! (r-1)!} \cdot \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{\alpha^2} t^{r-1} + \sum_{r=2}^{n-2} \frac{(n-2)! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^r}{(n-2-r)! r! (r-2)!} \cdot \frac{(n-\nu)}{\alpha} t^{r-2} \right. \\ & + \sum_{r=3}^{n-1} \frac{(n-1)! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^r}{(n-1-r)! r! (r-3)!} \cdot t^{r-3} \left. \right\} e^{-\varepsilon t} + e^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-2} K_{\nu} \{f(n, \nu, \varepsilon, \alpha) \delta(t) + f_1(n, \nu, \varepsilon, \alpha) \delta^{(1)}(t) \\ & + f_2(n, \nu, \varepsilon, \alpha) \delta^{(2)}(t)\} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

ここに,

$$J_q = \frac{(\nu+p-2)(\nu+p-3)\dots(\nu+p-q)}{(q-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^{\nu+p-q-1} \dots\dots\dots (39)$$

$$J_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^{\nu+p-2}, \quad q \leq \nu+p-1 \dots\dots\dots (39a)$$

$$\begin{aligned} f(n, \nu, \varepsilon, \alpha) = & \left[\frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{\alpha^2} + \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)}{(n-3)} + \varepsilon \right\} \frac{(n-\nu)}{\alpha} + \left\{ \frac{(1-\varepsilon)^2}{(n-3)(n-2)2} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)\varepsilon}{n-2} + \varepsilon^2 \right\} \right] \\ & \times \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} \\ f_1(n, \nu, \varepsilon, \alpha) = & \left[\frac{(n-\nu)}{\alpha} + \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)}{(n-2)} + 2\varepsilon \right\} \right] \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} \\ f_2(n, \nu, \alpha) = & \frac{\alpha^{(n-\nu)}}{(n-\nu)!} \end{aligned} \dots\dots\dots (40)$$

また, $\delta(t)$ は Dirac の δ -関数, $\delta^{(n)}(t)$ はその n 次の導関数で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0) \cdot f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0) \dots\dots\dots (41)$$

となる性質をもつ。

なお, 式(30c)によって, $h_{\text{opt}}(t)$ を直接求めると, 次節の式(51)と一致した結果が得られる。

4. 波高変化の予測 (b)

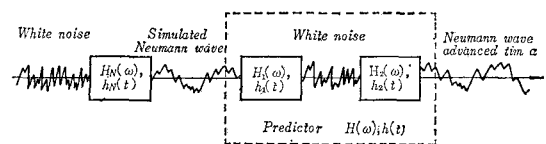
式(40)はかなり複雑な式となった。それは, 式(30)の $H_{\text{opt}}(\lambda)$ を一つの filter として取扱ったため, これを次式のように $H_1(\lambda)$ と $H_2(\lambda)$ の2つの filter を通すというように考えると幾分簡単になる。

$$H_{\text{opt}}(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot H_2(\lambda) \dots\dots\dots (42)$$

$$\begin{aligned} H_1(\lambda) = 1/\phi_{ii^+}(\lambda) = & \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\lambda\right)^n}{(\varepsilon + i\lambda)^{n-3}} = \sum_{p=5}^{n+1} \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon\right)^{p-1}}{(n-p+1)!(p-1)!} (\varepsilon + i\lambda)^{-(p-4)} + [(i\lambda)^3 + g_2(n, \varepsilon)(i\lambda)^2 \\ & + g_1(n, \varepsilon)(i\lambda) + g(n, \varepsilon)] \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

$$H_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\lambda\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii^+}(\lambda) e^{i(\tau+\alpha)\lambda} d\lambda = e^{-\alpha/\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n-2} \sum_{p=1}^{n-\nu+1} \frac{K_{\nu} \alpha^{p-1}}{(p-1)!} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\lambda\right)^{(n-\nu-p+2)}} \dots\dots\dots (44)$$

図-7 Neumann スペクトルをもつ擬似波浪の予測フィルターの物理的意味



これらを Fourier 変換すれば

$$h_1(t) = \begin{cases} \sum_{p=5}^{n+1} \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)^{p-1}}{(n-p+1)! (p-1)! (p-5)!} t^{(p-5)} e^{-t} + [g_3 \delta^{(3)}(t) + g_2(n, \varepsilon) \delta^{(2)}(t)] & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (45)^*$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} g_0(n, \varepsilon) &= \varepsilon^3 + \frac{n! \varepsilon^3 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)}{(n-1)!} + \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)^2 \varepsilon}{2(n-2)!} + \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)^3}{3!(n-3)!} \\ g_1(n, \varepsilon) &= 3\varepsilon^2 + \frac{2n! \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)}{(n-1)!} + \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)^2}{2(n-2)!} \\ g_2(n, \varepsilon) &= 3\varepsilon + \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)}{(n-1)!} \\ g_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$h_2(t) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{K_\nu}{(n-\nu)!} (t+\alpha)^{n-\nu} e^{-(t+\alpha)/\sqrt{n}} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (47)^{**}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_\nu &= \frac{(n-3)(n-4)\cdots(n-\nu-1)}{(\nu-1)!} \left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-\nu-2} \\ K_1 &= \left(\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{n-3}, \nu \leq n-2 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

さて、filter $H_1(\omega)$ に Neumann wave を入れると出力は

$$\phi_{00}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \phi_{ii}(\omega) = 1$$

で white noise となる。つまり、第2節で擬似波浪を作ったさいの $H_N(\omega)$ に入る前の雑音に一度もどす操作である。

filter $H_2(\omega)$ は $H_N(\omega)$ に対応する応答関数 $h_N(t)$ を時間 α だけすすめた応答関数 $h_2(t) = h_N(t+\alpha)$ ($t \geq 0$) の作用をする。したがって、 $h_1(t)$ で一度もとの雑音にもどしたのから、もう一度時間 α だけすすんだ擬似波浪を構成するわけである。

式 (31) でパラメーター ε を導入して、Neumann スペクトルに多少の修正をしなければならなかった理由と意味は上の議論からすぐわかる。すなわち、もし $\varepsilon=0$ ならば、式 (38) または (45) は大きな t に対してますます大きな値となる。最適予測応答関数を求める Wiener の方法は、入力波を一度 white noise にもどす操作を含んでいる。white noise はすべての周波数の波を同一の割合で含んでいるが、Neumann 波のエネルギーは周波数が零では零である。それゆえ、零レベルのエネルギーの波を有限レベルのエネルギーの波に高めることは、線型系では物理的に不可能であり、パラメーター ε を導入して波のエネルギー・スペクトルを多少修正する必要があったわけである。

結局、観測される Neumann 波の波高を $y(t)$ とすれば、時刻 $t=t+\alpha$ に対する予測波高 $\mathfrak{Y}(t+\alpha)$ は

$$\mathfrak{Y}(t+\alpha) = \int_0^\infty h_2(\tau) \int_0^\infty h_1(\sigma) y(t-\tau-\sigma) d\sigma d\tau \quad (49)$$

となる。あるいは、上式を変形して

$$\mathfrak{Y}(t+\alpha) = \int_0^\infty y(t-\eta) d\eta \int_0^\eta h_1(\sigma) h_2(\eta-\sigma) d\sigma \quad (50)$$

となる。したがって、

$$h_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} \int_0^t h_1(\sigma) h_2(t-\sigma) d\sigma & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (51)$$

あるいは

$$h_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} \int_0^t g(\sigma) h_2(t-\sigma) d\sigma + \sum_{m=0}^3 g_m h_2^{(m)}(t) & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (52)$$

ここに、 $g_m(m=0, 1, 2, 3)$ は式 (46) で表わされており、 $g(t)$ は

$$g(t) = \sum_{p=5}^{n+1} \frac{n! \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \varepsilon \right)^{p-1}}{(n-p+1)! (p-1)! (p-5)!} t^{p-5} e^{-t}$$

式 (51)、(52) は式 (30c) によって直接時間領域で求めた最適予測の応答関数と一致し、変形すればもちろん式 (38) になる。

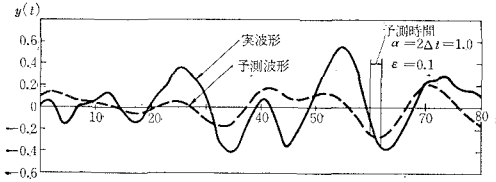
* $h_1(t) = \gamma_{ii}^+(t)/2\pi$

** $h_2(t) = \psi^+(t)/2\pi$

5. 波浪予測の計算例

前節4に導いた式にもとづいて、Neumann スペクトルを有する波浪の予測の数値実験結果の一例を、図-8に示す。

図-8 予測時間 $\alpha=2\Delta t$ の場合の計算例



この場合には、電子計算機使用時間の制約上 $\Delta t=0.5$, $\epsilon=0.1$ と採りかなり雑な計算を行ったこともあり、予測はあまり良く行なわれていない。式(38)は三重和と δ 関数およびその微分を含み式の形は複雑であるが、3節の方法の方が実際の計算ではむしろ良い結果を与えると思われる。

参考文献

- 1) 日野幹雄 (1964): 東京湾の進入長波に対する応答特性, 第11回海岸工学講演会講演集, pp. 98-107; Response characteristics of Tokyo Bay to incident long waves, Coastal Engineering in Japan, Vol. 8.
- 2) 日野幹雄 (1965): Digital computer simulation of turbulent phenomena, 土木学会論文集, No. 123, pp. 33-43.
- 3) 本間 仁・堀川清司・小森修蔵 (1965): 水圧変動波形と水面波形の相関性, 第12回海岸工学講演会講演集, 76-83
- 4) Lee, Y.E. (1960): Statistical Theory of Communication, John Wiley & Sons Inc.
- 5) Putz, R.R. (1953): Predictability of wave transformation; Linear least square prediction, Tech. Rep. Ser. 29, Issue 54, Institute of Eng. Res., University of California, Berkeley, Cal.
- 6) 酒匂敏次 (1963): The Salinity regime and exchange characteristics of a shallow coastal bay system. Tech. Rep. Reference 63-21 T, Texas A & M University.
- 7) 高橋浩一郎・広瀬元孝 (1965): モデル風による動的風圧の数値実験, 災害科学研究会
- 8) Wiener, N. (1949): Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series, John Wiley, New York.