ラグランジュ風にあらわした粘性流体の運動

首　藤　伸　夫*

1. 緒　　言

粘性流体の運動をラグランジュ風に記述し，その解をうることができるか否かという点について，以下にその若干の結果をのべることとする。粘性流体に対する式のラグランジュ風な書直しは，Gerber によって行なわれている。ここでは，その概略をのべたのち，粘性の効果が重力の効果などと同程度の場合についての一つの解を求める。また，境界層の仮定のもとにどのような式群がえられるかについても考えることとする。

2. 粘性流体に対する基本方程式

初期の位置が (a, b) であった水粒子の，時刻 t における位置が (x, y) であらわされるものとする。この時刻 t における位置は，(a, b) と一意的に対応する。もし，この対応が一意的でないということは，流れは乱流になっていることを示唆しているものと考えてよかろう。

いま，(x, y) の関数 f があったとき，これはまた (a, b) の関数でもあるから，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a}&=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial b}&=\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

とかける。これから，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial a}, & \dfrac{\partial y}{\partial a}\\ \dfrac{\partial f}{\partial b}, & \dfrac{\partial y}{\partial b}\end{vmatrix}=\frac{1}{\varDelta}\cdot\frac{\partial(f, y)}{\partial(a, b)}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial a}, & \dfrac{\partial f}{\partial a}\\ \dfrac{\partial x}{\partial b}, & \dfrac{\partial f}{\partial b}\end{vmatrix}=\frac{1}{\varDelta}\cdot\frac{\partial(x, f)}{\partial(a, b)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

となる。ここで，

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial a}, & \dfrac{\partial y}{\partial a}\\ \dfrac{\partial x}{\partial b}, & \dfrac{\partial y}{\partial b}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)}$$

であって，連続の式により，$\varDelta=1$ である。式 (2.2) を考えに入れると，

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial(p, y)}{\partial(a, b)},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(x_t, y)}{\partial(a, b)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(x_t, y)}{\partial(a, b)}, y\right\}}{\partial\{a, b\}}$$

などのようになる。したがって粘性流体に対する式は，3次元の場合には，つぎのようになる。

連続の式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

運動の式

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,y,z)}{\partial(a,b,c)}&+\nu\left[\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(x_t,y,z)}{\partial(a,b,c)}, y, z\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right.\\ &+\frac{\partial\left\{x, \dfrac{\partial(x,x_t,z)}{\partial(a,b,c)}, z\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\\ &\left.+\frac{\partial\left\{x, y, \dfrac{\partial(x,y,x_t)}{\partial(a,b,c)}\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right]\quad\cdots\cdots(2.4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x,p,z)}{\partial(a,b,c)}&+\nu\left[\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(y_t,y,z)}{\partial(a,b,c)}, y, z\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right.\\ &+\frac{\partial\left\{x, \dfrac{\partial(x,y_t,z)}{\partial(a,b,c)}, z\right\}}{\partial(a,b,c\}}\\ &\left.+\frac{\partial\left\{x, y, \dfrac{\partial(x,y,y_t)}{\partial(a,b,c)}\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right]\quad\cdots\cdots(2.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(a,b,c)}&+\nu\left[\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(z_t,y,z)}{\partial(a,b,c)}, y, z\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right.\\ &+\frac{\partial\left\{x, \dfrac{\partial(x,z_t,z)}{\partial(a,b,c)}, z\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\\ &\left.+\frac{\partial\left\{x, y, \dfrac{\partial(x,y,z_t)}{\partial(a,b,c)}\right\}}{\partial\{a,b,c\}}\right]\cdots\cdots\cdots(2.6)\end{aligned}$$

となる。ここで

* 正会員　中央大学助教授　理工学部

$$\frac{\partial(f,y,z)}{\partial(a,b,c)}=\frac{\partial\{f,y,z\}}{\partial\{a,b,c\}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a}\\ \frac{\partial f}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b}\\ \frac{\partial f}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}$$

のようにあらわされる Jacobian である。

3. 波　動　解

粘性の効果が他の項の効果と同じ程度であるとする。

また，運動は大きくなく，初期値のまわりの摂動であらわされるとする。水平床上での二次元運動をとりあつかう。x 軸は静水面上，y 軸は上方を正とする。このとき，

$$\left.\begin{aligned}x&=a+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots\cdots\\ y&=b+\varepsilon y_1+\varepsilon^2y_2+\cdots\cdots\\ p&=p_0-\rho gb+\varepsilon p_1+\varepsilon^2p_2+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

圧力は，運動がないときは静水圧のみであるので，水面での圧力を p_0 として，第零近似を $p_0-\rho gb$ のようにおいた。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)}=1\cdots\cdots(3.2)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,y)}{\partial(a,b)}+\nu\left[\frac{\partial\left\{\frac{\partial(x_t,y)}{\partial(a,b)},y\right\}}{\partial\{a,b\}}+\frac{\partial\left\{x,\frac{\partial(x,x_t)}{\partial(a,b)}\right\}}{\partial\{a,b\}}\right]\cdots\cdots(3.3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x,p)}{\partial(a,b)}+\nu\left[\frac{\partial\left\{\frac{\partial(y_t,y)}{\partial(a,b)},y\right\}}{\partial\{a,b\}}+\frac{\partial\left\{x,\frac{\partial(x,y_t)}{\partial(a,b)}\right\}}{\partial\{a,b\}}\right]\cdots\cdots(3.4)$$

に，式 (3.1) を代入すると，$O(\varepsilon)$ の式として，

$$x_{1tt}+\frac{1}{\rho}p_{1a}+gy_{1a}=\nu(x_{1taa}+x_{1tbb})\ \cdots\cdots(3.5)$$

$$y_{1tt}+\frac{1}{\rho}p_{1b}+gy_{1b}=\nu(y_{1taa}+y_{1tbb})\ \cdots\cdots(3.6)$$

$$x_{1a}+y_{1b}=0\cdots\cdots(3.7)$$

をうる。ここで添字の数字は近似の度数，文字は偏微分を示す。境界条件は，底面 $b=-h$ では $x_1=y_1=0$，表面では $b=0$ のとき $p_1=0$ である。さて，波動解をもとめるのであるから，x_1, y_1, p_1 として，つぎのようなものを想定する。

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A\cdot\cosh\lambda(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ y_1&=B\cdot\sinh\lambda(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ \frac{p_1}{\rho}&=-gB\cdot\sinh\lambda(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ &\quad+C\cdot\cosh\lambda(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\end{aligned}\right\}\ (3.8)$$

式 (3.8) を (3.5)，(3.6)，(3.7) に入れると，

$$\left.\begin{aligned}&[-\omega^2+i\nu\omega\{\lambda^2-k^2\}]A+ikC=0\\ &[-\omega^2+i\nu\omega\{\lambda^2-k^2\}]B+\lambda C=0\\ &ikA+\lambda B=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.9)$$

をうる。したがって，

$$\begin{vmatrix}-\omega^2+i\nu\omega(\lambda^2-k^2), & 0, & ik\\ 0, & -\omega^2+i\nu\omega(\lambda^2-k^2), & \lambda\\ ik, & \lambda, & 0\end{vmatrix}=0\cdots\cdots(3.10)$$

ならばよい。これは，

$$(k^2-\lambda^2)[-\omega^2+i\nu\omega(\lambda^2-k^2)]=0\ \cdots\cdots(3.11)$$

となり，

$$\lambda=\pm k$$

$$\lambda=\pm k\sqrt{1-\frac{\omega}{\nu k^2}i}=\pm(e_1-e_2i)$$

ただし，

$$e_1=k\sqrt{\frac{\theta+1}{2}}$$

$$e_2=k\sqrt{\frac{\theta-1}{2}}$$

$$\theta^2=1+\left(\frac{\omega}{\nu k^2}\right)^2$$

によって満たされる。以下に進行波に対する解を求める。

重力波は，$\lambda=k$ に対応して与えられる。式 (3.9) より，

$$\left.\begin{aligned}B&=-iA\\ C&=-i\frac{\omega^2}{k}A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.12)$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned}x_{11}&=A_1\cdot\cosh k(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ y_{11}&=-iA_1\cdot\sinh k(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ \frac{p_{11}}{\rho}&=igA_1\cdot\sinh k(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ &\quad-i\frac{\omega^2}{k}A_1\cdot\cosh k(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.13)$$

をうる。粘性波については，つぎのようになる。

式 (3.9) より

$$\left.\begin{aligned}B&=-i\frac{k}{\lambda}A=-\frac{ik}{e_1-e_2i}A\\ C&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.14)$$

したがって，

$$\left.\begin{aligned}x_{12}&=A_2\cdot\cosh(e_1-e_2i)(b+h)\cdot e^{i(ka-\omega t)}\\ y_{12}&=-\frac{ik}{e_1-e_2i}A_2\cdot\sinh(e_1-e_2i)(b+h)\\ &\quad\times e^{i(ka-\omega t)}\\ \frac{p_{12}}{\rho}&=g\cdot\frac{ik}{e_1-e_2i}A_2\cdot\sinh(e_1-e_2i)(b+h)\\ &\quad\times e^{i(ka-\omega t)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.15)$$

である。

一次近似の解は，式 (3.13) と (3.15) を加えてえられる。ところで，底面の境界条件は，y_1 については，$b=-h$ とおいてみればすぐわかるように，

$$y_{1\,b=-h}=(y_{11}+y_{12})_{b=-h}=0$$

となって満たされている。x_1 について同様の条件をおくと，$A_1=-A_2$ であればよいことがわかる。

表面条件は

$$p_{1\,b=0}=(p_{11}+p_{12})_{b=0}=0$$

であるが，これは

$$g\sinh kh-\frac{\omega^2}{k}\cosh kh+g\frac{k}{e_1-e_2\cdot i}\times\sinh(e_1-e_2 i)h=0 \quad\cdots\cdots(3.16)$$

を満たすように ω をきめればよいことを示す。

4. 境界層方程式

二次元として考える。境界層外部の非回転とみなされうるところの特性長を L，境界層の厚さに対応する特性長を δ とするとき，つぎのように無次元変数 x^*, y^*, p^*, t^* を定義する。

$$x=Lx^*,\quad y=\delta y^*,\quad p=\rho gLp^*,\quad t=Tt^*$$
$$gT^2=L$$

また R_e 数が

$$R_e=\left(\frac{L}{\delta}\right)^2=\frac{L^2}{\nu T}$$

とかけることを考慮すると，境界層内の運動を記述するためにつぎの式群をうる。ただし無次元数を意味する*印は，省略した。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_0,y_0)}=1 \quad\cdots\cdots(4\cdot1)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{\partial(p,y)}{\partial(x_0,y_0)}+\frac{\partial\left\{x,\dfrac{\partial(x,x_t)}{\partial(x_0,y_0)}\right\}}{\partial\{x_0,y_0\}}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(x_t,y)}{\partial(x_0,y_0)},y\right\}}{\partial\{x_0,y_0\}} \quad\cdots\cdots(4.2)$$

$$\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{1}{\sqrt{R_e}}\frac{\partial(x,p)}{\partial(x_0,y_0)}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial\left\{x,\dfrac{\partial(x,y_t)}{\partial(x_0,y_0)}\right\}}{\partial\{x_0,y_0\}}+\frac{1}{R_e^2}\frac{\partial\left\{\dfrac{\partial(y_t,y)}{\partial(x_0,y_0)},y\right\}}{\partial\{x_0,y_0\}} \quad\cdots\cdots(4.3)$$

R_e 数が十分に大きいとき，次元を有する形で，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_0,y_0)}=1 \quad\cdots\cdots(4.1)'$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(x,p)}{\partial(x_0,y_0)}=1 \quad\cdots\cdots(4\text{-}3)'$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,y)}{\partial(x_0,y_0)}+\nu\frac{\partial\left\{x,\dfrac{\partial(x,x_t)}{\partial(x_0,y_0)}\right\}}{\partial\{x_0,y_0\}} \quad\cdots\cdots(4.2)'$$

が境界層内の運動をきめるものとしてえられる。もし，

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots\cdots\\ y&=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots\cdots\\ p&=p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4.4)$$

のように展開できるとすると，$p_0=\text{const.}$ を考えに入れて，

$$\left.\begin{aligned}&O(\varepsilon)\\ &\frac{\partial p_1}{\partial y_0}=0\\ &\frac{\partial x_1}{\partial x_0}+\frac{\partial y_1}{\partial y_0}=0\\ &\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_0}+\nu\frac{\partial^3 x_1}{\partial t\,\partial y_0^2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4.5)$$

$$\left.\begin{aligned}&O(\varepsilon^2)\\ &\frac{\partial p_2}{\partial y_0}=-\frac{\partial(x_1,p_1)}{\partial(x_0,y_0)}\\ &\frac{\partial x_2}{\partial x_0}+\frac{\partial y_2}{\partial y_0}=-\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x_0,y_0)}\\ &\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_2}{\partial x_0}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p_1,y_1)}{\partial(x_0,y_0)}\\ &\qquad+\nu\left[\frac{\partial^3 x_2}{\partial t\,\partial y_0^2}+\frac{\partial}{\partial y_0}\left\{\frac{\partial(x_1,x_{1t})}{\partial(x_0,y_0)}\right\}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\partial(x_1,x_{1ty_0})}{\partial(x_0,y_0)}\right]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4.6)$$

をうる。外部の流体が進行波の場合について解いてみる。$y_0\to\infty$ としたとき，つまり境界層の外縁で，圧力が連続でなければならない。いま，外側の圧力 p および x_1 が

$$p=\rho Akc^2\sin k(x_0-ct)$$
$$x_1=A\cos k(x_0-ct)$$

で与えられるものとする。

境界条件として，

$y_0=0$ で $x_1=y_1=0$

$y_0\to\infty$ つまり境界層の外側で

$x_1\to A\cos k(x_0-ct)$ に接続する

ように設定する。

このとき，解として，つぎのものをうる。

$$\left.\begin{aligned}x_1&=A\left[\cos k(x_0-ct)\right.\\ &\qquad\left.-e^{-y_0/\delta_0}\cos\left\{k(x_0-ct)-\frac{y_0}{\delta_0}\right\}\right]\\ y_1&=Ak\,\delta_0\left[\frac{y_0}{\delta_0}\sin k(x_0-ct)\right.\\ &\qquad-\frac{1}{2}e^{-y_0/\delta_0}\cos\left\{k(x_0-ct)-\frac{y_0}{\delta_0}\right\}\\ &\qquad+\frac{1}{2}e^{-y_0/\delta_0}\sin\left\{k(x_0-ct)-\frac{y_0}{\delta_0}\right\}\end{aligned}\right.$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\cos k(x_0-ct)-\frac{1}{2}\sin k(x_0-ct)\Big]\\
&p_1=\rho\, Akc^2\sin k(x-ct)
\end{aligned}\right\}
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)
$$

ただし，$\delta_0=\sqrt{\dfrac{2\nu}{kc}}$ であって，境界層の厚さに相当する量である。

5. 結　　論

以上のように，粘性流体に対するラグランジュ風な取扱いも可能であるが，一般に複雑な方程式群をとかねばならず，したがって，こうした方法を採用することの利点は，あまりないようにおもわれる。

参 考 文 献

1) Pierson, W.J.Jr. : Perturbation Analysis of the Navier-Stokes Equations in Lagrangian Form with Selected Linear Solutions. Journal of Geophysical Research, Vol. 67, No. 8, 1962.
2) Gerber, R. : Sur la Réduction à un Principe Variational des Équations du Mouvement d'un Fluide Visqueux Incompressible, Proc. Four. Inst., Univ. Grenoble, 1949.