

Stokes 波とクノイド波の適用限界について

岩 垣 雄 一*・山 口 正 隆**

1. 緒 言

有限振幅の Stokes 波の理論では、波形その他の水理特性を無限級数の形で表わすが、波形勾配が大きくなり、また水深・波長比が小さくなると、級数の収束性が悪くなり、Stokes 波の理論が適用できなくなる。いま、平均水深を h 、波長を L 、静水面からの波の峰高を η_0 とすれば、Stokes 波の理論が適用できる領域は、Keulegan¹⁾によると $h/L \geq 1/10$ 、Laitone²⁾によれば $h/L \geq 1/8$ 、Wilson-Webb-Hendrickson³⁾によると $h/L \geq (\eta_0/L)^{1/3}$ であるといわれているが、このような限界を決めた根拠は明確ではない。

一方、水深・波長比が小さくなって、波が長波性を帯びても、波形が変わらずに伝播する有限振幅の周期波が理論的に存在しうることを Boussinesq (1891) が示し、Korteweg-De Vries (1895)⁴⁾によってクノイド波と名づけられた。その後、クノイド波は多くの研究者によって研究されてきたが、1961 年に Laitone⁵⁾が摂動法とよばれる Friedrichs の関数展開法を用いて、初めてクノイド波の第 2 近似解を求め、つづいて Chappellear⁶⁾が第 3 近似解を求めた。これらのクノイド波の理論解は、水深・波長比が小さいとして求められたものであるから、Stokes 波の理論とは逆に、 h/L が大きくなると具合が悪くなる。したがって、クノイド波の理論解にも適用限界があるはずである。

このように Stokes 波でもクノイド波においても、それぞれの理論に適用限界があるが、これらの限界をどのような方法によって見出すかが問題である。ここでは、波の特性のうち、波速と静水面上の波の峰高をとりあげ、 h/L の値が $1/10$ 付近の実験を行なって、その結果を各理論解による計算値と比較し、それぞれの理論の適用範囲を明確にしようとするもので、理論解としては、クノイド波に対しては Laitone の第 2 近似解⁵⁾を、Stokes 波では Skjelbreia の 3rd order の解⁷⁾を用いることにする。Stokes 波の理論には各種のものがあ

り、うちで Skjelbreia のものを最も好ましいものとして取り上げた理由を述べる。

2. Stokes 波の各理論解の比較

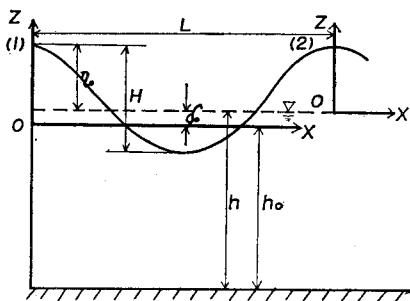
(1) 佐藤の解の波速式

佐藤は 1952 年に、Stokes が深海波について行なったと同様な手法により、速度ポテンシャル ϕ と流れの関数 ψ をつぎのように仮定して、波の特性を求めた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{k\phi}{c} &= -kx + k\beta \cosh k(z+h_0) \sin kx, \\ \frac{k\psi}{c} &= -kz + k\beta \sinh k(z+h_0) \cos kx \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、 c は波速、 h_0 は x 軸からの水深、 $k=2\pi/L$ 、 L は波長、 β はパラメーターで、座標系は 図-1 に示

図-1 座 標 系



Stokes 波の座標系

(1) 佐藤, 田中 (2) Skjelbreia

すとおりである。式 (1) にもとづいて導かれた波速の式は、

$$c^2 = (g/k) \tanh kh_0 [1 + k^2 \beta^2 \sinh^2 kh_0] \dots (2)$$

であり、また x 軸は平均水面と一致せず、 δ_0 だけ平均水面が上昇するが、その量は、

$$\delta_0 = (1/2) k \beta^2 \cosh kh_0 \sinh kh_0 \dots (3)$$

である。そして、波高 H と β との関係は次式であらわされる。

$$H = 2\beta \sinh kh_0 [1 + k^2 \beta^2 \{1 + (3/2) \sinh^2 kh_0\}] \dots (4)$$

このように、佐藤の解では、平均水面の位置が x 軸より δ_0 だけ上にあるので、実際の平均水深 h は $h_0 + \delta_0$ に等しいという関係を用いて、式 (2) を h_0 でなく h で表現する必要がある。式 (3) を用い、 $h_0 \gg \delta_0$ を考慮すれば、

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 学生会員 京都大学大学院工学研究科

$$\sinh kh_0 = \sinh kh - (1/2)k^2\beta^2 \sinh kh \cosh^2 kh \\ + O(k^4\beta^4), \dots\dots\dots(5)$$

$$\cosh kh_0 = \cosh kh - (1/2)k^2\beta^2 \sinh^2 kh \cosh kh \\ + O(k^4\beta^4), \dots\dots\dots(6)$$

$$\tanh kh_0 = \tanh kh \{1 - (1/2)k^2\beta^2\} + O(k^4\beta^4) \\ \dots\dots\dots(7)$$

の関係がえられるから、式(4)を考慮して式(2)はつぎのように変形される。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{\tanh 2\pi h/L}{2\pi h/L} \left\{ 1 + \pi^2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{1}{2 \sinh^2 2\pi h/L} \right) \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(8)$$

(2) 田中の解の波速式

田中は、佐藤の解が自由表面の圧力条件を厳密に満足しないことを考慮して、速度ポテンシャル ϕ および流れの関数 ψ をつぎのような級数によって仮定した。

$$\left. \begin{aligned} \frac{k\phi}{c} &= -kx + \sum_{n=1}^{\infty} k\alpha_n \{ \cosh nk \\ &\quad \times (z+h_0)/\sinh nk h_0 \} \sin nkx, \\ \frac{k\psi}{c} &= -kz + \sum_{n=1}^{\infty} k\alpha_n \{ \sinh nk \\ &\quad \times (z+h_0)/\sinh nk h_0 \} \cos nkx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 α_n はパラメーターであって、座標系は図-1に示すように、佐藤の解と同じである。式(9)にもとづいて導かれる波速式は、

$$c^2 = (g/k) \tanh kh_0 \{ 1 + (1/8)k^2\alpha_1^2 (9 \coth^4 kh_0 \\ - 6 \coth^2 kh_0 + 5) \} \dots\dots\dots(10)$$

であり、 δ_0 および波高 H と α_1 との関係を示す式はつぎのようである。

$$\delta_0 = (1/2)k\alpha_1 \coth kh_0 \dots\dots\dots(11)$$

$$H = 2\alpha_1 \{ 1 + (3/64)k^2\alpha_1^2 (9 \coth^6 kh_0 \\ + 13 \coth^4 kh_0 + 11 \coth^2 kh_0 - 1) \} \dots\dots\dots(12)$$

前と同様に h_0 を実際の平均水深 h に変換すれば、波速式(10)と、波高と α_1 との関係式(12)は、それぞれつぎのようになる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{\tanh 2\pi h/L}{2\pi h/L} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\alpha_1}{L} \right)^2 \left(9 \coth^4 \frac{2\pi h}{L} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 6 \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 5 - \frac{4}{\sinh^2 2\pi h/L} \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(13)$$

$$\left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{h}{L} \right) = 2 \left\{ \frac{\alpha_1}{L} + \frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{\alpha_1}{L} \right)^3 \left(9 \coth^6 \frac{2\pi h}{L} \right. \right. \\ \left. \left. + 13 \coth^4 \frac{2\pi h}{L} + 11 \coth^2 \frac{2\pi h}{L} - 1 \right) \right\} \dots\dots\dots(14)$$

もし、式(14)の右辺第2項以下を省略すれば、式(13)の α_1 は消去されて、次式のようになる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{\tanh 2\pi h/L}{2\pi h/L} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 9 \coth^4 \frac{2\pi h}{L} \right. \right. \\ \left. \left. - 6 \coth^2 \frac{2\pi h}{L} + 5 - \frac{4}{\sinh^2 2\pi h/L} \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(15)$$

(3) Skjelbreia の第3次近似解の波速式

第5次近似解は Skjelbreia-Hendrickson¹¹⁾ が求めているが、第3次近似解は、速度ポテンシャル ϕ 、波形 η 、Bernoulli の定理の積分常数 K 、および波速 c をつぎのようにおけば求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} k\phi/c &= (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \cosh k(h+z) \sin \theta \\ &\quad + \lambda^2 A_{22} \cosh 2k(h+z) \sin 2\theta \\ &\quad + \lambda^3 A_{33} \cosh 3k(h+z) \sin 3\theta, \\ k\eta &= \lambda \cos \theta + \lambda^2 B_{22} \cos 2\theta + \lambda^3 B_{33} \cos 3\theta, \\ kK &= \lambda^2 C_3, \\ kc^2 &= C_0 (1 + \lambda^2 C_1), \quad \theta = k(x-ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 A_{11} 、 A_{13} 、 A_{22} 、 A_{33} 、 B_{22} 、 B_{33} 、 C_3 、 C_0 および C_1 は kh の関数であり、 λ はパラメーターである。なお、Skjelbreia の解の座標系は図-1に示すようで、 x 軸と平均水面とは一致し、式中の h は実際の平均水深をあらわす。式(16)にもとづいて導かれる波速式は、

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{\tanh 2\pi h/L}{2\pi h/L} \left\{ 1 + \pi^2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{8 \cosh^4 2\pi h/L - 8 \cosh^2 2\pi h/L + 9}{8 \sinh^4 2\pi h/L} \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(17)$$

であり、波高 H とパラメーター a との関係をあらわす式はつぎのようである。

$$\left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{h}{2a} \right) = 1 + \frac{3}{64} \pi^2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \\ \times \frac{8 \cosh^6 2\pi h/L + 1}{\sinh^6 2\pi h/L} \dots\dots\dots(18)$$

なお、Laitone²⁾は摂動法を用いて、Stokes 波の第3次近似解をえており、その解では x 軸と平均水面とが一致しないが、前述のように平均水深に変換すると、Skjelbreia の第3次近似解と完全に一致し、波速式も式(17)であらわされる。このことは、式(16)で示される表示法が、摂動法による展開法とよく似ていることをあらわしているといえよう。

(4) 各波速式の計算結果の比較

Airy の微小振幅波理論における波速式は、

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{\tanh 2\pi h/L}{2\pi h/L} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(19)$$

であらわれ、 $c/\sqrt{gh}$ は h/L の関数であることがわかる。また前述の Stokes 波の波速式も、波高とパラメーターとの関係をあらわす式を用いると、 $c/\sqrt{gh}$ は h/L と h/H の関数であることが理解される。波の周期 T と平均水深 h とで作られる無次元量 $T\sqrt{g/h}$ は、

$$T\sqrt{g/h} = (h/L)^{-1} \cdot (c/\sqrt{gh})^{-1} \dots\dots\dots(20)$$

と変形されるので、波速式における $c/\sqrt{gh}$ は $T\sqrt{g/h}$ と h/H の関数としてあらわすことができる。

図-2は式(8)により、図-3は式(13)および(14)により、また図-4は式(15)、図-5は式(17)および(18)にもとづいて計算し求めた波速の値であって、各図

図-2 佐藤の解による Stokes 波の波速曲線

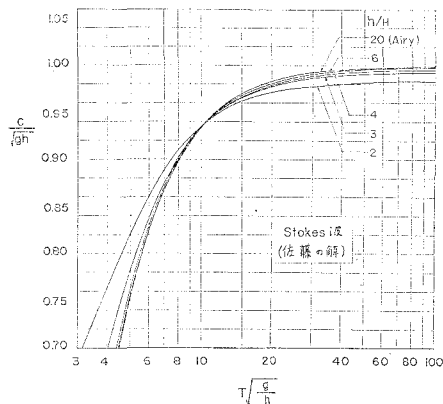
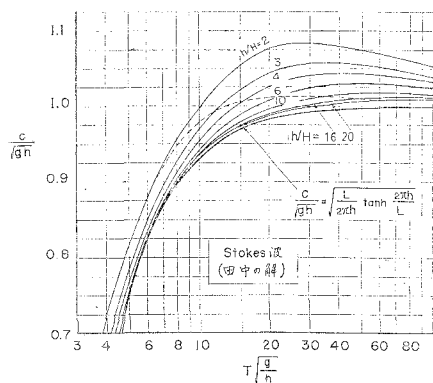


図-3 田中の解による Stokes 波の波速曲線 (1)



には式(19)による微小振幅波の波速曲線も比較のため入っている。これらの図からつぎのようなことがいえる。

(1) 佐藤の解は、 $T\sqrt{g/h}$ が 10 より大きくなると、微小振幅波の方が波速が大きくなる。この点が他の解に比べて非常に異なっているところである。

(2) 田中の式 (15) にもとづく 図-4 では、 $T\sqrt{g/h}$ が大きくなると $c/\sqrt{gh}$ の値が急に増大している。これは、式 (14) の右辺第 2 項以下を無視したことによるものである。 $(\alpha_1/L)^3$ の係数は h/L の減少とともに急増するので、第 1 項にくらべて第 2 項以下が卓越し、無視しえなくなる。図-3 における破線は、図-4 における $c/\sqrt{gh}$ の差が約 2% であるような点を結んだもので、最大約 2% の誤差を許すならば、この破線より下の部分に対しては式 (15) を用いてよいことを示している。

(3) 図-3 に示す田中の解や図-5 の Skjelbreia の解にしても、 $T\sqrt{g/h}$ のある値で $c/\sqrt{gh}$ は極大値をとり、その値より $T\sqrt{g/h}$ が大きくなると、 $c/\sqrt{gh}$ は減少し、収束性も悪くなることを示している。

さらに、これらの理論解を、 $h/H=2, 3, 6$ および 10 の場合に、比較して同時に示したのが 図-6 である。この図からいえることは、田中の解と Skjelbreia の解はほとんど差がないこと、佐藤の解は両者とかなりかけ離

図-4 田中の解による Stokes 波の波速曲線 (2)

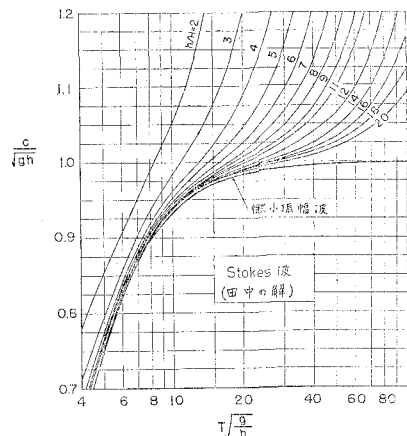
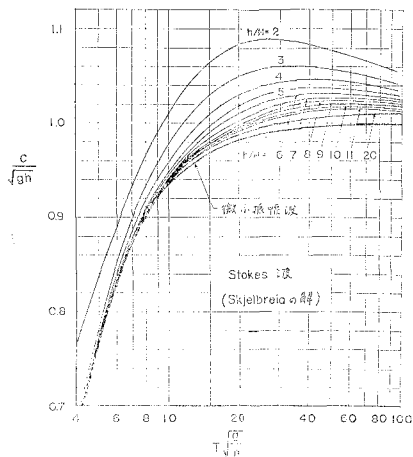


図-5 Skjelbreia の解 (第 2 次近似解) による Stokes 波の波速曲線



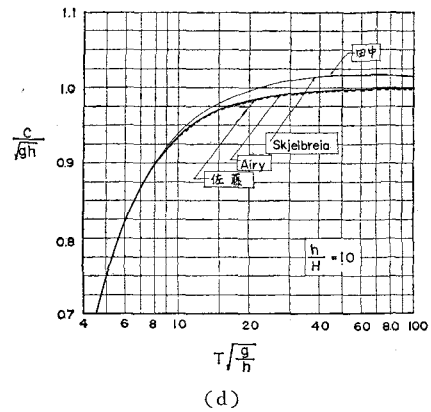
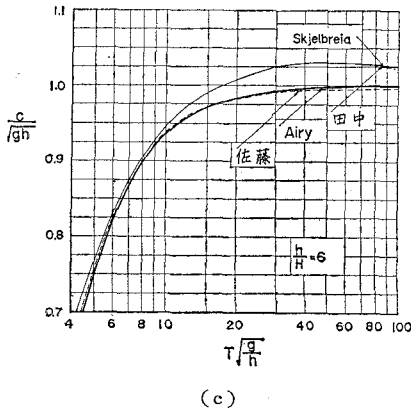
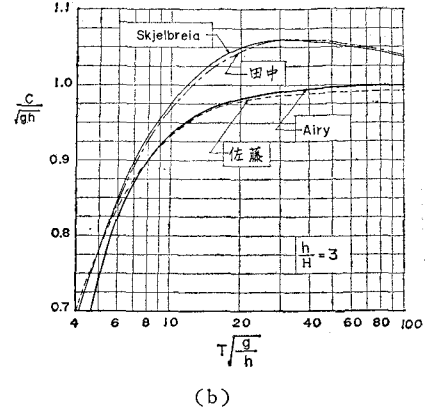
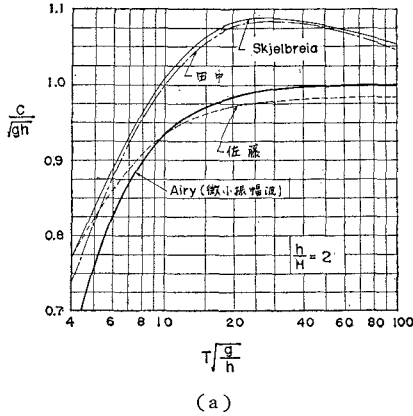
れ、とくに $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるほど著しいことである。このことは、佐藤の解は近似度が他にくらべて 1 次低く、自由表面の圧力条件を十分満たしていないことによるとと思われる。このような考察に加えて、Skjelbreia の解は平均水深 h を採用しているので、実用上からは都合がよいこと、理論解が数表化されているので計算に便利であること、さらに高次の解を系統的に求めることができるという点などを考えて、Stokes 波の理論解としては、Skjelbreia による第 3 次近似解を用いるのが適当と思われる。したがって、以下に述べる Stokes 波としては Skjelbreia によるものを用いることにする。

3. Stokes 波とクノイド波の波速と波の峯高に関する理論曲線の比較

(1) 波 速

Stokes 波の波速式は、上述のように、Skjelbreia による式 (17) および (18) を用い、クノイド波の波速式は、前論文¹²⁾ の式 (4)、あるいはそれを

図-6 各理論解による Stokes 波の波速曲線の比較



図化した図-3を用いる。図-7は、これらの式あるいは図を用いて、 $h/H=2, 3, 5$ および10の場合に対して求めた波速曲線であって、比較のために式(19)にもとづく微小振幅波の波速曲線も示してある。これらの図からクノイド波の曲線は、 $T\sqrt{g/h}$ の値がある値より小さくなると波速が増加するという奇妙なことがおこるので、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さくなるとクノイド波の理論は適用できなくなること、また微小振幅波の波速よりクノイド波の波速が小さくなるということも常識では考えられないこと、一方、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると Stokes 波の波速が減少し始めるということも常識的におかしいので、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると Stokes 波の理論は適用できなくなること、などが理解される。しかし、 H/h の値が大きくなると、クノイド波と Stokes 波の波速曲線は接近し、両者の差は小さくなっている。

(2) 平均水面上の波の峯高

クノイド波の理論では、波の谷と平均水面との距離 δ は、 δ/H の形で、前論文の式(2)であらわされるから、平均水面上の波の峯高と波高の比 η_0/H は、

$$\eta_0/H = (H - \delta)/H = 1 - (\delta/H) \quad \dots\dots\dots(21)$$

によって求められる。

一方、Stokes 波では、Skjelbreia の 3rd order の波

形の式は、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H} = & \frac{a}{H} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{HL} \frac{\cosh 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)}{\sinh^2 2\pi h/L} \\ & \times \cos 2\theta + \frac{3}{16} \frac{\pi^2 a^3}{L^2 H} \frac{8 \cosh^2 2\pi h/L + 1}{\sinh^6 2\pi h/L} \cos 3\theta \\ & \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

であるから、 η_0/H は上式で $\theta=0$ において次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0}{H} = & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2a}{h} \right) \left(\frac{h}{L} \right) + \frac{\pi}{8} \left(\frac{2a}{h} \right)^2 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left\{ \cosh \frac{2\pi h}{L} \right. \right. \\ & \times \left(\cosh \frac{4\pi h}{L} + 2 \right) \left. \left. \right/ \sinh^2 \frac{2\pi h}{L} \right\} + \frac{3\pi^2}{128} \left(\frac{2a}{h} \right)^3 \\ & \times \left(\frac{h}{L} \right)^3 \left\{ \left(8 \cosh^2 \frac{2\pi h}{L} + 1 \right) \left/ \sinh^6 \frac{2\pi h}{L} \right\} \right] \\ & \times \left\{ \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{h}{L} \right) \right\}^{-1} \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

波速の計算の場合と同様、式(18)および式(20)の関係を用いれば、式(23)より、 h/H をパラメーターとして、 η_0/H と $T\sqrt{g/h}$ の関係が求められる。

図-8は、これらの式を用いて求めたクノイド波と Stokes 波の、平均水面上の峯高についての理論曲線を示したもので、この図からも $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなると、Stokes 波の理論が適用できなくなることがわかる。

図-7 Stokes 波とクノイド波の波速曲線の比較

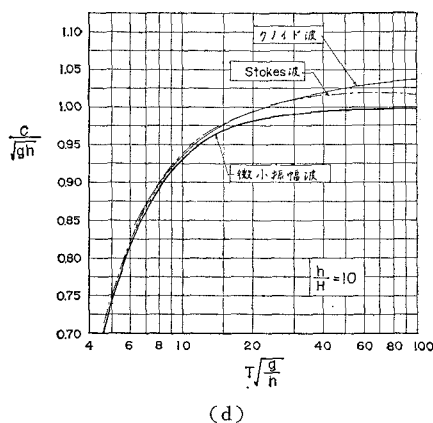
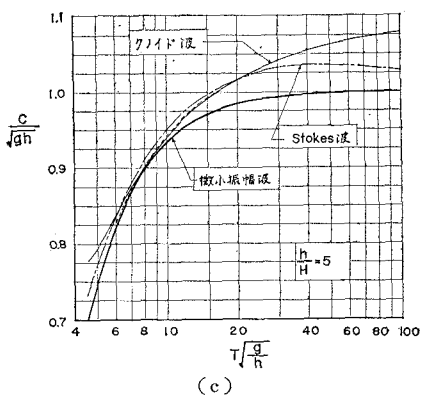
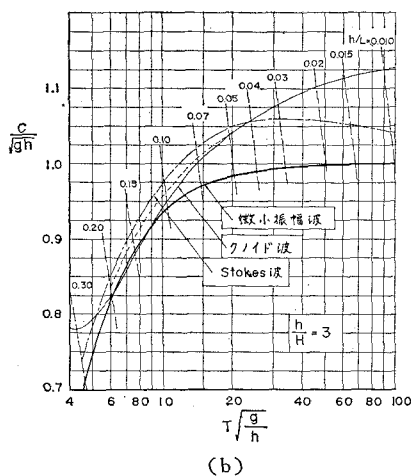
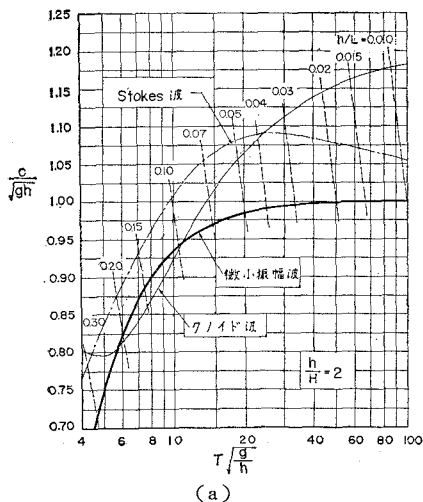
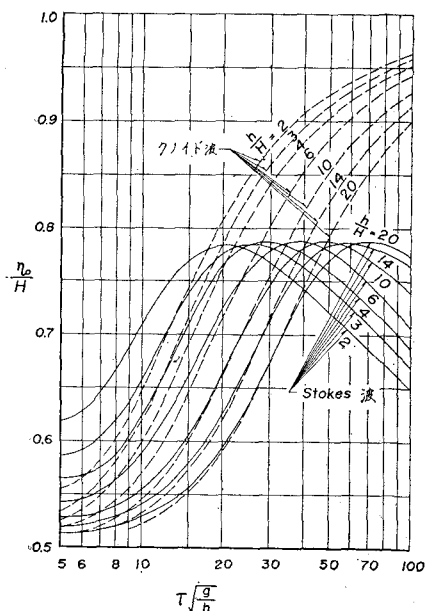


図-8 Stokes 波とクノイド波の波の峯高についての理論曲線の比較



3. Stokes 波およびクノイド波の適合性に関する実験

さきに岩垣・細見¹²⁾は、水深・波長比の小さい $T\sqrt{g/h} = 15, 20, 25$ および 30 の場合に対して、波形、波速および波長に関する実験を行ない、クノイド波理論や、Stokes 波理論の適合性について検討したが、今回はクノイド波理論が適用されなくなるであろうと思われる $T\sqrt{g/h}$ の値の小さい場合、すなわち $6 \leq T\sqrt{g/h} \leq 15$ の範囲について、波速に関する実験を行ない、同時に得られた波形記録から、平均水面上の波の峯高をも求め、各理論曲線と比較検討した。なお、実験装置の制約上、水深・波高比 h/H はほぼ 2.5 以上の場合に限られた。

(1) 実験装置および実験方法

用いた水槽および波起機は、前回のもと同じ京都大学防災研究所宇治川水理実験所にある、幅 50 cm、深さ 65 cm、長さ 63 m の鉄製波浪実験用長水槽と、鉄製の枠の上のレールを造波板付きの台車が往復運動するピストン型のものである。また実験方法も前と同様、 $T\sqrt{g/h}$ の値が一定になるように周期と水深を固定し、

表—1 水深と実験波の特性

$T\sqrt{g/h}$	周期 T (sec)	水深 h (cm)	波高 H (cm)
6	0.8	17.42	2.88~2.07
	1.0	27.22	8.35~3.02
8	1.0	15.31	4.98~2.49
	1.3	25.88	8.49~2.60
10	1.2	14.11	4.12~2.07
	1.4	19.21	6.03~2.67
12	1.5	15.31	5.13~1.78
	1.8	22.05	7.11~1.49
15	1.6	11.15	3.20~1.18

波高を変化させるようにした。実験を行なった水深と波の特性は表—1に示す。波速の測定方法も前回と同じ方法で、水槽端から 16~30 m 離れた位置に、300.4~303.4 cm の間隔で 2 つの電気抵抗式波高計を設置し、

ペン書きオッシログラフにより水位の時間的变化を記録させ、これから各波の峯の距離を読みとり、波が 2 つの波高計の間を進むに要する時間を求め、波速を算出した。またこのときに得られた波形記録から、平均水面上の波の峯高を求めた。

(2) 実験結果と理論値との比較

表—2 は実験によって求めた波高 H 、波速 c および平均水面からの波の峯高 η_0 を示したものである。波高は 3 桁、波速は 4 桁まで示してあるが、前者は最大 2% の読み取り誤差が、また後者は最大約 0.5% 程度の誤差が入っていると考えられる。また η_0 の読み取り誤差は、波高のその 2 倍程度であろう。

(a) 波速 図—9 は $T\sqrt{g/h}$ が 6, 8, 10, 12 および 15 の各場合に対して、 $c/\sqrt{gh}$ と h/H との関係を点描し、前述の Stokes 波とクノイド波の理論値と比較した

表—2 波速 c および平均水面上の波の峯高 η_0 の実験値

$T\sqrt{g/h}$	T (sec)	H (cm)	c (cm/s)	η_0 (cm)	$T\sqrt{g/h}$	T (sec)	H (cm)	c (cm/s)	η_0 (cm)
6	0.8	4.35	—	2.36	10	1.4	6.80	—	4.27
		4.26	—	2.40			6.72	—	4.28
		4.06	—	2.24			6.03	130.1	3.78
		3.49	—	1.85			5.47	129.8	3.40
		3.15	—	1.72			4.61	129.3	2.84
		2.88	107.7	1.47			4.20	—	2.56
		2.78	107.5	1.50			3.73	128.9	2.20
		2.63	—	1.34			2.67	128.0	—
	1.0	2.29	106.7	1.22			2.11	—	1.15
		2.07	106.6	1.06			5.13	121.2	3.40
		8.35	135.6	4.64		1.5	4.39	120.7	2.87
		8.26	135.6	4.54			4.34	119.6	2.84
		7.40	134.2	4.15			4.08	119.7	2.69
		6.54	134.3	3.45			3.68	119.4	2.36
		5.58	133.9	3.05			3.34	118.8	2.06
		4.68	134.2	2.58			2.94	117.8	1.76
		3.75	133.3	1.96			2.74	117.2	—
		3.02	133.2	1.58			2.30	117.1	1.41
8	1.0	4.98	112.6	2.92	12	1.8	1.78	117.0	1.00
		4.91	112.3	2.86			7.17	—	4.75
		4.84	112.0	2.83			7.11	144.5	4.70
		4.61	—	2.72			6.77	144.6	4.49
		4.16	—	2.43			6.27	—	4.14
		3.81	109.9	2.17			5.56	143.3	3.47
		3.14	110.1	1.71			5.06	142.8	—
		2.49	110.0	1.29			4.55	142.2	2.84
	1.3	8.49	145.3	5.14			3.82	141.2	2.31
		7.87	145.1	4.68			2.92	142.2	1.67
		6.42	144.6	3.78			2.21	131.6	1.17
		5.25	144.3	2.98			1.49	139.9	0.79
		3.88	143.7	2.14	15	1.6	3.20	105.5	2.29
		3.32	142.9	1.80			3.12	105.4	2.15
		2.60	142.7	1.36			2.92	105.5	2.01
	1.2	4.12	110.8	2.56			2.59	104.4	1.85
		3.37	110.8	—			2.42	104.3	1.70
		3.04	110.4	1.82			2.14	103.8	1.43
		2.83	109.9	1.70			1.87	103.1	1.24
		2.46	109.5	1.45			1.65	103.1	1.05
		2.07	109.5	1.13			1.46	102.6	0.89
10	1.2	—	—	—			1.18	101.3	0.70
		—	—	—			0.85	—	0.49

ものである。図中のクノイド波の曲線の端の黒丸は、Laitoneにより求められた最高波限界点であり、 $T\sqrt{g/h} = 15$ の場合の $T=1.97$ sec の実験値は、前論文で求められた結果である。これらの図からつぎのことがいえる。

(1) $T\sqrt{g/h}$ の値が6および8の場合には、実験値は微小振幅波か Stokes 波の方に近く点描され、傾向もクノイド波より Stokes 波の方によく一致する。

(2) $T\sqrt{g/h}$ の値が10より大きくなると、クノイド波か Stokes 波との中間あたりに点描され、とくに h/H の値が4程度より小さくなると、両者の中間に点描され、 $T\sqrt{g/h}$ が15になると、むしろクノイド波の方に近づく。

(3) したがって、 $T\sqrt{g/h}$ が12程度以上ではクノ

イド波の曲線に適合し、10程度以下では Stokes 波と微小振幅波の中間あたりに実験値が点描されると考えてよい。図-7に示す点線は、これらの点を考慮して実験値と合うよう定めた波速曲線である。

(b) 平均水面からの波の峰高 図-10は波速と

同様、 $T\sqrt{g/h}$ が6, 8, 10, 12および15の場合の今回の実験値に加えて、15, 20, 25および30の場合の前回の実験値とともに、 η_0/H と h/H との関係を点描し、理論曲線と比較したものである。 $T\sqrt{g/h}$ が25および30の場合は、前論文で指摘したように、実験波の谷の部分があまりきれいな形をしていなかったため、各理論の適合性について判定を下すに十分な実験資料とはいえないが、それ以外の図をみるとつぎのことがいえる。すなわ

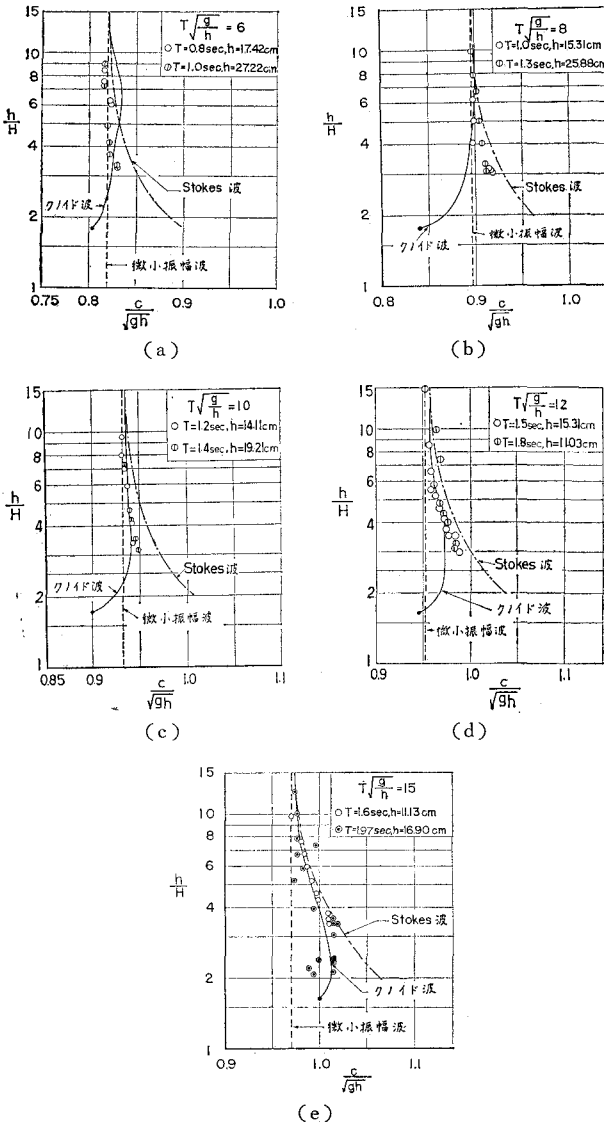
ち、実験値は $T\sqrt{g/h}$ が12程度より大きいときは、クノイド波の曲線によく適合するが、10以下になると Stokes 波の曲線とクノイド波のその間に点描される。しかし、実験値の上限に注目すると、 $T\sqrt{g/h}$ の値が15程度までは Stokes 波の曲線に、20程度以上になるとクノイド波の曲線に適合すると考えた方がよい。

5. 結 語

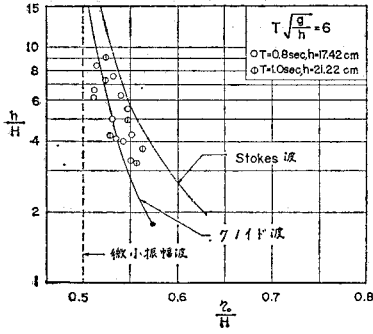
この論文では、まず Stokes 波の理論解として、佐藤・田中および Skjelbreia の解を選び、とくに波速について比較検討し、Stokes 波としては Skjelbreia の第3次近似解を用いるのが妥当であることを示した後、Stokes 波とクノイド波の適用限界について検討した。その方法としては、Stokes 波の適用限界といわれている h/L の値が $1/10$ 付近について詳細な実験を行ない、波速と平均水面上の波の峰高とを測定して、クノイド波の第2近似解と Stokes 波の第3次近似解および微小振幅波の値と比較した。その結果、 $h/H = 2$ に対しては実験値がないのでよくわからないが、 h/H が3~5の間では、クノイド波の適用範囲は $T\sqrt{g/h} \geq 12$ とみてよく、Stokes 波のそれは $T\sqrt{g/h} \leq 10$ 程度であること、 h/H が10以上になると、クノイド波でも $T\sqrt{g/h} = 6$ 程度までは適用できるし、Stokes 波でも $T\sqrt{g/h} = 20$ 程度まで適用可能であることが見出された。しかし、 h/H が非常に小さい値の場合でも適用可能なクノイド波の適用範囲は $T\sqrt{g/h} \geq 20$ ($h/L \leq 0.05$)、Stokes 波は $T\sqrt{g/h} \leq 6$ ($h/L \geq 0.2$) であるとしてよいであろう。

このように、各理論の適用限界は $T\sqrt{g/h}$ の値のみでなく h/H の値にも関係するので、現在のところ、まだ公式化するとところまでには至らないが、おおよその目安を定めることができた。今後

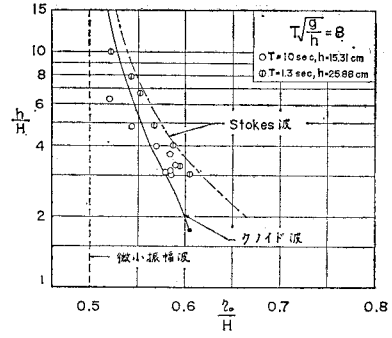
図-9 波速に対する各理論値と実験値の比較



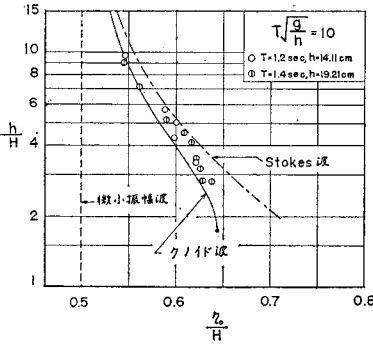
図—10 波の峯高に対する各理論値と実験値の比較



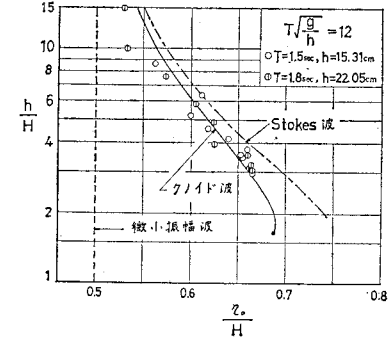
(a)



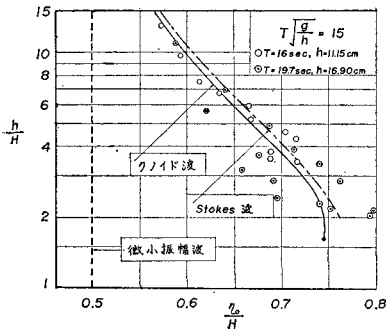
(b)



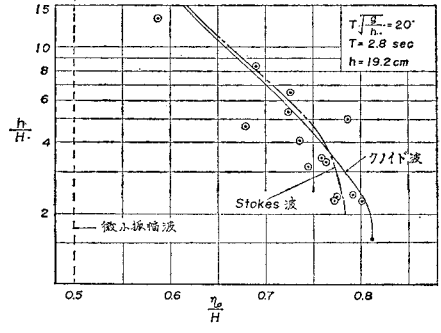
(c)



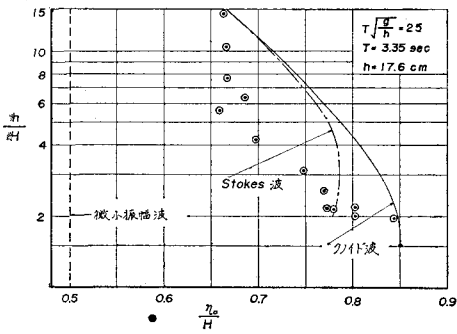
(d)



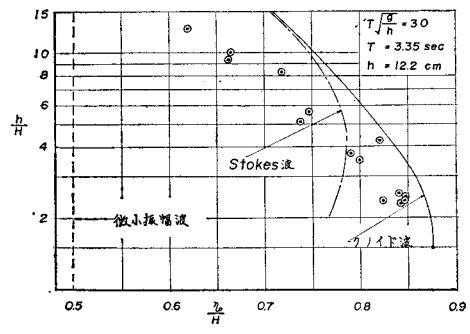
(e)



(f)



(g)



(h)

は、波速や波の峯高のみでなく、その他の水理特性についても検討し、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合に適用される Stokes 波から、 $T\sqrt{g/h}$ の大きいときに用いられるクノイド波へ移り変わる水理特性の挙動を正しく把握する必要がある。

最後にこの研究は文部省特定研究による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Keulegan, G.H. : Wave Motion, Engineering Hydraulics, Wiley, New York, ed. by H. Rouse, Chapt. 11, 1950, pp. 711~768.
- 2) Laitone, E.V. : Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 4, 1962, pp. 1555~1564.
- 3) Wilson, B.W., L.M. Webb and J.A. Hendrickson : The Nature of Tsunamis, Their Generation and Dispersion in Water of Finite Depth, National Science Co., Tech. Rep. No. SN 57-2, August, 1952, pp. 1~150.
- 4) Korteweg, D.J. and G. de Vries : On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 39, 1895, pp. 422~443.
- 5) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430~444.
- 6) Chappellear, J.E. : Shallow-Water Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 12, 1962, pp. 4693~4704.
- 7) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1~337.
- 8) Sato, S. : Surface Waves in Shallow Water, Jour. of Research, Public Works Research Institute, Vol. 1, Paper No. 2, 1954.
- 9) Tanaka, K. : On the Sea Waves, Technology Report of Osaka University, Vol. 13, No. 65, 1953.
- 10) 田中 清 : 海の波の解析概論, 海岸工学講演会講演集, 土木学会 昭 30. 11, pp. 17~32.
- 11) Skjelbreia, L. and J.A. Hendrickson : Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Engineering, 1964, pp. 184~197.
- 12) 岩垣雄一・細見昌彦 : クノイド波に関する二、三の実験, 第13回海岸工学講演会講演集, 昭 41. 12, pp. 1~8.