密度流の問題（1）

浜田徳一*

ここにのべるものは内波の粘性損失，とくに河海両水の界面に生ずる内波の粘性損失に関するものである。

1. 粘性境界層の基本式

問題は2次元とし，1次近似の範囲内において取り扱うものとする。静止状態の上下両流体の界面において，水平に x 軸を，それに垂直上向きに y 軸をとる。$\phi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $u^{(1)}$,…は上層流体に関する諸量，$\phi^{(2)}$, $\psi^{(2)}$, $u^{(2)}$,…は下層流体に関する諸量を表わすものとする。Lamb[1] p. 625 を参照して，上下両流体に対する運動連続両方程式は，

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho^{(1)}}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}+\nu^{(1)}\nabla^2u^{(1)} \quad\cdots\cdots\cdots(1\text{-}1)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho^{(1)}}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}-g+\nu^{(1)}\nabla^2v^{(1)} \quad\cdots\cdots(1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}=0 \quad\cdots\cdots(1\text{-}3)$$

$$u^{(1)}=-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial y},\quad v^{(1)}=-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x} \quad\cdots\cdots(1\text{-}4)$$

を用い，

$$\frac{p^{(1)}}{\rho^{(1)}}=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}-gy \quad\cdots\cdots(1\text{-}5)$$

$$\nabla^2\varphi^{(1)}=0,\quad \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial t}=\nu^{(1)}\nabla^2\psi^{(1)} \quad\cdots\cdots(1\text{-}6)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho^{(2)}}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}+\nu^{(2)}\nabla^2u^{(2)} \quad\cdots\cdots\cdots(2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho^{(2)}}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial y}-g+\nu^{(2)}\nabla^2v^{(2)} \quad\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y}=0 \quad\cdots\cdots(2\text{-}3)$$

$$u^{(2)}=-\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial y},\quad v^{(2)}=-\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial y}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x} \quad\cdots\cdots(2\text{-}4)$$

を用い，

$$\frac{p^{(2)}}{\rho^{(2)}}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}-gy \quad\cdots\cdots(2\text{-}5)$$

$$\nabla^2\varphi^{(2)}=0,\quad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial t}=\nu^{(2)}\nabla^2\psi^{(2)} \quad\cdots\cdots(2\text{-}6)$$

両流体の界面における条件は，

$$(p_{yy})^{(2)}=(p_{yy})^{(1)}+T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

または，

$$-p^{(2)}+2\mu^{(2)}\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y}=T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-p^{(1)}$$
$$+2\mu^{(1)}\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}\qquad y=0 \text{ にて}\cdots\cdots(3)$$

$(\tau_{xy})^{(1)}=(\tau_{xy})^{(2)}$　または，

$$\mu^{(1)}\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)=\mu^{(2)}\left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)$$
$$y=0 \text{ にて}\cdots\cdots(4)$$

$$v^{(1)}=v^{(2)}=\frac{\partial\eta}{\partial t}\qquad y=0 \text{ にて}\cdots\cdots(5\text{-}1)$$

$$u^{(1)}=u^{(2)}\qquad y=0 \text{ にて}\cdots\cdots(5\text{-}2)$$

式 (1-6) を用い，$\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}$ のかたちをきめる。

$\varphi^{(1)}=A^{(1)}e^{i(kx+nt)}$, $\psi^{(1)}=B^{(1)}e^{i(kx+nt)}$ を式 (1-6) に代入する。

ただし $k>0$, $\boldsymbol{R}(n)<0$ とする。

$$m^{(1)2}=k^2+\frac{in}{\nu^{(1)}} \quad\cdots\cdots(6)$$

を満足する $m^{(1)}$ のうち，その real part が正のもののみに注目して，

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(1)}&=A_2^{(1)}e^{-ky}e^{i(kx+nt)}\\ \psi^{(1)}&=B_2^{(1)}e^{-m^{(1)}y}e^{i(kx+nt)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7)$$

同様にして式 (2-6) を用い，

$$m^{(2)2}=k^2+\frac{in}{\nu^{(2)}} \quad\cdots\cdots(8)$$

を満足する $m^{(2)}$ のうち，その real part が正のもののみに注目すれば，

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(2)}&=A_1^{(2)}e^{ky}e^{i(kx+nt)}\\ \psi^{(2)}&=B_1^{(2)}e^{m^{(2)}y}e^{i(kx+nt)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(9)$$

また，$\eta=De^{i(kx+nt)}$ $\cdots\cdots(10)$

とする。

式 (3) の $p^{(1)}, p^{(2)}$ は式 (1-5), (2-5) により表わすことができるから，式 (7), (9), (10) を用い，

$$\rho^{(2)}gD-\rho^{(2)}inA_1^{(2)}-2\mu^{(2)}k^2A_1^{(2)}+2\mu^{(2)}ikm^{(2)}B_1^{(2)}$$
$$=-k^2TD+\rho^{(1)}gD-\rho^{(1)}inA_2^{(1)}-2\mu^{(1)}k^2A_2^{(1)}$$
$$-2\mu^{(1)}im^{(1)}kB_2^{(1)} \quad\cdots\cdots(11)$$

式 (4) より，

$$\mu^{(1)}(ik^2A_2^{(1)}-k^2B_2^{(1)}+ik^2A_2^{(1)}-m^{(1)2}B_2^{(1)})$$
$$=\mu^{(2)}(-ik^2A_1^{(2)}-k^2B_1^{(2)}-ik^2A_1^{(2)}-m^{(2)2}B_1^{(2)})$$
$$\cdots\cdots(12)$$

式 (5-1) より，

* 正会員　工博　運輸省港湾技術研究所

$$kA_2^{(1)}+ikB_2^{(1)}=-kA_1^{(2)}+ikB_1^{(2)}=inD \quad\cdots\cdots(13)$$

式 (5-2) より，

$$-ikA_2^{(1)}+m^{(1)}B_2^{(1)}=-ikA_1^{(2)}-m^{(2)}B_1^{(2)} \quad\cdots\cdots(14)$$

式 (11),(12),(13),(14) より $A_2^{(1)},A_1^{(2)},B_2^{(1)},B_1^{(2)}$ を消去すれば，

$$\begin{aligned}
&(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)\frac{1}{2n}[\{\mu^{(1)}(k^2+m^{(1)2})+\mu^{(2)}k(m^{(1)}-k)-\mu^{(1)}k(m^{(1)}+k)\}(k-m^{(2)})\\
&\quad+\{\mu^{(2)}(k^2+m^{(2)2})-\mu^{(1)}k(k-m^{(2)})-\mu^{(2)}k(m^{(2)}+k)\}(k-m^{(1)})]\\
&\quad-(\rho^{(2)}in+2\mu^{(2)}k^2)\frac{i}{2k}[\{\mu^{(1)}(k^2+m^{(1)2})+\mu^{(2)}k(m^{(1)}-k)-\mu^{(1)}k(m^{(1)}+k)\}(m^{(2)}+k)\\
&\quad+\{\mu^{(2)}(k^2+m^{(2)2})-\mu^{(1)}k(k-m^{(2)})-\mu^{(2)}k(m^{(2)}+k)\}(m^{(1)}-k)]\\
&\quad+2\mu^{(2)}ikm^{(2)}\{\mu^{(1)}(k^2+m^{(1)2})+\mu^{(2)}k(m^{(1)}-k)-\mu^{(1)}k(m^{(1)}+k)\}\\
&\quad+(\rho^{(1)}in+2\mu^{(1)}k^2)\frac{i}{2k}[\{\mu^{(1)}(k^2+m^{(1)2})+\mu^{(2)}k(m^{(1)}-k)-\mu^{(1)}k(m^{(1)}+k)\}(k-m^{(2)})\\
&\quad-\{\mu^{(2)}(k^2+m^{(2)2})-\mu^{(1)}k(k-m^{(2)})-\mu^{(2)}k(m^{(2)}+k)\}(m^{(1)}+k)]\\
&\quad+2\mu^{(1)}im^{(1)}k\{\mu^{(2)}(k^2+m^{(2)2})-\mu^{(1)}k(k-m^{(2)})-\mu^{(2)}k(m^{(2)}+k)\}=0 \quad\cdots\cdots(15)
\end{aligned}$$

2. 上下両流体の粘性係数がほぼ相等しい場合

河水，海水による密度流の場合，両者の粘性係数はほぼ相等しいと考えられる。この場合式 (15) において，

$$\mu^{(1)}k^2+\mu^{(1)}k^2+\rho^{(1)}in+\mu^{(2)}km^{(1)}-\mu^{(2)}k^2-\mu^{(1)}km^{(1)}-\mu^{(1)}k^2 \fallingdotseq \rho^{(1)}in$$

$$\mu^{(2)}k^2+\mu^{(2)}k^2+\rho^{(2)}in-\mu^{(1)}k^2+\mu^{(1)}km^{(2)}-\mu^{(2)}km^{(2)}-\mu^{(2)}k^2 \fallingdotseq \rho^{(2)}in$$

となり，これを用いて式 (15) を計算すれば，

$$\begin{aligned}
&(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)-\frac{n^2}{k}(\rho^{(2)}+\rho^{(1)})\\
&+2\mu^{(2)}kin+2\mu^{(1)}kin-\frac{4\mu^{(2)}km^{(2)}\rho^{(1)}in}{\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)}}\\
&-\frac{4\mu^{(1)}m^{(1)}k\rho^{(2)}in}{\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)}}\\
&-\frac{(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})k}{\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)}}\\
&+\frac{n^2(\rho^{(1)}-\rho^{(2)})^2}{\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)}}=0 \quad\cdots\cdots(16)
\end{aligned}$$

$\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$ を用いれば，左辺第 3,4,5,6 項は消える。

式 (16) の第 1,2 項に注目してこれを解くと，

$$n_0=\pm\sqrt{\frac{k(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}}$$

進行波のみに注目すれば，

$$n_0=-\sqrt{\frac{k(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)}{\rho^{(2)}+\rho^{(1)}}} \quad\cdots\cdots(17)$$

よって式 (16) はつぎのように近似される。

$$(\rho^{(2)}g+k^2T-\rho^{(1)}g)-\frac{n^2}{k}(\rho^{(2)}+\rho^{(1)})-\frac{n_0{}^2 4\rho^{(1)}\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)}}=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

これを解いて，

$$n=n_0\left(1-\frac{2\rho^{(1)}\rho^{(2)}k}{(\rho^{(2)}+\rho^{(1)})(\rho^{(1)}m^{(2)}+\rho^{(2)}m^{(1)})}\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

ここで問題となるのは $m^{(1)},m^{(2)}$ をいかに近似させるかであるが，$k\leqq 3$ 程度の内波が河海両水の界面に生じている場合，次式で十分近似できる。

$$\left.\begin{aligned}
m^{(1)}&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-n_0}{\nu^{(1)}}\right)^{1/2}\\
m^{(2)}&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-n_0}{\nu^{(2)}}\right)^{1/2}
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(20)$$

式 (19),(20) による n を用いて式 (10) は，

$$\left.\begin{aligned}
\eta&=D\cos\left\{kx+n_0\times\left(1-\frac{\sqrt{2\rho^{(1)}\rho^{(2)}}\,k}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})(-n_0)^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu^{(1)}}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^{(2)}}}\right)}\right)t\right\}\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{(-n_0)^{1/2}\sqrt{2\rho^{(1)}\rho^{(2)}}\,k}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})\left(\frac{1}{\sqrt{\nu^{(1)}}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^{(2)}}}\right)}t\right)\\
\overline{\eta^2}&=\frac{D^2}{2}e^{-2\alpha t},\quad \alpha=\frac{(-n_0)^{1/2}\sqrt{2\rho^{(1)}\rho^{(2)}}\,k}{(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})\left(\frac{1}{\sqrt{\nu^{(1)}}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^{(2)}}}\right)}
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(21)$$

内部波のエネルギーは，

$$\left.\begin{aligned}
E&=\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gD^2e^{-2\alpha t}\\
\frac{dE}{dt}&=-(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})\alpha gD^2e^{-2\alpha t}\\
&=-(-n_0)^{5/2}\frac{\sqrt{2}\,\mu}{\sqrt{\nu^{(1)}}+\sqrt{\nu^{(2)}}}D'^2
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

ただし式 (17) において $T\to 0$ とし，また $D^2e^{-2\alpha t}\to D'^2$ とした。$\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$ と仮定しているから，共通の粘性係数を μ としている。この計算における減衰係数 α は両流体が流れていない場合のものである。しかし両流体の粘性係数が有限値を持ち，かつほぼ相等しい場合は両流体はその界面 $y=0$ で一般流が互いに相接続することとなり，速度分布が jump することはない。したがって流れのある場合にも，上記の減衰係数 α は近似的に用いることができる。

3. 下層流体の粘性係数を無視できる場合

この場合式 (3),(4),(5-1) はつぎのようになる。

$$-p^{(2)}=T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-p^{(1)}+2\mu^{(1)}\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}$$

$$y=0\ \text{にて}\cdots\cdots(23)$$

$$\mu^{(1)}\left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)=0\qquad y=0\ \text{にて}\cdots\cdots(24)$$

$$v^{(1)}=v^{(2)}=\frac{\partial\eta}{\partial t}\qquad y=0\ \text{にて}\cdots\cdots(25)$$

式 (5-2) は下層流体の粘性が無視できるため，速度が slip して成立しない。計算の結果この界面条件から，

$$\left(\rho^{(2)}g\frac{1}{k}-\rho^{(1)}g\frac{1}{k}+\frac{k^2T}{k}\right)-(\rho^{(1)}+\rho^{(2)})\frac{n^2}{k^2}$$
$$+4\mu^{(1)}k^2\nu^{(1)}+i\,4\rho^{(1)}n\,\nu^{(1)}-4\mu^{(1)}m^{(1)}k\,\nu^{(1)}=0\quad\cdots\cdots(26)$$

第1近似としての n_0 は式 (26) の第 1,2 項から，

$$n_0=-\sqrt{\frac{k(\rho^{(2)}g-\rho^{(1)}g+k^2T)}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}}\quad\cdots\cdots(27)$$

下層流体の粘性は無視したが，その密度は海水程度と考え，上層水は河水程度の密度，粘性係数とすれば，$k\leqq 3$ 程度の波数の内波に対しては，式 (26) の第 3,5 項は第4項に対して無視してよい。よって，

$$n=n_0\left(1+\frac{i\,2\mu^{(1)}k^2}{(\rho^{(2)}+\rho^{(1)})n_0}\right)\cdots\cdots(28)$$

$$\left.\begin{aligned}\eta&=D\cos(kx+n_0t)e^{-\frac{2\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}t}\\ \overline{\eta^2}&=\frac{D^2}{2}e^{-\frac{4\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}t}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(29)$$

内波のエネルギーについては，

$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gD^2e^{-\frac{4\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}t}\\ &\qquad(\text{式 (27) で } T\to 0 \text{ とする})\\ \frac{dE}{dt}&=(\rho^{(2)}-\rho^{(1)})gD^2\left(-\frac{2\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}\right)e^{-\frac{4\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}t}\\ &=-2\mu^{(1)}k^3c_0^{\,2}D'^2=-2\mu^{(1)}n_0^{\,2}kD'^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

ただし，$D^2e^{-\frac{4\mu^{(1)}k^2}{\rho^{(1)}+\rho^{(2)}}t}=D'^2$ とする。

式 (30) は嶋[2] p. 23 式 (125) において上層流体の一様流速を 0 とおいたものと一致する。椎貝[3]，嶋の計算はこのように下層流体の粘性係数が上層流体のそれにくらべ，きわめて小さい場合のものであるが，この場合は界面 $y=0$ において一般流の流速分布に jump が許されるため，表層流体が垂直方向に一様流速で流れている場合が計算されるわけである。

4. 粘性境界層の渦度その他

式 (22) と式 (30) とによる dE/dt の大きさは，$\rho^{(2)}\fallingdotseq 1.020$，$\rho^{(1)}=1.000$，$\mu^{(1)}\fallingdotseq 0.01$ として，$k=1$ で式 (22) によるものが式 (30) によるものの約6倍，$k=1/10$ で約 35 倍となっている。通常の規模の模型実験では k は 2～3 程度，実際の野外では k は 1/10 あるいはさらに小さくなるであろう。

つぎにこうした内波の粘性境界層の力学的性質を示す重要な index として，その渦度の表現形式を調べてみる。

まず $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$ の場合は，

$$\left.\begin{aligned}\zeta^{(1)}&=\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\\ \zeta^{(2)}&=\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

であるが，計算の結果は，

$$\left.\begin{aligned}\zeta^{(1)}&=-2nD\frac{m^{(1)}+k}{1+\dfrac{m^{(1)}+k}{m^{(2)}+k}}e^{-m^{(1)}y}e^{i(kx+nt)}\\ \zeta^{(2)}&=-2nD\frac{m^{(2)}+k}{1+\dfrac{m^{(2)}+k}{m^{(1)}+k}}e^{m^{(2)}y}e^{i(kx+nt)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

河海両水の場合，われわれが取り扱う波数では近似式 (20) を用いることができるから，$m^{(1)}\simeq m^{(2)}$ として，

$$\left.\begin{aligned}\zeta^{(1)}&\fallingdotseq\zeta^{(2)}\fallingdotseq-n_0D\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu}\right)^{1/2}e^{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu}\right)^{1/2}y}e^{-\alpha t}\\ &\times\left\{\cos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu}\right)^{1/2}y+kx+n_0t\right)\right.\\ &\left.+\sin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu}\right)^{1/2}y+kx+n_0t\right)\right\}\\ \alpha&\fallingdotseq\frac{(-n_0)^{1/2}}{2\sqrt{2}}k\sqrt{\nu}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(33)$$

$\mu^{(2)}=0$ の場合は，

$$\zeta^{(1)}=-2nkDe^{-m^{(1)}}e^{i(kx+nt)},\quad\zeta^{(2)}=0\cdots\cdots(34)$$

式 (32) と式 (34) とを比較するとき，両者とも境界層が界面の近傍に集中していることは同様であるが，現在の問題では $|m^{(1)}|\simeq|m^{(2)}|\gg k$ であるから，渦度は $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$ の場合のほうがはるかに強いことがわかる。

式 (34) は，

$$\left.\begin{aligned}\zeta^{(1)}&\fallingdotseq-2n_0kDe^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu^{(1)}}\right)^{1/2}y}\\ &\times\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(-n_0)}{\nu^{(1)}}\right)^{1/2}y+kx+n_0t\right)e^{-\beta t}\\ \beta&\fallingdotseq\nu^{(1)}k^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)$$

式 (33) は $-n_0=kc_0$ とおき，$y\to 0$ の極限で，

$$\zeta^{(1)}_{y\to 0}\fallingdotseq\zeta^{(2)}_{y\to 0}\fallingdotseq kc_0De^{-\alpha t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{kc_0}{\nu}\right)^{1/2}$$
$$\times\{\cos(kx+n_0t)+\sin(kx+n_0t)\}$$

ここで粘性境界層のすぐ外側の内波の水平粒子速度を用いれば，

$$\zeta^{(1)}_{y\to 0}\fallingdotseq\zeta^{(2)}_{y\to 0}\fallingdotseq\underbrace{\left\{\begin{matrix}-u^{(1)}\\+u^{(2)}\end{matrix}\right\}}_{\substack{\text{inviscid,}\\ \text{at } y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{kc_0}{\nu}\right)^{1/2}$$
$$\times(1+\tan(kx+n_0t))\quad\cdots\cdots(36)$$

ところで表面波の場合の固い底の粘性境界層では $\zeta_{y\to 0}$，すなわち底面に沿う渦度は境界層のすぐ外側の水平粒子速度を用い，

$$\zeta_{y\to 0}=\{-u\}_{\substack{\text{inviscid,}\\ \text{at } y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{kc_0}{\nu}\right)^{1/2}(1+\tan(kx+n_0t)) \quad \cdots\cdots(37)$$

式 (37) の c_0, n_0 はもちろん表面波としてのものである。

また流れに平行な平面に沿う Blasius 層流境界層の面に沿った渦度は，境界層外の一般流の速度を u_0 として，

$$\zeta_{y\to 0}\simeq -0.332\,u_0\sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} \quad \cdots\cdots(38)$$

式 (36),(37),(38) による渦度は共通した一般形を持ちいずれも粘性係数の影響を受けて，境界層 Reynolds 数に支配される性質があることを示している。そして Blasius 境界層が大きな境界層 Reynolds 数に対して，不安定を生じ，乱流境界層となり得ること，また表面波の摩擦損失から考えられる表面波の底の境界層が単純に層流境界層といいがたいことなどからすれば，この $\mu^{(1)}=\mu^{(2)}$ の場合の内波の境界層も，粘性を考慮した場合の不安定にもとづく，乱流境界層への遷移の可能性があるものと考えられる。

これに対して式 (35) で示される $\mu^{(2)}=0$ の場合の渦度は，Lamb[1] p. 627 に示されるつぎの表面波の自由表面の粘性境界層の渦度と同形である*。

$$\zeta=\mp 2k^2Dc_0\,e^{-2\nu k^2t}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{kc_0}{\nu}\right)^{1/2}y\right)\times\cos\left\{kx\pm\left(n_0t+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{kc_0}{\nu}\right)^{1/2}y\right)\right\} \quad \cdots(39)$$

（式 (39) では $y\leqq 0$, c_0, n_0 は表面波に関するもの）

式 (35),(39) は $y\to 0$ で減衰項としてのほかは，粘性係数の影響を受けない。表面波の自由表面の境界層が安定であると同様に，この $\mu^{(2)}=0$ の場合の内波の境界層も安定であろう。

この場合 **2.** の計算による内波境界層が乱流境界層に遷移しうる可能性を持つということは重要である。

permanent type の有限振幅の内波の計算を行なうとき，上下両層の密度が相近いときには内波は容易に砕波しがたいことが示される。このことから，河海両水の界面の内波では内部砕波により内波が energy を失うことは少ないであろう。層流境界層としての損失を越えた他の有力な energy 損失の機構が存するとすれば，現在の所筆者には上記の粘性境界層が不安定になりうる機構にそれがあるのではないかと考えられる。

また椎貝[3]，嶋[2] の行なったような河海両水に近い密度差の場合の，上層流が流れているときの界面の内波増幅により生ずる内部抵抗係数を求める計算は，**2.** の計算結果を用いても行なうことができる。この場合は界面で一般流の流速分布に jump を許すことができないから，内波の増幅機構としては Kelvin-Helmholtz 不安定を用いることはできない。しかしより合理的と考えられる方法で計算し，その結果から推論するとき，嶋[2] p. 24 とまったく同じ記号を用いて，

$$f_{iw}'\simeq \text{const.}\frac{1}{F_{i1}R_{e1}^{1/2}},\quad F_{i1}R_{e1}^{1/2}=\psi^{1/2} \quad \cdots\cdots(40)$$

となり，const. は 0.2 程度にとればよいであろう。そして理論的立場からすれば，実験値は実験条件により非常に散乱することが予想される。

参考文献

1) Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge, 1932.
2) 嶋　祐之：密度流論，水工学シリーズ 65-11，土木学会水理委員会，1965.
3) 椎貝博美：淡塩水境界面の摩擦抵抗係数について(英文)，土木学会論文集，第 123 号，1965.

* 式 (39) の誘導では空気の粘性は無視されている。