

長波のうちあげ高

首 藤 伸 夫*

1. 序

砕波していない長波が、一様勾配を有する斜面上でいかなる振舞をしめすか、そして陸岸へどこまではいあがるか、については、Carrier, Greenspan がはじめて取り扱った。彼らは、いわゆる浅水波に対する非線型の式にたくみな変換をほどこすことにより、流速に対する線型の式を導びくことに成功し、これをつかって初期値問題をといたのであった。変換の妥当性が保たれるためには、波高がかなり小さいこと、および波先端部での立上りの勾配が0であることの2点が満たされねばならなかった。

ここでは、問題を Lagrange 風にみつめて解くことにする。このような問題を Lagrange 風に解くことの利点の一つは、水底の境界条件を容易に満足せしめうることであろう。静水時に水底にあった水粒子は、水底から離れることはない、というのが水底での条件になる。陸岸へのはいあがり高の最先端に存在する水粒子は、静水時に汀線にあった水粒子である。

もう一つの利点は、面倒な変換を行わずとも、第1近似の式を線型微分方程式としてうることができる。このため、初期値問題をとく際に Carrier, Greenspan が加えた制限をもっと緩やかな制限でおきかえることができる。

さらに、ある一地点の記録から、それに対応するはいあがりを求めるという境界値問題を解くことができる。もちろん、一地点の記録とは、Euler 風にとられたものであるが、これを Lagrange 風に換算することは可能である。建設省土木研究所で行なわれた約 50 個の実験値から、計算と実測が良い一致を示すことが明らかになった。

2. 長波に対する Lagrange 型の第1近似式

2 次元運動を対象とする。粘性、海底の摩擦は考えない。時刻 $t=t_0$ に (a, b) なる位置にあった水粒子は、時刻 $t=t$ には (x, y) にある。その水粒子がうけている圧力を p とすると、連続の式は、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1 \dots \dots \dots (2-1)$$

運動の式は

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(p, y)}{\partial(a, b)} \dots \dots \dots (2-2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(x, p)}{\partial(a, b)} \dots \dots \dots (2-3)$$

である。ここで y 軸は鉛直上方を正としている。 $\partial(x, y)/\partial(a, b)$ などは Jacobian で、

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} \dots \dots \dots (2-4)$$

と表わされる。

ここで、水平方向に対して l 、鉛直方向には d という特性長を考える。長波性の運動は $d/l = \sigma \ll 1$ によって特徴づけられるものとしよう。 $A=a/l$, $B=b/d$, $X=a/l$, $Y=b/d$, $P=p/\rho g d$, $T=\sqrt{g d} t/l$ によって無次元量を導入し、式 (2-1)~(2-3) を書きなおすと、

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)} = 1 \dots \dots \dots (2-5)$$

$$\sigma \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial T^2} = -\sigma \frac{\partial(P, Y)}{\partial(A, B)} \dots \dots \dots (2-6)$$

$$\sigma^2 \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial T^2} = -1 - \frac{\partial(X, P)}{\partial(A, B)} \dots \dots \dots (2-7)$$

をうる。 (A, B) は静水時の水粒子の位置であると考ええてよい。いま、静水時の位置が (X_0, Y_0) であったとしよう。 t_0 時の座標 (A, B) との間には、連続の式により、

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(X_0, Y_0)} = 1 \dots \dots \dots (2-8)$$

が成立する。式 (2-8) と Jacobian の性質から、

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(X_0, Y_0)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)} \cdot \frac{\partial(A, B)}{\partial(X_0, Y_0)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(A, B)} \dots \dots \dots (2-9)$$

であるから、 (A, B) を静水時の位置と考えてもよいことは明らかであろう。運動の静水時位置からのへだたりは小さいと考えて摂動を行なう。いわゆる Miche の静水座標による表示を採用する訳である。 (A, B) を静水時座標とすると、

$$\left. \begin{aligned} X &= A + \sigma X_1(A, B; T) + \sigma^2 X_2(A, B; T) + \dots \\ Y &= B + \sigma Y_1(A, B; T) + \sigma^2 Y_2(A, B; T) + \dots \\ P &= P_0 + \sigma P_1(A, B; T) + \sigma^2 P_2(A, B; T) + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2-10)$$

と展開する。 P_0 は (A, B) の関数であってよい。式 (2-10) を (2-5), (2-6), (2-7) に代入して σ に関して

* 正会員 中央大学助教授 理工学部土木工学科

同次の項をあつめてやると、 $O(a^0)$ について、

$$\frac{\partial P_0}{\partial A} = 0 \dots\dots\dots (2-11)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial B} = -1 \dots\dots\dots (2-12),$$

$O(a^1)$ に対し、

$$\frac{\partial X_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial B} = 0 \dots\dots\dots (2-13)$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} + \frac{\partial P_1}{\partial A} + \frac{\partial Y_1}{\partial A} = 0 \dots\dots\dots (2-14)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial B} - \frac{\partial X_1}{\partial A} = 0 \dots\dots\dots (2-15)$$

がえられる。式 (2-15) は式 (2-7) よりえられるものであるが、鉛直方向加速度が無視されていることがわかる。

境界条件は、自由表面では、最初表面を形成していた粒子はつねに表面にあることであり、水底では、最初水底にあった粒子は水底を離れることがないものとする。

3. 水平床上の周期的な長波

まず水平床上での長波について、Euler 風にといた場合と、どのくらい異なっているかをみよう。圧力 P_0 は式 (2-11), (2-12) により

$$P_0 = -B + f(T) \dots\dots\dots (3-1)$$

である。最初 $B=0$ にあった粒子は、つねに $P_0=0$ なる圧力下になければならないから、

$$P_0 = -B \dots\dots\dots (3-2)$$

である。一次近似をとこう。水底は $B=-H=\text{const}$ である。式 (2-13) より、水底で $Y_1=0$ となるためには、

$$Y_1 = -\int_{-H}^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \dots\dots\dots (3-3)$$

である。圧力に関しては式 (2-15) と表面 $B=0$ で $P_1=0$ であることから

$$P_1 = \int_0^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \dots\dots\dots (3-4)$$

である。この両式より、

$$\begin{aligned} P_1 + Y_1 &= \int_0^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB - \int_{-H}^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \\ &= \int_0^{-H} \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \dots\dots\dots (3-5) \end{aligned}$$

となる。もし X_1 が A, B, T の関数であったとしても、 $P_1 + Y_1$ は A, T の関数である。式 (2-14) と (3-5) から、

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} + \frac{\partial}{\partial A} \left[\int_0^{-H} \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \right] = 0 \dots\dots\dots (3-6)$$

が成立するためには、 X_1 も A, T のみの関数でなければならない。したがって

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} - H \frac{\partial^2 X_1}{\partial A^2} = 0 \dots\dots\dots (3-7)$$

であり、解として

$$X_1 = \begin{bmatrix} \sin nA \\ \cos nA \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin n\sqrt{HT} \\ \cos n\sqrt{HT} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3-8)$$

の組み合わせをうる。

進行波に対しては、次元をもつ量によって表わすと、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{kh} \cdot \sin k(a-ct) \\ y_1 &= -\frac{H}{2} \left(1 + \frac{b}{h} \right) \cdot \cos k(a-ct) \\ p_1 &= \rho g \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{b}{h} \cdot \cos k(a-ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-9)$$

ここで H は波高、 L は波長、 h は水深、 $k=2\pi/L$ 、 $c=\sqrt{gh}$ である。水粒子の運動は

$$\frac{(x-a)^2}{\left(\frac{H}{2kh} \right)^2} + \frac{(y-b)^2}{\left\{ \frac{H}{2} \left(1 + \frac{b}{h} \right) \right\}^2} = 1 \dots\dots\dots (3-10)$$

で表わされる長円である。

定常波に対しては $a=0$ で $X_1=0$ とする。このとき

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{H}{kh} \cdot \sin ka \cdot \cos kct \\ y_1 &= -H \left(1 + \frac{b}{h} \right) \cdot \cos ka \cdot \cos kct \\ P_1 &= \rho g H \cdot \frac{b}{h} \cdot \cos ka \cdot \cos kct \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-11)$$

が解である。 H は入射波の波高である。水粒子は

$$\frac{y-b}{x-a} = -k(b+h) \cdot \cot ka \dots\dots\dots (3-12)$$

で表わされる直線上をうごく。

図-1 定常波表面波形

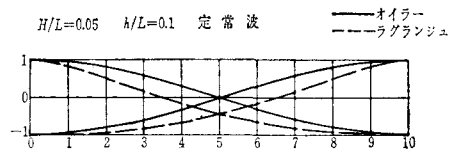


図-2 進行波表面波形

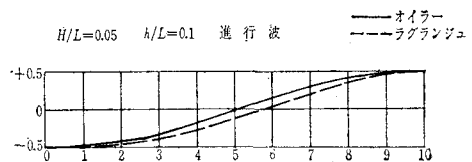


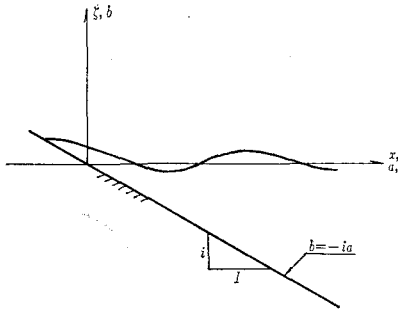
図-1, 2 は、入射波の波形勾配 $H/L=0.05$, $h/L=0.1$ のときの定常波と進行波の表面波形を、Euler 型、Lagrange 型でくらべたものである。Lagrange 型では谷が平らになり、峯がとがってることがうかがわれる。

4. 斜面上の長波

水底を図-3 のようにとる。 $B=-IA$ によってこの斜面を表わすことができる。ここで I は次元をもつ量で考えた際の斜面勾配を i としたとき、 $I=\frac{l}{d}i$ である。

水底の水粒子は静水時に $B=-IA$ をみたし、さらに運動中の任意の時間における座標 (X, Y) の間にも、 $Y=-IX$ という関係が成立せねばならない。すなわち、

図-3 座標軸と水底のとり方



$$Y(A, -IA; T) = -I \cdot X(A, -IA; T) \dots (4-1)$$

でなければならない。式 (2-10) の展開をつかうと、

$$\begin{aligned} B + \sigma Y_1(A, -IA; T) + \sigma^2 Y_2(A, -IA; T) + \dots \\ = -IA - \sigma I \cdot X_1(A, -IA; T) - \sigma^2 I \cdot X_2(A, \\ -IA; T) + \dots \dots \dots (4-2) \end{aligned}$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} B &= -IA, \\ Y_1 &= -IX_1, \text{ at } B = -IA \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4-3)$$

が水底での条件となる。

表面での条件は $B=0$ に対し $P_0=0, P_1=0$ である。

圧力の第0近似の解は、式 (2-11), (2-12) と上の条件から

$$P_0 = -B \dots \dots \dots (4-4)$$

である。

Y_1 は、式 (2-13) と (4-3) から、

$$\begin{aligned} Y_1 = - \int_{-IA}^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB - IX_1(A, -IA; T) \\ \dots \dots \dots (4-5) \end{aligned}$$

P_1 は、式 (2-15) と表面条件から

$$P_1 = \int_0^B \frac{\partial X_1}{\partial A} dB \dots \dots \dots (4-6)$$

したがって、

$$\begin{aligned} P_1 + Y_1 = \int_0^{-IA} \frac{\partial X_1}{\partial A} dB - IX_1(A, -IA; T) \\ \dots \dots \dots (4-7) \end{aligned}$$

式 (2-14) から X_1 に対する式、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} + \frac{\partial}{\partial A} \left[\int_0^{-IA} \frac{\partial X_1}{\partial A} dB - IX_1(A, -IA; T) \right] \\ = 0 \dots \dots \dots (4-8) \end{aligned}$$

がえられる。第2項は B には関係しないので、 X_1 も A, T のみの関数でなくてはならない。 X_1 をきめるためには、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} + \frac{\partial}{\partial A} \left[-IA \frac{\partial X_1}{\partial A} - IX_1 \right] = 0 \\ \therefore \frac{\partial^2 X_1}{\partial T^2} = \frac{\partial^2}{\partial A^2} [IAX_1] \dots \dots \dots (4-9) \end{aligned}$$

をとけばよいことになる。

式 (4-9) を表面にある水粒子の鉛直方向変位 η に関する式になおす。式 (4-5) から

$$\begin{aligned} \eta = - \int_{-IA}^0 \frac{\partial X_1}{\partial A} dB - IX_1 = -IA \cdot \frac{\partial X_1}{\partial A} \\ - IX_1 = - \frac{\partial}{\partial A} [IAX_1] \dots \dots \dots (4-10) \end{aligned}$$

式 (4-9) に $-IA$ をかけて A について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial T^2 \partial A} [-IAX_1] = \frac{\partial}{\partial A} \left[-IA \frac{\partial^2}{\partial A^2} (IAX_1) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial A} \left[IA \frac{\partial \eta}{\partial A} \right] \\ \therefore \frac{\partial^2 \eta}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial A} \left[IA \frac{\partial \eta}{\partial A} \right] = IA \frac{\partial^2 \eta}{\partial A^2} + I \frac{\partial \eta}{\partial A} \dots \\ \dots \dots \dots (4-11) \end{aligned}$$

この解として、

$$\eta = \begin{bmatrix} \sin nT \\ \cos nT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \\ N_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4-12)$$

がえられる。これに対応して、

$$\begin{aligned} X_1 &= - \begin{bmatrix} \sin nT \\ \cos nT \end{bmatrix} \left[\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{IA}} Z_1 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \\ Y_1 &= - (B + IA) \begin{bmatrix} \sin nT \\ \cos nT \end{bmatrix} \left[\frac{1}{IA} Z_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \\ &\quad + I \begin{bmatrix} \sin nT \\ \cos nT \end{bmatrix} \left[\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{IA}} Z_1 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \\ P_1 &= B \begin{bmatrix} \sin nT \\ \cos nT \end{bmatrix} \left[\frac{1}{IA} Z_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \dots (4-13) \end{aligned}$$

がえられる。 Z_n は n 次の Bessel 関数、Neumann 関数を表わしている。

波群が無限に続いているときを考えよう。反射率 1.0 で沖で完全重複波が存在する場合には、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sin nT \cdot J_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \\ X_1 &= - \frac{1}{n\sqrt{IA}} J_1 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \sin nT \\ Y_1 &= - \left[\frac{B}{IA} J_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) - J_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \sin nT \\ P_1 &= \frac{B}{IA} J_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \sin nT \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4-14)$$

反射率 0 のときには、

$$\begin{aligned} \eta &= \sin nT \cdot J_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) + \cos nT \cdot N_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \\ X_1 &= - \frac{1}{n\sqrt{IA}} \left[J_1 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \sin nT \right. \\ &\quad \left. + N_1 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \cos nT \right] \\ Y_1 &= - \left[\frac{B}{IA} J_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) - J_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \sin nT \\ &\quad - \left[\frac{B}{IA} N_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) - N_0 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right] \\ &\quad \cdot \cos nT \\ P_1 &= \frac{B}{IA} \left[J_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \sin nT + N_2 \left(\frac{2n}{\sqrt{T}} \sqrt{A} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos nT \right] \dots \dots \dots (4-15) \end{aligned}$$

が解である。

つぎに、 η に対する初期値問題を解こう。式 (4-11) を新変数

$$S = \sqrt{A}, \quad \tau = \frac{\sqrt{I}}{2} T \quad \dots\dots\dots (4-16)$$

によって書きなおすと、

$$\eta_{\tau\tau} = \eta_{ss} + \frac{1}{s} \eta_s \quad \dots\dots\dots (4-17)$$

をうる。 η の初期条件が

$$\eta = \eta(s, 0), \quad \eta_\tau = \eta_\tau(s, 0) \quad \dots\dots\dots (4-18)$$

のように与えられているとする。式 (4-17) を τ について Laplace 変換すると

$$\xi_{ss}(s, q) + \frac{1}{s} \xi_s(s, q) = q^2 \xi(s, q) - q \eta(s, 0) - \eta_\tau(s, 0) \quad \dots\dots\dots (4-19)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \xi(s, q) &= \int_0^\infty \eta(s, \tau) e^{-q\tau} d\tau \\ \eta(s, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi(s, q) e^{q\tau} dq \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4-20)$$

である。

式 (4-19) の両辺に $sJ_0(sm)$ をかけて、 s について $0 \sim \infty$ の範囲で積分する。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty s \left[\xi_{ss}(s, q) + \frac{1}{s} \xi_s(s, q) + m^2 \xi(s, q) \right] J_0(sm) ds \\ & - \int_0^\infty m^2 s \xi(s, q) J_0(sm) ds \\ & = \int_0^\infty q^2 s \xi(s, q) J_0(sm) ds \\ & - \int_0^\infty s J_0(sm) [q \eta(s, 0) + \eta_\tau(s, 0)] ds \quad \dots\dots\dots (4-21) \end{aligned}$$

左辺第1項は $u=sm$ とかくと、

$$u [\xi_u(u, q) J_0(u) + \xi(u, q) J_1(u)] \Big|_0^\infty = C(q) \quad \dots\dots\dots (4-22)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} r(m, q) &= \int_0^\infty s \xi(s, q) J_0(sm) ds \\ \alpha(m, 0) &= \int_0^\infty s \eta(s, 0) J_0(sm) ds \\ \beta(m, 0) &= \int_0^\infty s \eta_\tau(s, 0) J_0(sm) ds \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4-23)$$

と定義する。Hankel 逆変換により、

$$\left. \begin{aligned} \xi(s, q) &= \int_0^\infty m r(m, q) J_0(ms) dm \\ \eta(s, 0) &= \int_0^\infty m \alpha(m, 0) J_0(ms) dm \\ \eta_\tau(s, 0) &= \int_0^\infty m \beta(m, 0) J_0(ms) dm \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4-24)$$

である。式 (4-21) は

$$r(m, q) = \frac{1}{m^2 + q^2} [q \alpha(m, 0) + \beta(m, 0) + c(q)]$$

$$\dots\dots\dots (4-25)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \xi(s, q) &= \int_0^\infty \frac{m \cdot J_0(ms)}{m^2 + q^2} \cdot [q \cdot \alpha(m, 0) \\ & + \beta(m, 0)] dm + c(q) \int_0^\infty \frac{m \cdot J_0(ms)}{m^2 + q^2} dm \\ & = \int_0^\infty \frac{m \cdot J_0(ms)}{m^2 + q^2} \cdot [q \cdot \alpha(m, 0) \\ & + \beta(m, 0)] dm + c(q) K_0(sq) \quad \dots\dots\dots (4-26) \end{aligned}$$

ここで K_0 は変形 Bessel 関数である。式 (4-20) から

$$\begin{aligned} \eta(s, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi(s, q) e^{q\tau} dq \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{q\tau} dq \left[\int_0^\infty \frac{m J_0(ms)}{m^2 + q^2} \right. \\ & \quad \left. \{q \alpha(m, 0) + \beta(m, 0)\} dm \right] \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c(q) \cdot K_0(sq) e^{q\tau} dq \\ & = \int_0^\infty [m \alpha(m, 0) \cos m \tau \\ & + \beta(m, 0) \sin m \tau] J_0(ms) dm \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c(q) \cdot K_0(sq) e^{q\tau} dq \quad \dots\dots\dots (4-27) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \cos m \tau &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{q e^{q\tau}}{q^2 + m^2} dq, \\ \sin m \tau &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{m}{q + m} e^{q\tau} dq \end{aligned}$$

という関係をつかっている。いま第2項について考えてみる。もし $c(q)$ が定数であるとしたら、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} K_0(q) e^{q\tau} dq &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \quad \tau > 1 \\ &= 0 \quad \tau < 1 \end{aligned}$$

となって、 η に不連続が生じ、しかも η が無限大になることがわかる。このようなことがおこらないための一つの条件として $c(q) = 0$ が考えられる。式 (4-22) から、

$$\begin{aligned} u [\xi_u(u, q) J_0(u) + \xi(u, q) J_1(u)] \Big|_0^\infty \\ &= [s \xi_s(s, q) J_0(ms) + m s \xi(s, q) J_1(ms)] \Big|_0^\infty \\ &= \int_0^\infty [s \eta_s(s, \tau) J_0(ms) + m s \eta(s, \tau) J_1(ms)] e^{-q\tau} d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} [s \eta_s(s, \tau) J_0(ms) + m s \eta(s, \tau) J_1(ms)] \Big|_0^\infty &= 0 \\ \dots\dots\dots (4-28) \end{aligned}$$

が一つの条件として与えられる。通常考えられる波形は $s \rightarrow \infty$ となるにつれて $\eta = 0$ になっているであろう。 η_s が $1/\sqrt{s}$ よりも早く0に近づく形をしていれたい。このとき $s=0$ のところで、

$$\left. \begin{aligned} s \eta_s(s, p) &= 0 \\ s \eta(s, p) J_1(ms) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-29)$$

が満たされればよい。結局、 $s=0$ のところで、

$$s \eta_s(s, p) = 2A\eta_A = 0 \dots\dots\dots(4-30)$$

が満たされればよい。Carrier-Greenspan の与えた条件は $\eta_A=0$ であったが、式(4-30)はそれよりは少し緩やかなものである。式(4-30)の条件下で式(4-27)をかきなおすと、

$$\begin{aligned} \eta(s, \tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty [m \eta(r, 0) \cos m\tau \\ &\quad + \eta_\tau(r, 0) \sin \tau] r J_0(rm) J_0(sm) dr dm \\ &\dots\dots\dots(4-30) \end{aligned}$$

が初期値問題の解を与える。

つぎに境界値問題を考えよう。 $s=r$ の場所、

$$\eta = g(\tau) \dots\dots\dots(4-31)$$

という運動をする場合をとりあげる。式(4-17)を τ について Fourier 変換する。

$$F(s, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(s, \tau) e^{i u \tau} d\tau$$

とすると、式(4-17)は

$$F_{ss}(s, u) + \frac{1}{s} F(s, u) = -u^2 F(s, u) \dots\dots(4-32)$$

となり、

$$F(s, u) = A(u) Z_0(u, s) \dots\dots\dots(4-33)$$

が解である。式(4-31)の Fourier 変換を

$$G(r, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{i u \tau} d\tau \dots\dots\dots(4-34)$$

とすると、式(4-33)の $A(u)$ をきめることができ、結局、

$$F(s, u) = G(r, u) \cdot \frac{Z_0(su)}{Z_0(ru)} \dots\dots\dots(4-35)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \eta(s, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0(su)}{Z_0(ru)} G(r, u) e^{-i u \tau} du \dots\dots \\ &\dots\dots\dots(4-36) \end{aligned}$$

が解である。

5. 実験値との比較

実験に際しては、時間的に有限な正弦波形を与えることが多いので、 $g(\tau)$ としてつぎのものを考えよう。

$$\left. \begin{aligned} g(\tau) &= 0 & \tau \leq 0 \\ &= \sin n\sigma\tau & 0 \leq \tau \leq T = \frac{2\pi}{n\sigma} \\ &= 0 & T \leq \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots(5-1)$$

$$\begin{aligned} G(r, u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{i u \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi/n\sigma} \sin n\sigma\tau \cdot e^{i u \tau} d\tau \\ &= \frac{n\sigma}{u^2 - n^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{i 2\pi/n\sigma} - 1] \dots\dots(5-2) \end{aligned}$$

反射率1.0のときを考えると、

$$\begin{aligned} \eta(s, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(su)}{J_0(ru)} G(r, u) e^{-i u \tau} du \\ &= \frac{J_0(n\sigma s)}{J_0(n\sigma r)} \cdot [\sin n\sigma\tau - \sin(n\sigma\tau - 2\pi)] \\ &\quad - 2 \sum_{\alpha_m} \frac{n\sigma r}{(\alpha_m^2 - n^2\sigma^2 r^2)} \cdot \frac{J_0\left(\frac{\alpha_m s}{r}\right)}{J_1(\alpha_m)} \\ &\quad \left[\sin \frac{\alpha_m}{r} \tau - \sin \frac{\alpha_m}{r} \left(\tau - \frac{2\pi}{n\sigma} \right) \right] \dots\dots(5-3) \end{aligned}$$

をうる。ただし、 α_m は $J_0(x)=0$ に対応する x の値である。右辺第1項は強制振動による項で、このうち 2π だけおくれた項は $\sin n\sigma\tau$ が1周期だけくり返されたあとで消えてしまうために加わった項である。 s 地点の強制振動による運動は、 r 地点の波形を $J_0(n\sigma s)/J_0(n\sigma r)$ 倍したものに相当する。第2項は自由振動に相当するが、もしこのような振動がおこっていたにしても、 r 地点の記録からは、しることができない。なぜなら、 $s=r$ のとき $J_0(\alpha_m)=0$ であるから、第2項は消えてしまうのである。強制振動による振幅を A_F 、自由振動の振幅を A_L とすると、表-1 のような関係がある。こ

表-1

条 件		A_F/A_L
$s < r$	$s\sigma \ll 1$ $r\sigma \ll 1$ $\alpha_m \gg r\sigma$ $\frac{s}{r} \alpha_m \gg s\sigma$	$> 0.62 \frac{\alpha_m}{r\sigma} \gg 1$
	$s\sigma \gg 1$ $r\sigma \gg 1$	$> \frac{1}{2} \frac{(r\sigma)^{3/2}}{\sqrt{\alpha_m}} \gg 1$
$s \ll r$	$s\sigma \gg \alpha_m$ $\frac{s}{r} \alpha_m \ll s\sigma \ll 1$	$> \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\alpha_m}}{\sqrt{r\sigma}} \alpha_m \gg 1$
	$r\sigma \gg \alpha_m$ $\frac{s}{r} \alpha_m \ll s\sigma$	$> 0.4 \sqrt{\frac{r}{s}} \cdot \frac{r\sigma}{\sqrt{\alpha_m}} \gg 1$
$s \gg 1$ $r\sigma \gg 1$	$r\sigma \gg \alpha_m$ $\frac{s}{r} \alpha_m \ll s\sigma$	$> 0.4 \sqrt{\frac{r}{s}} \cdot \frac{r\sigma}{\sqrt{\alpha_m}} \gg 1$
	$r\sigma \ll \alpha_m$ $\frac{s}{r} \alpha_m \gg s\sigma \gg 1$	$> \frac{1}{2} \frac{\alpha_m^2}{r\sigma} \gg 1$

こでは、基本となる $n=1$ の場合について考えている。 $\sigma r = \alpha_m$ のときには、両項とも振幅が無限大になるけれども、位相は第2項の方が $\pi/2$ 遅れることになる。以上のことから、もし σr が1.0にくらべて小さければ、汀線から陸岸への波のはいあがりの大勢は、ほとんど強制振動に対応する項によってきめられる。

このことは実験値によっても明らかにされる。実験波形は昨年度の報告にあったとおり、正弦波が半周期続くもの、峯が1/8周期のところにあるようにひずんだものの二通りである。このように半周期間振動がつづく場合について解くと、式(5-3)はほとんど同じで、ただ、 $\sin(n\sigma\tau - 2\pi)$ の代りに $\sin(n\sigma\tau - \pi)$ 、 $\sin \alpha_m/r(\tau - 2\pi/n\sigma)$ の代りに $\sin \alpha_m/r(\tau - \pi/n\sigma)$ が表われる。強制振

動が卓越する場合、峯が一つであれば、立上りから峯までの時間が $1/4$ 周期であると考えた方がよい。このように考えて、峯の位置が前にずれたものに対しては周期のとり方をかえることとする。 r 地点の波形の最大値を H' 、うちあげ高の最大値を R とすると、

$$R = \frac{H'}{J_0(\sigma r)} \quad \text{.....(5-4)}$$

となる。 r は記録をとった場所に対応するもので、 $r = \sqrt{A_r}$ 、これを次元をもつ量で書きなおすと、 $r = \sqrt{a_r l}$ 、である。 σr は式 (4-16) を考えると $\sigma r = \sqrt{I/2} \sigma \cdot T$ 、これを次元をもった量にすると $\sigma r = \sigma/2 \cdot \sqrt{il/d} \cdot \sqrt{gd} t/l =$

図-4 式 (5-4) による計算値と実験値との比較

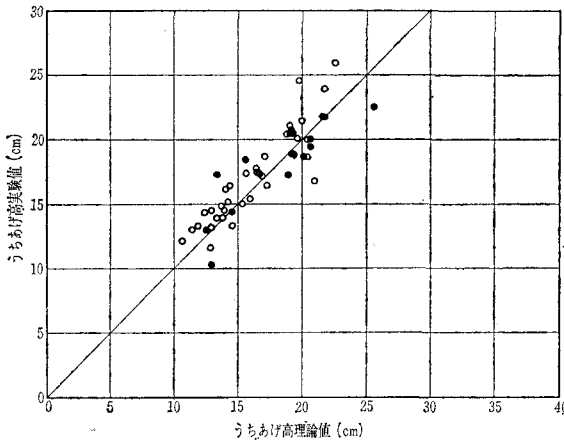


図-5 $H'/A \sim U$

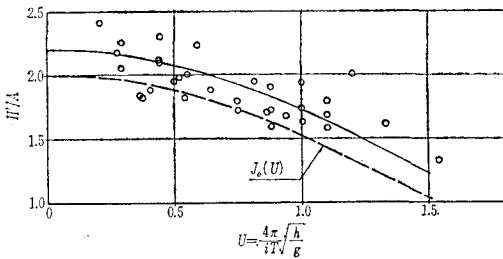
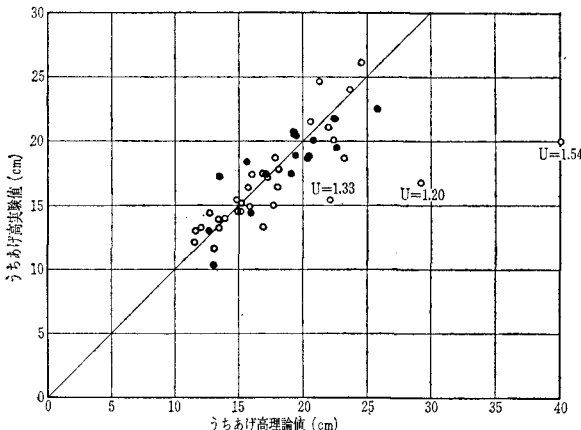


図-6 式 (5-9) の修正を行なったのちの計算値と実験値との比較



$\sigma/2 \cdot \sqrt{g/l} \cdot \sqrt{t} = 2\pi/T_0$ である。ただし T_0 は 1 周期である。したがって、

$$\sigma r = \frac{4\pi}{i T_0} \sqrt{\frac{h}{g}} = U \quad \text{.....(5-5)}$$

h は記録をとったところの水深に対応する。表-2 は、立上りから峯までの時間が $T_0/4$ であると考えて H' より式 (5-4) によって R を計算したものと実験値をくらべたもので、その結果は 図-4 のとおりである。表-2 のなかで H' に括弧のついているものは、 H' の測定値がないときに一定水深の場所での進行波としての波高からつぎのような方法で H' を推定して求めたものである。

H' が欠測しているのは、幸いにして周期のかなり長いものであった。 H' は、ほぼ $2A$ (A は入射してくる波の半波高) 程度になるのであろうと思われる。 $H'/2A$ と $U = 4\pi/i T_0 \cdot \sqrt{h/g}$ の関係を調べると 図-5 のとおりとなる。図中破線は $J_0(U)$ の曲線である。点のバラツキの傾向は $J_0(U)$ に似ており、それより若干大きめであるから、大体実線のようなものが平均的曲線であろう。この関係から H' を推定して求めた。図-4, 6 中の黒点はこのような推定値からのうちあげ高計算値を示す。

ところで式 (5-3) で自由振動を無視すると、 H' と R の関係は式 (4-14) から与えられるものとまったく同じになる。したがって表面にある水粒子の動きは、 $U = 4\pi/i T_0 \cdot \sqrt{b/g}$ とかくと、

$$\eta/x_1 = -\frac{iJ_0(U)}{2/UJ_1(U)} \quad \text{.....(5-6)}$$

のような直線運動をする。水深 h_1 のところの記録の最大値は h_1 より深い水深 h_2 の場所にあった水粒子によって与えられる。 h_2 の場所までの距離 L_2 、 h_1 までの距離 L_1 とすると、 h_2 にあった水粒子の水平方向変位の最大値 x_{12} との間には、

$$L_2 - L_1 = -x_{12} = \frac{2a}{iU_2} J_1(U_2)$$

が成立する。 a は波高に関する定数である。これから $iL_2 = h_2$ 、 $iL_1 = h_1$ であることにより、

$$h_2 - h_1 = a \frac{2}{U_2} J_1(U_2) \quad \text{.....(5-7)}$$

h_1 でとられた最高水位 H' は

$$H' = aJ_0(U_2) \quad \text{.....(5-8)}$$

であるから

$$h_2 - h_1 = \frac{2J_1(U_2)}{U_2 J_0(U_2)} H' \quad \text{.....(5-9)}$$

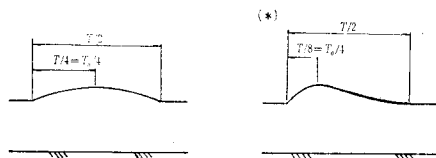
h_1 、 H' は与えられているから、式 (5-9) から h_2 を求め、うちあげ高を求めるための式 (5-4) においては h_2 を用いる。

この結果が 図-6 である。図中、非常にかけはなれた 3 点の傍に書いてある数字は U_1 の値である。

表-2

番号	水深	T/2	A	U ₁	H'	J ₀ (U ₁)	うちあげ高			H'/A
							実験値	(5-4)	(5-9)による修正後	
18	cm	sec	cm	0.274	cm	0.98	13.9	13.3	13.4	2.18
19	30	120	6.0	0.206	13.0	0.99	11.6	12.8	13.0	2.42
85*	30	40	7.5	1.54	10.0	0.49	20.0	20.4	40.0	1.33
86*	30	60	10.3	1.10	16.3	0.72	26.0	22.6	24.4	1.58
65*	30	75	10.0	0.88	15.9	0.81	20.1	19.6	22.4	1.59
61*	30	70	9.0	0.94	15.0	0.79	21.1	19.0	22.0	1.67
67*	30	75	8.7	0.88	16.5	0.81	18.7	20.4	23.2	1.90
92*	30	80	9.0	0.82	17.5	0.80	24.0	21.8	23.6	1.94
59*	30	60	6.7	1.10	11.0	0.72	15.0	15.3	17.7	1.64
64*	30	75	7.0	0.88	11.6	0.81	16.4	14.3	15.7	1.66
88*	30	60	5.6	1.10	10.0	0.72	14.5	13.9	15.1	1.79
72*	30	160	8.2	0.41	15.0	0.96	17.4	15.6	16.0	1.88
93*	30	120	6.0	0.55	12.0	0.93	13.2	12.9	13.4	2.00
71*	30	180	8.7	0.366	16.0	0.97	17.5	16.5	16.9	1.84
41*	25	50	7.0	1.20	14.0	0.67	16.8	20.9	29.2	2.00
37*	25	60	6.0	1.00	9.8	0.76	14.5	12.9	14.9	1.63
38*	25	45	5.9	1.33	9.5	0.60	15.4	15.9	22.1	1.61
39*	25	60	6.0	1.00	10.4	0.76	14.9	13.7	15.8	1.73
44*	25	80	7.9	0.75	14.1	0.86	17.8	16.4	18.1	1.79
47*	25	60	5.7	1.00	11.0	0.76	13.3	14.5	16.9	1.93
50*	25	80	7.0	0.75	12.0	0.86	15.2	14.0	15.2	1.72
48*	25	100	7.5	0.60	12.9	0.91	15.5	14.2	14.8	1.72
43*	25	70	5.1	0.86	8.7	0.82	12.1	10.6	11.5	1.71
53*	25	160	8.8	0.376	16.0	0.96	17.5	16.7	17.0	1.82
49*	25	115	8.1	0.52	16.0	0.93	16.5	17.2	18.0	1.98
54*	25	120	5.7	0.50	11.1	0.94	13.3	11.8	12.2	1.95
75	35	55	9.6	0.645	18.0	0.91	24.6	19.8	21.2	1.88
77	35	60	7.0	0.59	15.6	0.92	18.7	17.0	17.8	2.23
81	35	80	9.0	0.444	19.0	0.95	21.5	20.0	20.6	2.11
76	35	65	6.3	0.546	11.5	0.93	14.4	12.4	12.7	1.82
80	35	80	7.6	0.444	16.0	0.95	17.2	16.9	17.2	2.10
83	35	120	9.0	0.296	18.5	0.98	20.5	18.8	19.2	2.05
79	35	80	4.7	0.444	10.8	0.95	13.0	11.4	11.6	2.30
82	35	120	6.0	0.296	13.5	0.98	14.0	13.8	13.9	2.26
14	30	120	8.5	0.274	(18.5)	0.98	17.3	18.9	19.1	
21	30	120	7.1	0.274	(15.4)	0.98	14.4	15.7	15.9	
11	30	110	6.0	0.300	(13.0)	0.98	17.3	13.3	13.5	
15	30	160	8.6	0.205	(18.9)	0.99	20.6	19.1	19.2	
16	30	160	7.0	0.205	(15.4)	0.99	18.4	15.5	15.6	
94*	30	120	9.3	0.55	(19.1)	0.93	19.5	20.6	22.6	
96*	30	180	8.6	0.366	(18.4)	0.96	18.9	19.2	19.4	
69*	30	120	8.7	0.55	(17.9)	0.93	18.9	19.4	20.4	
95*	30	180	5.6	0.366	(12.0)	0.96	13.0	12.5	12.6	
58*	25	150	9.8	0.400	(20.8)	0.96	21.8	21.6	22.4	
57*	25	150	9.8	0.400	(20.8)	0.96	21.8	21.6	22.4	
56*	25	180	5.8	0.33	(12.5)	0.97	10.3	12.9	13.0	
23	25	140	11.5	0.214	(25.2)	0.985	22.5	25.6	25.8	
22	25	120	9.0	0.25	(19.6)	0.98	18.7	20.0	20.3	
26	25	120	8.6	0.25	(18.7)	0.98	20.8	19.1	19.3	
27	25	120	8.7	0.25	(19.0)	0.98	20.5	19.3	19.5	
84	35	160	9.3	0.22	(20.3)	0.985	20.1	20.6	20.8	

実験波波形



実験の場合には、斜面は途中で折れて一様水深の水路につながっており、この折れ曲り点において波形記録をおさえている。式(5-9)で与えられる h_2 は実際は存在しない。実際の現象を支配する h は記録をとった場所の水深 h_1 と、式(5-9)により求められる h_2 の中間にあるであろう。

ここでは、 $0.20 \leq U_1 \leq 1.5$ の範囲で記録がとれていれば、うちあげ高の推定が、式(5-4)をつかってかなりの程度説明できることがわかった。さらに、 $U_1 \leq 1.0$ の範囲では式(5-9)の修正をおこなえばよい。

6. 結 論

ラグランジュ型の長波に対する第1近似の式は、一様傾斜斜面上において、境界の条件を容易に満足せしめうることがわかった。うちあげ高の最大位置は、静水時に $a=0, b=0$ にあった水粒子によって実現される。

実験波形と似た形の波を与えてとくと、水深 h_1 のところの記録の最高水位 H' と、最大うちあげ高 R との間には

$$R = \frac{H'}{J_0(U_2)}, \quad U_2 = \frac{4\pi}{iT} \sqrt{\frac{h_2}{g}},$$

$$h_2 - h_1 = \frac{2J_1(U_2)}{U_2 J_0(U_2)} H'$$

の関係があることがわかった。 $U_1 \leq 1.0$ の範囲では U_1 をつかっても U_2 をつかって大体同じ R をうるが、どちらかといえば U_2 をつかった方がよい。 $U_1 > 1.0$ になると U_2 をつかった値は大きくなりすぎる。

これは実験においては一様な傾斜が無限に続くことなく、途中から水平底に変わっていることの影響であるとおもわれる。全体としてみれば $U_1 \leq 1.5$ 位の範囲で U_1 をつかって計算すれば、十分であろう。また、進行波としての波高しかわからなかったときには、図一5の曲線を併用すれば良い結果をうるができる。

資料を提供された建設省土木研究所鹿島水理試験所特に松村圭二技官に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Carrier, G.F. & Greenspan, H.P.: Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J.F.M. 1958.
- 2) Greenspan, H.P.: On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach, J.F.M. 1958.
- 3) 首藤伸夫・松村圭二: 長波について、——一様傾斜斜面上へのうちあげ高——, 第12回海岸工学講演会講演集, 1965.