

漂砂の移動限界流速および限界水深に関する再考

榎 木 亨*

1. 緒 言

波による底質の移動に関して石原・榎木¹⁾は以前に移動限界時の加速度の影響について論議し、非定常運動下の底質の移動限界が掃流力の無次元表示とレイノルズ数 $u_* d/\nu$ との関係によって表わされることを実験的に明らかにした。さらに砂粒子に作用する力の平衡状態から理論的に砂の移動限界を求めるに当って、浅海波理論による底部流速（境界層外部流速）が最大るとき砂が動き出すものとして考察を進めている。また移動限界水深を求めるに当っては摩擦速度と底部流速の最大流速との関係を用いて実験結果より明らかにした。このような考え方は、さらに佐藤・田中²⁾の両氏によっても用いられ、限界水深を従来の研究結果も含めて巧みな整理方法でとりまとめている。

しかしながら、砂粒に働く流速として、境界層内部の流速を考慮して論議する場合、必ずしも浅海波理論による底部流速が最大ときに砂が動き出すものとは限らないことは、その後の野田・井保両氏の研究³⁾によっても指摘されているが、本論文では、この移動のはじまる位相について検討を加え、その位相を考慮した限界流速を求め、さらにその結果より導き出される限界水深について、従来の研究結果と比較したものである。

2. 限界流速について

砂の移動時の平衡状態において、前述の石原・榎木¹⁾の論文において明らかにしたように、初期移動を生じるような浅水比（Shallowness）の大きい場合では、一般に加速度による力を無視することができる。また野田・井保の研究結果³⁾によると揚力 R_L も無視してさしつかえないことが明らかにされているので、砂の移動時の平衡条件式は次式で与えられる。

$$\left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d^3 \cdot \frac{\pi}{6} \tan \varphi \right\} = \frac{\varepsilon \pi}{8} c_{Du} \cdot u_d^2 \cdot d^3 \cdots (1)$$

ここに u_d は砂粒頂部に働く流速で、層流境界層を仮定すると、

$$u_d = u_0 \{ \sin(\omega t) - e^{-\beta d} \cdot \sin(\omega t - \beta d) \} \cdots (2)$$

で与えられる⁴⁾。

式 (1), (2) 中の d は粒径 σ, ρ は砂および水の密度、

φ は砂の摩擦角、 ε は砂粒相互のしやへい効果を考慮したしやへい係数、 c_{Du} は非定常流中の抵抗係数であり、 u_0, β, ω は次式で与えられるものである。

$$u_0 = \omega A = (2\pi/T) \left\{ \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\sinh 2\pi h/L} \right\} \cdots (3)$$

(底部最大流速)

$$\beta = (\omega/2\nu)^{1/2}, \quad \omega = 2\pi/T$$

式 (3) 中の H は水深 h における波高、 L は波長、 ν は動粘性係数である。

浅海波理論による底部流速 u_b は、

$$u_b = u_0 \sin(\omega t) \cdots (4)$$

で表わされる。

以前の著者らの理論的考察においては、式 (4) で示される底部流速が最大ときに砂が動き出すものとして、 $u_b = u_0$ 、すなわち $\omega t = \pi/2$ のときの考察を行ない、式 (2) で表わされる u_d を、

$$u_d = u_0 [1 - e^{-\beta d} \cos(\beta d)] \cdots (5)$$

として、砂が動きはじめる u_0 を u_{0c} で表わして、

$$\left\{ \frac{u_{0c}^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d \tan \varphi} \right\} = \frac{4}{3\varepsilon} \cdot \frac{1}{c_{Du}} \times [1 - e^{-\beta d} \cos(\beta d)]^{-2} \cdots (6)$$

という関係を求めた。

式 (6) 中の c_{Du} は前述の石原・榎木の論文において明らかにしたように、レイノルズ数 $u_d \cdot d/\nu$ の変化により $c_{Du}/c_{Ds} = 1.3 \sim 1.8$ (c_{Ds} : 定常流における抵抗係数) という値を示すが、いま簡単にその平均値として、

$$\frac{c_{Du}}{c_{Ds}} = 1.6, \quad c_{Ds} = \frac{10}{\left(\frac{u_d \cdot d}{\nu} \right)^{0.5}} \cdots (7)$$

という値を採用し、 $\varepsilon = 0.35$ という値を用いると、式 (6) は、

$$\frac{u_{0c}^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d \tan \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u_{0c} \cdot d}{\nu}}} = \frac{1}{4.2} \times [1 - e^{\beta d} \cos(\beta d)]^{-3/2} \cdots (8)$$

ただし、

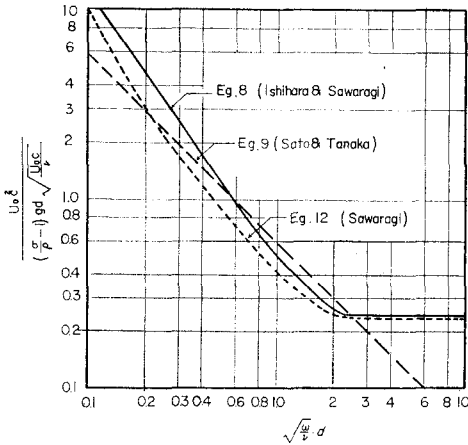
$$\beta = 0.706 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

となる。 $\tan \varphi \neq 1$ として式 (8) の関係をえがいたのが図一の実線である。

図一に実験値をとりまとめてえられた佐藤・田中の

* 正会員 工博 大阪大学助教授 土木工学科

図-1 限界流速の無次元表示



実験曲線,

$$\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \sqrt{\frac{u_{0c}^2}{\nu}} = \frac{0.6}{\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d} \quad \dots\dots\dots (9)$$

を破線で示しておく。

この図から $\omega t = \pi/2$ の場合に砂が動く と仮定して求めた (8) 式で示される実線が $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の小さい場合に実験値より大きな値を示すことがわかるであろう。

そこであらためて砂粒頂部に働く流速 u_d が最大となるときの $\omega t = \alpha$ について検討を加えてみることにしよう。

式 (2) において $u_0 = \omega A$ が一定の場合の u_d が最大を示す場合は,

$$y = \sin(\omega t) - e^{-\beta d} \sin(\omega t - \beta d) \quad \dots\dots\dots (10)$$

が最大となるときであるから,

$$y = \sin(\omega t) [1 - e^{-\beta d} \cos \beta d] + \cos(\omega t) e^{-\beta d} \sin \beta d$$

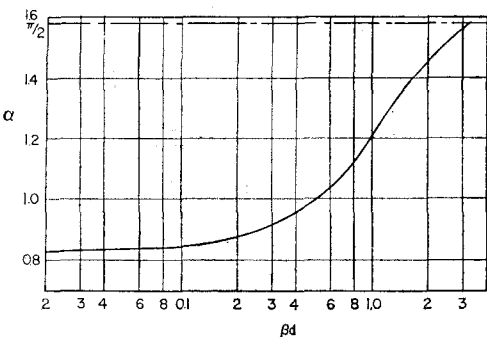
と変形して $dy/d(\omega t) = 0$ という条件から,

$$\tan \alpha = \frac{1 - e^{-\beta d} \cos \beta d}{e^{-\beta d} \sin \beta d} \quad \dots\dots\dots (11)$$

が求められる。ここに α は u_d が最大となるときの ωt の値である。式 (11) より α と βd の関係を求めたのが 図-2 である。

図-2 において示されるように、 $\alpha = \pi/2$ に近づくの

図-2 α と βd の関係



は、 βd が 3 以上の極めて大きい場合である。自然海岸においては、 $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d = 0.1 \sim 1.0$ という値をとることが予想されるから、 βd は $0.0706 \sim 0.706$ という値となり、この場合 α は $\pi/2$ にくらべて相当に小さい値をとることになる。したがって浅海波理論における底部流速の最大の場合に砂が移動するものとは考えられない。ただし模型実験において周期 1 秒以下で底質粒径が 1 mm 以上の場合には βd は 3 に近くなり $\alpha = \pi/2$ と考えてさしつかえない場合が多くなってくる。以上の事柄はまた移動床の模型実験の相似性を考慮する場合にも重要な事項となるであろう。

この u_d が最大値を示す ωt の値を式 (2) に代入し、式 (6) に対応する限界流速を示す式を導くと式 (12) のようになる。

$$\frac{u_{0c}^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right) g d \tan \varphi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u_{0c} \cdot d}{\nu}}} = \frac{4}{3 \varepsilon} \cdot \frac{1}{K} \times [\sin \alpha - e^{-\beta d} \sin(\alpha - \beta d)]^{-3/2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに α は式 (11) で与えられる値であり、 K は定数で,

$$c_{Du} = \frac{K}{\left(\frac{u_d \cdot d}{\nu}\right)^{0.5}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる。前述したように K はレイノルズ数により、13~18 と変化する。

式 (12) において、式 (7) と同様に $\varepsilon = 0.35$ 、 $K = 16$ という値を用いて計算すると、図-1 の点線で示すような曲線がえがかれる。この式 (12) の計算結果は、実験結果を示す破線と比較すると、 $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が小さいところでは大きく、 $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が比較的大きいところでは小さく表われている。

これは式 (13) において $K = 16$ という一定値をとったためで、波高 H および h/L が一定の場合、レイノルズ数 $\frac{u_d \cdot d}{\nu}$ は $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が大きくなれば、大きくなって c_{Du}/c_{Ds} は 1.3 すなわち K は 13 に近ずき $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が小さくなるとレイノルズ数は小さくなって K は 18 に近づく¹⁾。以上の K のレイノルズ数による変化を考慮すると、 $K = 16$ として計算した結果は実験結果の破線にさらに近づくことが推定される。

なお式 (12) によると $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が 2 より大きくなると式 (12) の左辺は 0.238 という一定値となり、限界流速は式 (14) で表われる。

$$u_{0c}^3 = \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1\right)^2 \frac{g^2}{\nu} \times (0.238)^2 \cdot d^3 \quad \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) は σ, ρ, g, ν が一定である場合、限界流速が粒径によって一義的に決定されることを示している。しかしながら $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が 2 より大きい場合は粒径がきわめ

て大きな場合で、境界層中に砂粒が入っているとしたこの取扱い方法が適用できるかどうかは今後に残された問題といえよう。

3. 漂砂の移動限界水深について

以前に石原・榎木は限界摩擦速度に関する実験式と、限界摩擦速度と浅海波理論による底部流速の最大値 u_0 との関係式を用いて、砂の移動に関する限界水深を求めた。

また佐藤、田中²⁾は(9)式で示される実験式より、限界水深を整理し、石原・榎木の提示した限界水深¹⁾および佐藤・岸³⁾の与えた限界水深を含くめた式(15)の型をもった関係式を求めた。

$$\frac{H_0}{L_0} = \alpha \left(\frac{d}{L_0} \right)^n \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right) \left(\frac{H_0}{H} \right)^{-1} \dots \dots \dots (15)$$

ここに α, n は係数, h_i は移動限界水深, 添字 0 は沖波の特性を示す。

本項においては移動しはじめる $\omega t = \alpha$ を考慮した限界流速式より導き出される限界水深を式(15)の型に変形して、式(15)の型で示される従来の限界水深と比較することとしよう。

式(12)の右辺を X とし, $\varepsilon = 0.35$, $K = 16$ とすると, α は βd すなわち, $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ によってのみ与えられるものであるから, X は $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の関数で表わされる。

式(12)の左辺において $\tan \phi \div 1$,

$$u_{0c} = \frac{\pi H}{T} \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-1}$$

を代入すると、式(12)の左辺はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{u_{0c}^{3/2}}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cdot d^{3/2}} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2\pi}{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right)} \\ &\times \left(\frac{H}{L_0} \right)^{3/2} \cdot \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-3/2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d \right)^{-1} \cdot \left(\frac{d}{L_0} \right)^{-1/2} \\ &= X \end{aligned}$$

$\sigma/\rho = 2.65$ とすると上式は、

$$\begin{aligned} X &= 1.345 \left(\frac{H_0}{L_0} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{H}{H_0} \right)^{3/2} \cdot \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-3/2} \\ &\times \left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d \right)^{-1} \cdot \left(\frac{d}{L_0} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{H_0}{L_0} &= 0.82 X^{2/3} \cdot \left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d \right)^{2/3} \cdot \left(\frac{d}{L_0} \right)^{1/3} \\ &\times \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right) \left(\frac{H_0}{H} \right) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} X &= \frac{4}{3\varepsilon} \cdot \frac{1}{K} [\sin \alpha - e^{-\beta d} \sin(\alpha - \beta d)]^{-3/2} \\ &= f_n \left(\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d \right) \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

式(15)と式(16)とを比較すると、限界水深に関係してくる従来の項の他に $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の項が加わってくることに気付くであろう。式(16)より、

$$\left(\frac{H_0}{L_0} \right) \cdot \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{H_0}{H} \right)^{-1}$$

と d/L_0 の関係を $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ をパラメーターとして描くと図-3 のようになる。

図-3 各移動限界式の比較

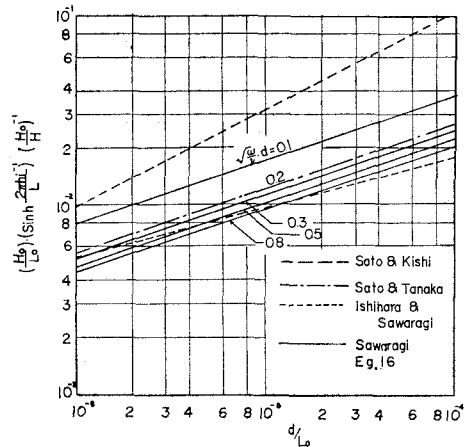


図-3 中に従来の式(15)で表わされる佐藤・岸の式、石原・榎木の式、佐藤・田中の式も描いておく。

この図からわかるように、従来の限界水深はいずれも $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ のある場合の限界水深を表わしておいたものと考えられる。なおこの限界水深におよぼす $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の影響は、 $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ がある一定値までは、同じ d/L_0 に対しては $\left(\frac{H_0}{L_0} \right) \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{H_0}{H} \right)^{-1}$ の値は小さくなり、その一定値をこえてさらに $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ が大きくなると、 $\left(\frac{H_0}{L_0} \right) \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{H_0}{H} \right)^{-1}$ の値は逆に大きくなっていく。

図-4 限界水深におよぼす $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の影響

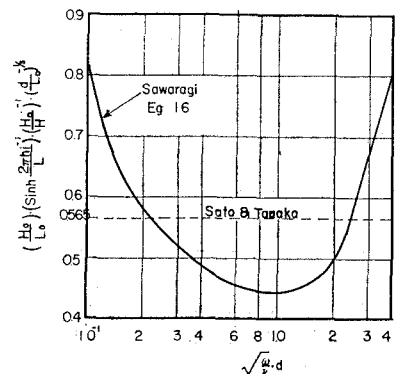


図-4 はこの限界水深におよぼす $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の影響を明らかにするため、縦軸に、

$$\left(\frac{H_0}{L_0}\right) \left(\sinh \frac{2\pi h_i}{L}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{H_0}{H}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{d}{L_0}\right)^{-1/3}$$

をとり横軸に $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の関係を求めたものである。なお図-4 中の点線は佐藤・田中の限界水深をあらわすものである。この図より $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ がほぼ 1.0 より大きい部分は縦軸の値が $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の増加にともなって大きくなっていく。この領域は図-1 の $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ にかかわらず、

$$\frac{u_{oc}^2}{\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)gd} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u_{oc}d}{\nu}}}$$

が一定となる領域であって、先に論議したように実際の海岸に適用する場合にはきわめて疑問の残る領域といえる。

4. 結 語

以上漂砂の運動機構の解析を行なうに当って、従来よりしばしば取扱われてきた限界流速、限界水深について

再検討し、限界流速については移動のはじまる位相 $\omega t = \alpha$ を考慮しなければならないことおよび限界水深については従来の結果にさらに $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \cdot d$ の項を考慮しなければならないことについて論じた。なお本文中においても論述したように、この結果は砂粒が層流境界層中に存在する場合の論義であって、砂粒が境界層中に出たような場合、あるいは乱流境界層の場合についてはなお今後に残された問題といえよう。

参 考 文 献

- 1) 石原藤次郎・榎木 亨：漂砂の移動限界流速、限界水深および移動量について、第7回海岸工学講演会講演集、1960, pp. 47-57.
- 2) 佐藤昭二・田中則男：水平床における波による砂移動について、第9回海岸工学講演会講演集、1962, pp. 95-100.
- 3) 野田英明・井保武寿：波による海底砂の移動限界と砂れんの発生、第11回海岸工学講演会講演集、1964, pp. 153-158.
- 4) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed. p. 620.
- 5) 佐藤清一・岸 力：漂砂に関する研究(7), 波動による海底剪断力と底質の移動, 建設省土木研究所報告, 第85号-6, 昭 27.