

クノイド波に関する二、三の実験

岩 垣 雄 一*・細 見 昌 彦**

1. 結 言

1895 年に Korteweg-de Vries¹⁾ によって発見されたクノイド波は、その歴史がかなり古いにもかかわらず、数学的な取扱いに Jacobi のだ円関数や、第1種および第2種のだ円積分を含むために、そのままではこの波の特性を知ることはむずかしく、われわれ技術者にとってはあまりなじみ深いものではない。しかし、いま水深を h 、波長を L 、平均静水面から波の峯までの高さを η とすれば、Stokes の有限振幅波の理論が適用できるのは、Keulegan²⁾ によれば、 $h/L \geq 1/10$ 、Laitone³⁾ によると $h/L \geq 1/8$ 、Wilson-Webb-Hendrickson⁴⁾ によれば $h/L > (\eta_0/L)^{1/3}$ の場合であって、水深がこれより浅いところでは Stokes の波の理論は適用できず、クノイド波の理論を用いなければならないといわれている。すなわち、沖波の波形勾配 H_0/L_0 が 0.04 より小さい波であれば、 h/L の値が 0.1 より小さく浅いところで砕波するので、砕波する以前に Stokes 波理論が適用できない部分が存在することになる⁵⁾。

したがって、この空間を埋める意味で、クノイド波の理論の結果をできるかぎり使い易いように変形し、また図表などによって容易に波の特性を求めることができるようにする必要がある。Wiegel⁶⁾ はこの目的のため、波高、水深、波長あるいは周期を与えて、クノイド波の波形および波速を求めるグラフを、また Masch-Wiegel⁷⁾ は table を作成しているが、理論結果として Keller⁸⁾、Keulegan-Patterson⁹⁾ および Korteweg-de Vries¹⁾ のものを用いているため、第1近似（波長についてはもう一つ order が低い）にもとづいて計算したことになり、また平均水深と、谷からの水深とが混同しているという欠点がある。

クノイド波の存在については Littman¹⁰⁾ が証明し、またクノイド波の第2近似解を初めて示したのは Laitone¹¹⁾ であって、その後 Chappellear¹²⁾ は Laitone が行なったのと同様な摂動法を用いて第3近似解を求めている。Laitone が水深として波の谷からの値を採用しているのに対して、Chappellear は平均水深をとっているため、工学的に利用するという点からは後者の方が都合

がよいが、一般的なグラフを作るのには Chappellear のものは計算が非常に面倒である。

そこで著者の一人である岩垣は、Laitone の理論解を採用し、まず波形勾配と水深・波高比とを与えて波形を求める図表を作成するとともに、第1近似解と第2近似解、さらに Stokes 波および孤立波のそれぞれの波形を比較して近似の程度を検討した⁵⁾。ついで、通常の波の計算に利用されるように、波の周期と水深および波高を与えて、クノイド波の波速や波長を求める図表を作成した¹³⁾。さらに著者らはクノイド波理論を適用しなければならないといわれている水深・波長比の小さい場合に対して実験を行ない、波形、波速、波長および波の谷から静水面までの高さを測定して、これまで求めてきた Laitone のクノイド波や、Skjelbreia¹⁴⁾ が求めた Stokes 波の 3rd order のもの、ならびに Airy の微小振幅波のものと、どの程度の適合性があるかを調べた¹⁵⁾。

この論文は、これまでの研究結果を総合し、それ以後に実施した実験の資料を追加して、Laitone のクノイド波理論の妥当性を検討しようとしたものである。

2. 理論解の図式化

いま図-1に示すように、 h_t を波の谷からの水深、 η を波の谷から水面までの距離、 δ を谷から平均水面までの距離、波高を H 、波長を L とし、 x 軸を波の谷を通して水平方向、 z 軸を鉛直上方にとる。また波の周期を T 、波速を c 、重力加速度を g とし、 k を

Jacobi のだ円関数の母数、 K および E をそれぞれ第1種および第2種のだ円積分、suffix 1 および 2 はそれぞれ第1および第2近似解を表わすものとする。

(1) 静水面の位置

波の谷から静水面までの高さ δ についての Laitone の理論解はつぎのようである。

$$\frac{\delta_1}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) \dots \dots \dots (1)$$

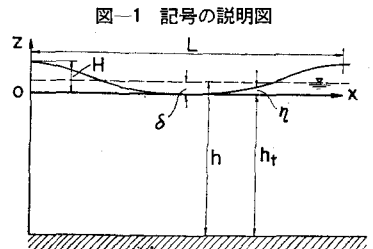


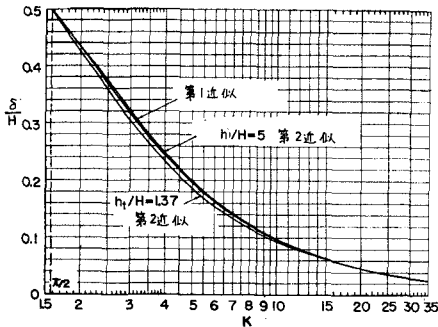
図-1 記号の説明図

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 大阪市水道局

$$\frac{\delta_2}{H} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{E}{K} + k^2 - 1 \right) + \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{12k^4} \times \left\{ 8 - 11k^2 + 3k^4 - (8 - 7k^2) \frac{E}{K} \right\} \dots (2)$$

K および E はいずれも k の関数であるから、第1近似 δ_1/H は K のみの関数、第2近似 δ_2/H は K および h/H の関数である。図-2 はこれらの関係を示す。なお、後述するように、 K は $T\sqrt{g/h}$ および h/H を与えることにより定まるから、 δ の値は T , h , および H を与えると求められる。

図-2 δ/H の第1および第2近似

(2) 波 速

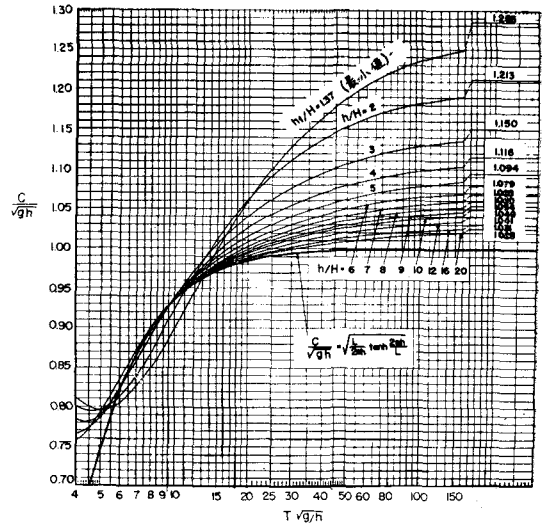
$$\frac{c_1}{\sqrt{gh}} = \left(1 - \frac{\delta_1}{H} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \times \left\{ 1 + \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) \right\} \dots (3)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh}} = \left(1 - \frac{\delta_2}{H} \frac{H}{h} \right)^{1/2} \times \left[1 + \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \frac{H}{h} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K} \right) + \left\{ \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \right\}^2 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \frac{1}{k^4} \times \left\{ \frac{E}{K} \left(\frac{E}{K} + \frac{3}{4}k^2 - 1 \right) - \left(\frac{k^4 + 14k^2 - 9}{40} \right) \right\} \right] \dots (4)$$

前述のように、 δ/H は h/H および K の関数であるから、 $c/\sqrt{gh}$ もまた h/H および K の関数としてあらわすことができる。また図-5 に示すように、 $T\sqrt{g/h}$ と h/H を与えると K が定まるから、 $c/\sqrt{gh}$ は $T\sqrt{g/h}$ および h/H の関数として表わすことができる。図-3 はこの関係を示す。 $k \rightarrow 1$ すなわち $K \rightarrow \infty$ の極限(孤立波)においては、 $\delta/H \rightarrow 0$ および $E \rightarrow 1$ となるので、式(3)および式(4)はそれぞれ

$$\frac{c_1}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} \dots (5)$$

$$\frac{c_2}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \dots (6)$$

図-3 $c/\sqrt{gh}$ の第2近似

のようになる。図-3 の右端に示した数字は式(6)にもとづく極限值である。

(3) 波形勾配および波長

波形勾配を与える式は、

$$\frac{H}{L_1} = \frac{\sqrt{3}}{4kK} \left\{ \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \right\}^{3/2} \left(\frac{H}{h} \right)^{3/2} \times \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2 - 1}{k^2} \right) \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \frac{H}{h} \right\}^{-1} \dots (7)$$

$$\frac{H}{L_2} = \frac{\sqrt{3}}{4kK} \left\{ \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \right\}^{3/2} \left(\frac{H}{h} \right)^{3/2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{7k^2 - 2}{8k^2} \right) \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \frac{H}{h} \right\} \dots (8)$$

によって表わされる。したがって、 H/L もやはり K と h/H のみの関数である。図-4 はこの関係を示したもので、同図の(a)は K の値が小さい場合、(b)は大きい場合である。

いま $T = L/c$ の関係から、

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{(L/H)(H/h)}{c/\sqrt{gh}} \dots (9)$$

とかけると、前述のように $c/\sqrt{gh}$ は K および h/H の関数であり、また H/L も両者の関数で表わされるから、式(9)より $T\sqrt{g/h}$ は K と h/H の関数である。

図-5 はこの関係を図示したものである。

波長の式は、式(7)および(8)を変形して、

$$\frac{L_1}{h} = \frac{4kK}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{\delta_1}{H} \right) \left(\frac{H}{h} \right) \right\}^{3/2} \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2} \times \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2k^2 - 1}{k^2} \right) \frac{1}{1 - (\delta_1/H)(H/h)} \frac{H}{h} \right\} \dots (10)$$

$$\frac{L_2}{h} = \frac{4kK}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \left(\frac{\delta_2}{H} \right) \left(\frac{H}{h} \right) \right\}^{3/2} \left(\frac{h}{H} \right)^{1/2}$$

図-4 H/L の第2近似

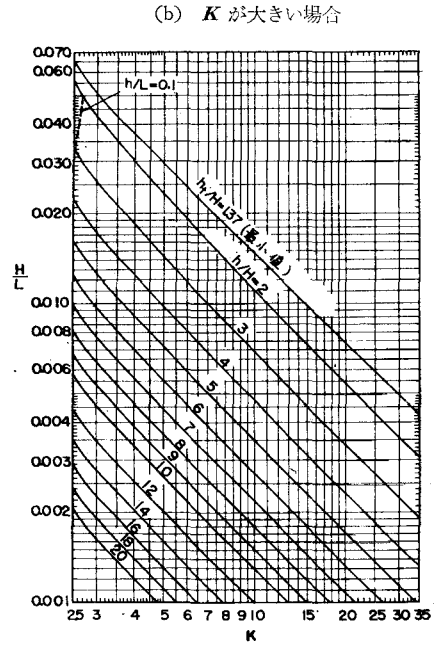
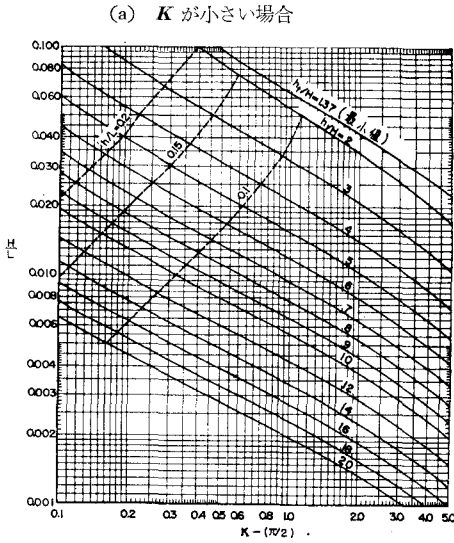
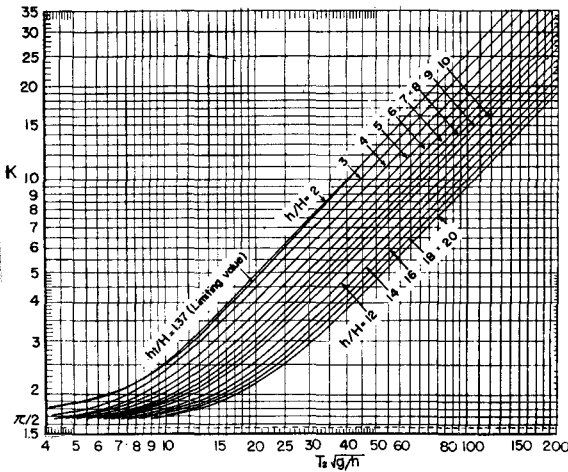


図-5 K と波の周期、水深および波高との関係



$$\times \left\{ 1 - \left(\frac{7k^2 - 2}{8k^2} \right) \frac{1}{1 - (\delta_2/H)(H/h)} \frac{H}{h} \right\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ええられる。これから h/H をパラメーターとして L/h と $T\sqrt{g/h}$ の関係が求められるが、 $c/\sqrt{gh} = (L/h)(T\sqrt{g/h})^{-1}$ であることを利用して、図-3 を使用した方が読取りの誤差が少ない。

(4) 波 形

いま $x-ct=X$ とおけば、波形は

$$\frac{\eta_1}{H} = \text{cn}^2 \left(2K \frac{X}{L}, k \right) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\eta_2}{H} = \text{cn}^2 \left(2K \frac{X}{L}, k \right) - \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \text{cn}^2 \left(2K \frac{X}{L}, k \right)$$

$$\times \left\{ 1 - \text{cn}^2 \left(2K \frac{X}{L}, k \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

によって表わされる。ここに、cn は Jacobi のだ円関数である。 $k \rightarrow 1$ の場合には $\text{cn}(2KX/L, k) \rightarrow \text{sech}(2KX/L)$ となるので、 $k \approx 1$ のときを考え、擬孤立波の波形の第1近似を

$$\frac{\eta_{s1}}{H} = \text{sech}^2 \left(2K \frac{X}{L} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

と表わす。 $0.95 < k^2 \leq 1$ 、すなわち $2.908 < K$ の場合には、

$2KX/L = v$ とおけば、

$$\text{cn}(v, k) \approx \text{sech } v - (1/4)(1-k^2) \tanh v \text{ sech } v \times (\sinh v \cosh v - v) \quad \dots\dots\dots (15)$$

と近似されるので、 η_{s1}/H と η_1/H の差をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{s1} - \eta_1}{H} &= \text{sech}^2 v - \text{cn}^2(v, k) \\ &\approx \text{sech}^2 v \left[1 - \left\{ 1 - \frac{1}{4}(1-k^2)(\sinh^2 v - v \tanh v) \right\}^2 \right] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。この関係を手助けとして、 $(\eta_{s1} - \eta_1)/H$ と K との関係、 X/L をパラメーターとして求めたものが図-6 である。第1種のだ円積分の表を用いて Jacobi の cn 関数の値を求めるのは手数をするが、図-6 を利用すれば、双曲線関数表のみで簡単に第1近似のクノイド波の波形が求められる。すなわち、周期 T 、水深 h 、波高 H が与えられ、図-5 から K の値が求められる。したがって、 X/L の値を与えれば $v = 2KX/L$ がわかり、双曲線関数表を用いて $\text{sech}^2 v$ の値が求められる。一方、図-6 から K の値に対応する $X/L = 0.1$ 、

図-6 第1近似的擬孤立波の波形とクノイド波の波形の差

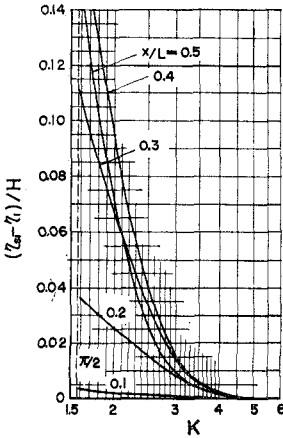
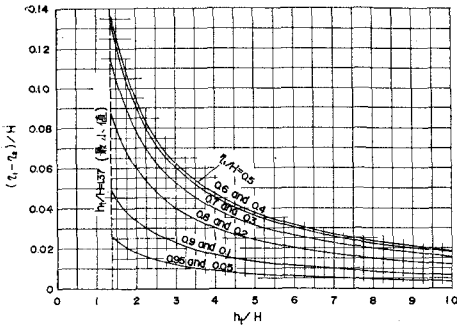


図-7 クノイド波の第1近似的波形と第2近似的波形の差



0.2, 0.3, 0.4 および 0.5 の場合の $(\eta_{s1} - \eta_1)/H$ の値を求め、 $\text{sech}^2 v$ の値からこの値を差引けば、各 X/L に対応する η_1/H の値が求まる。図-6 より η_{s1} と η_1 の差は、 $K=3$ のとき最大 1.5% 程度であるから、この程度の誤差を許すとすれば、 $K \geq 3$ のときには、クノイド波の第1近似的波形として式 (14) の擬孤立波の式を用いてよいことがわかる。

さらに第1近似的波形 η_1/H から第2近似的波形 η_2/H を求める方法は、つぎのようにすればよい。すなわち、式 (12) および式 (13) から $(\eta_1 - \eta_2)/H$ を求めると、

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{H} = \frac{3}{4} \frac{H}{h_t} \frac{\eta_1}{H} \left(1 - \frac{\eta_1}{H} \right) \dots \dots \dots (17)$$

となる。図-7 はこの関係を示したもので、図-2 より δ/H を求め、 $h_t/H = (h - \delta)/H$ の関係より h_t/H を計算し、図-7 を用いて $(\eta_1 - \eta_2)/H$ を求め、この値だけ η_1/H から差引けば η_2/H がえられることになる。図-7 より、 $h_t/H \geq 9.5$ のときには、第1近似と第2近似的波形の差は、波高の約 2% 以下であるが、 h_t/H が 9.5 程度より小さくなると、両者の差はかなり大きくなるので、第2近似を用いなければならないことがわかる。

3. 波形、波速および波長に関する実験

クノイド波としての実験は、Wiegel⁶⁾ が紹介した Taylor (1955) および Elliot (1953) のものがあるのみで、資料はあまり多くない。ここでは実験装置による制約のため、 h/H の値がほぼ 2.0 以上で、かつ $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20, 25 および 30 の場合に限定されたが、波形、波速および波長についての実験を行なったので、これについて述べる。

(1) 実験装置

実験は京都大学防災研究所宇治川水理実験所にある幅 50 cm、深さ 65 cm、長さ 63 m の鉄製波浪実験長水槽を用いて行なった。波起機は、造波板付きの台車が水槽側壁上のレールの上を往復運動するピストン型のもので、その前方にアルミ箔とテトラポッドの模型をつめたフィルターを設置した。なお、水槽の両端には、フィルターと同様な波消しを置いた。

(2) 実験方法

実験に際しては、 $T\sqrt{g/h}$ の値、すなわち周期 T と水深 h を一定にしておき、波高を変化させる方法をとった。実験を行なった水深と波の特性は表-1 に示すようである。

表-1 水深と実験波の特性

$T\sqrt{g/h}$	周期 $T(\text{sec})$	水深 $h(\text{cm})$	波高 $H(\text{cm})$
15	1.97	16.9	1.4~8.2
20	2.80	19.2	1.4~8.6
25	3.35	17.6	1.2~8.9
30	3.35	12.2	0.7~5.6

a) 波速 波起機から約 16~30 m はなれた位置に、116~302 cm の間隔で、二つの電気抵抗式波高計を設置し、ペン書きオッシログラフによって水位の時間的変化を記録させると同時に、1/5 sec のタイムマークをも記録させて紙送り速度 40 mm/sec の校正を行なった。この記録から対応する各波の峯の間の距離を 0.5 mm の精度で読みとり、波が二つの波高計の間を進むに要する時間を求め、波速を算出した。

b) 波長 波起機から約 30 m はなれた位置に一つの波高計を固定しておき、他の波高計をあらかじめ算出した波長の概略値に対応する位置に設置し、これを 1 cm ずつ前後に移動させ、相隣れる波の峯の位置がちょうど二つの波高計間の距離に一致する点を、ペン書きオッシログラフによる水位記録(紙送り速度は 20 mm/sec) から 0.5 mm の精度で求め、このときの距離をもって波長とした。なお、波速、波長いずれを測定する場合にも、波起機の始動後の数波と、水槽の端から反射してかえってくる波は除外し、残りの波の平均値をもって実験値とした。

c) 波形 ある瞬間における実際の波形は、波長が

表—2 波速 c の実験値

$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$c(\text{cm/s})$	$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$c(\text{cm/s})$
15	1.35	125.3	25	1.25	130.4
	1.69	125.5		1.40	130.4
	2.14	125.5		1.71	131.5
	2.30	128.3		1.96	130.0
	2.49	125.7		2.30	129.5
	2.89	126.4		2.72	131.7
	2.89	127.0		2.83	131.2
	3.23	125.0		3.11	131.7
	4.29	127.7		3.81	135.6
	4.70	130.4		3.87	132.7
	4.93	130.4		4.03	134.5
	4.95	131.1		4.87	136.5
	5.54	130.4		5.42	139.5
	6.96	130.6		5.43	136.5
	7.06	128.9		5.72	136.5
20	7.24	130.6	30	6.20	136.5
	7.64	127.0		7.53	141.3
	7.91	130.6		8.04	137.8
	8.09	127.8		8.17	139.5
	1.46	134.8		8.57	137.8
	1.66	136.0		0.74	106.7
	2.22	134.0		0.98	108.7
	3.00	135.5		1.18	108.7
	3.60	135.5		1.38	111.7
	3.97	141.1		1.41	109.3
	4.10	136.3		1.93	111.2
	4.69	142.0		2.38	111.2
	5.06	143.5		2.96	113.8
	5.90	139.4		3.38	113.3
	6.49	142.6		3.63	112.7
	7.48	142.5		4.49	112.9
	7.98	140.6		5.01	115.7
	8.17	144.3		5.28	117.5
	8.18	142.5		5.31	116.3
	8.64	144.3		5.41	115.7
				5.61	116.3

表—4 波の谷から平均水面までの距離 δ の実験値

$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$\delta(\text{cm})$	$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$\delta(\text{cm})$
15	1.55	0.64	25	1.18	0.40
	2.40	0.86		1.70	0.57
	2.95	1.12		2.30	0.76
	3.45	1.08		2.79	0.88
	4.34	1.25		3.16	1.08
	4.57	1.48		4.27	1.30
	5.01	1.31		5.68	1.43
	5.29	1.82		6.89	1.60
	5.81	1.79		8.16	1.63
	5.93	1.41		8.16	1.87
	6.95	2.13		8.37	1.86
	7.43	1.93		8.57	1.70
	7.60	1.89		8.89	1.40
	7.75	1.55	30	0.97	0.37
	8.17	1.68		1.22	0.41
20	1.43	0.59		1.30	0.44
	2.29	0.71		1.49	0.42
	2.96	0.81		2.18	0.55
	3.57	0.99		2.40	0.63
	3.80	0.81		2.90	0.52
	4.13	1.33		3.28	0.69
	4.76	1.25		3.49	0.70
	5.53	1.33		4.85	0.78
	5.73	1.36		4.94	0.76
	6.11	1.56		5.10	0.78
	8.02	1.67		5.12	0.90
	8.09	1.82		5.22	0.82
	8.39	1.91			
	8.49	1.69			

表—3 波長 L の実験値

$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$L(\text{cm})$	$T\sqrt{g/h}$	$H(\text{cm})$	$L(\text{cm})$
15	1.44	250	25	1.35	438
	2.12	250		2.16	441
	3.01	251		2.90	443
	3.51	252		3.42	445
	3.88	254		3.52	448
	4.26	255		3.69	449
	4.66	255		3.74	454
	4.85	256		4.11	461
	4.95	257		4.12	456
	5.14	257		4.51	459
	6.50	254		4.53	461
	6.76	257		5.24	462
	6.98	256		5.27	460
	7.86	259		5.50	463
	8.09	255		6.58	464
20	1.35	379	30	7.07	466
	1.99	380		7.37	468
	2.49	381		7.67	470
	2.94	383		8.07	469
	3.36	385		8.39	468
	3.57	386		0.88	363
	4.12	388		1.26	368
	4.41	390		1.46	370
	4.74	391		1.54	373
	5.44	395		1.76	375
	6.95	400		2.36	377
	7.20	404		2.69	380
	7.27	400		3.23	382
	7.67	406		3.31	384
	7.88	407		3.54	386
	8.23	407		4.11	387
	8.43	408		4.46	390
				4.67	391
				4.83	393
				4.90	394
				4.95	395
				5.29	396
				5.40	398
				5.40	399
				5.48	401

かなり長いので測定が非常に困難であるから、ここでは実験波をパーマメント型の変形しない波とみなし、水位の時間的変化をもって波形とした。この場合、波速の測定のときに得られた記録から一つの波を選んで使用した。

(3) 実験結果と理論値との比較

表—2 および 3 は実験によって求めた波高 H 、波速 c および波長 L の値を示したもので、表—4 は波形の記録から読みとった波の谷から静水面までの高さ δ の値を示してある。なお、文献 15) に示した実験値もこれらの表と一緒に含まれている。波高は 3 桁まで示してあるが、記録紙上の波高や線の太さなどを考えると、最大 2% 程度の読み取り誤差が含まれている可能性があり、波速は最大約 0.5%、波長は約 1% 程度の誤差が入っていると考えられる。また δ の読み取り誤差は波高のその 2~5 倍程度であらう。

a) 波速 図—3 において、横軸の $T\sqrt{g/h}$ の値を

図-8 波速に対する理論値と実験値の比較

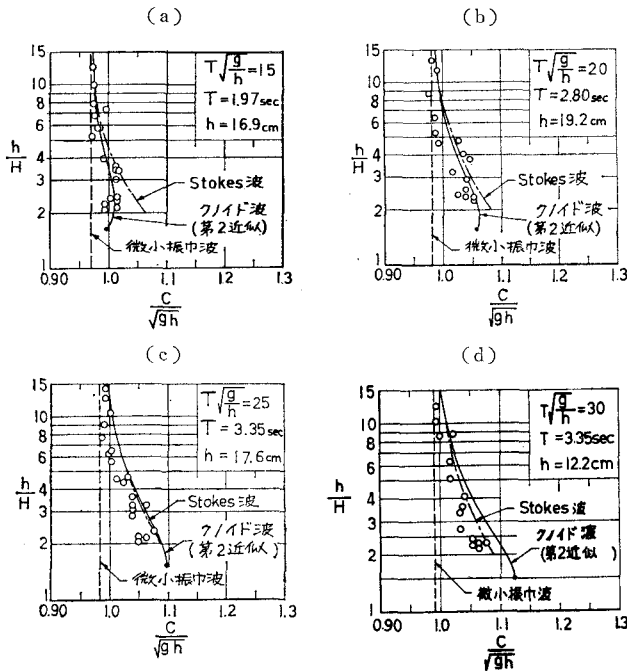
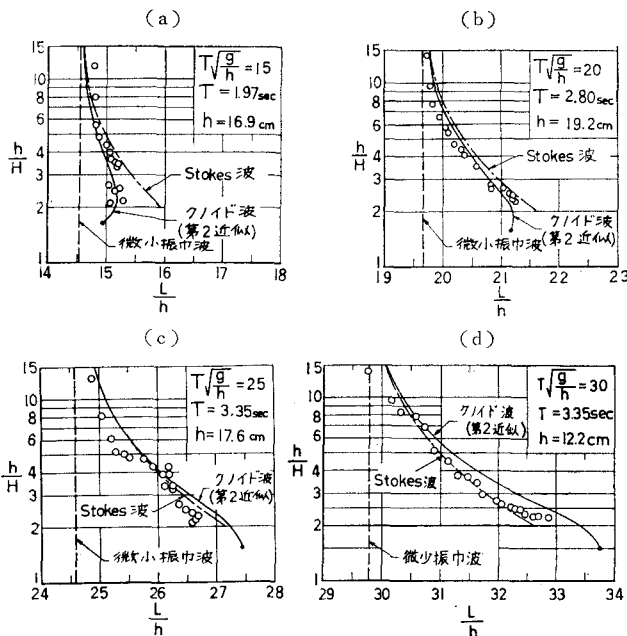


図-9 波長に対する理論値と実験値の比較



一定とすれば、 $C/\sqrt{gh}$ と h/H との関係が求められる。図-8 (a), (b), (c) および (d) は、それぞれ $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20, 25 および 30 の場合について、 $C/\sqrt{gh}$ と h/H との関係を点描し、また上述の方法でクノイド波の波速の第2近似を求め比較したもので、同時に微小振幅波の波速

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

および Stokes 波の波速¹⁴⁾

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left[\frac{L}{2\pi h} \tanh \frac{2\pi h}{L} \times \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\sinh 2\pi h/L)^4} \right\} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、

$$H = 2a + 2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 a^3 \frac{3}{16} \frac{8(\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6} \quad \dots\dots\dots (20)$$

をも、それぞれ破線および鎖線によって示してある。いずれの場合も、 h/H の値が小さくなると、実験値は微小振幅波の値より離れて大きくなることからわかる。 $T\sqrt{g/h}$ の値が 15 および 20 の場合には Stokes 波よりクノイド波の曲線の方がよく合うようであるが、30 の場合にはむしろ Stokes 波の曲線に近い。しかし、 $T\sqrt{g/h}$ の値がこの程度に大きくなると Stokes 波の理論の適用性が問題になるので、実験値が Stokes 波の曲線の方と一致することに特別な意味があるかどうかは疑問である。むしろ、その差は 1~2% であるから、クノイド波の第3近似をとれば実験値に近づく可能性も考えられる。

b) 波長 図-9 は $T\sqrt{g/h}$ の値の各場合に対する L/h と h/H との関係を点描し、やはり図-3 から $C/\sqrt{gh} = (L/h)(T\sqrt{g/h})^{-1}$ の関係によって求められるクノイド波の波長と、微小振幅波の波長

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{2\pi L}{h}} \left/ \sqrt{\tanh \frac{2\pi h}{L}} \right. \quad \dots\dots\dots (21)$$

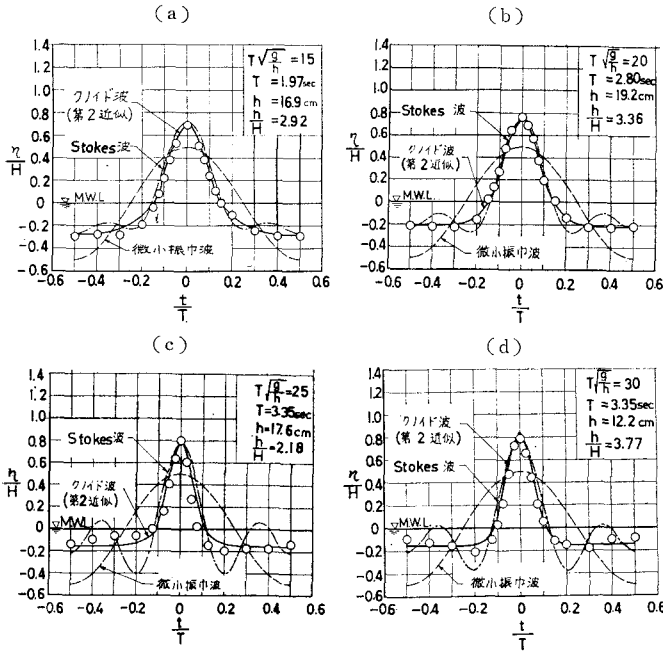
および Stokes 波の波長

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{2\pi L}{h}} \left/ \sqrt{\tanh \frac{2\pi h}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\cosh 8\pi h/L + 8}{8(\cosh 2\pi h/L)^4} \right\}} \right. \quad \dots\dots\dots (22)$$

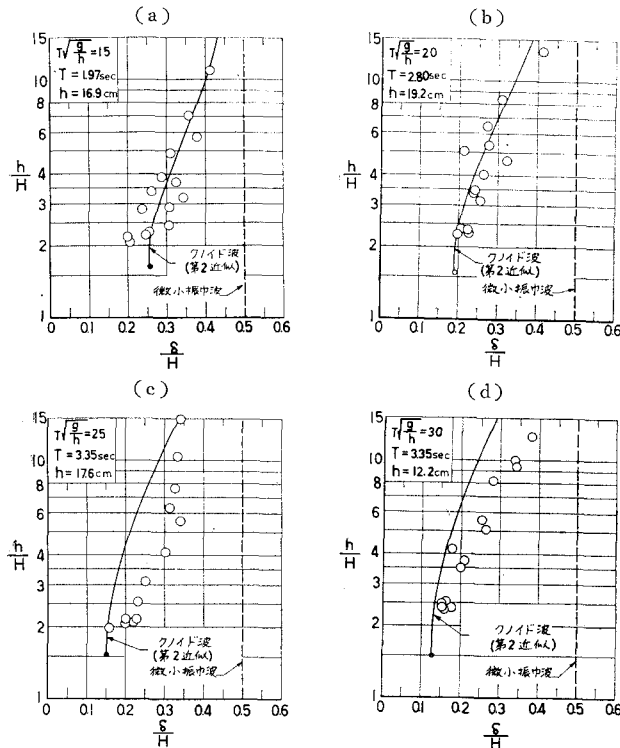
を示して、実験値と比較したものである。波長も波速の場合と同様、 $T\sqrt{g/h}$ の値が 15 および 20 のときには実験値はクノイド波の曲線によく一致しているが、30 になると Stokes 波の曲線にむしろよく合っている。しかしその差は 1% 程度であって、実験の精度に近く、また $T\sqrt{g/h} = 30$ の場合には波形が十分きれいではなかったので、波速の実験の場合をも含めて、クノイド波の第2近似の適用性を正確に検討したとはいえない。

c) 波形 図-10 は $T\sqrt{g/h}$ の値が 15, 20, 25 および 30 の各場合より、波形(水位変化)の記録を一例ずつ選んで読みとり点描し、クノイド波、微小振幅波(正

図—10 波形に対する理論値と実験値の比較



図—11 波の谷から静水面までの高さの理論値と実験値の比較



弦波) および Stokes 波の波形と比較したもので、縦軸は静水面からの水位上昇量を η とし、それを波高 H で割って無次元し、横軸は波の峯を基準として時間 t を周期 T で割ったもので示してある。

これらの図をみると、 $T\sqrt{g/h} = 15, 20$ および 25 の場合は、実験値はクノイド波の波形と非常によく一致している。Stokes 波の波形 (水位変化) は、

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{L} &= A_1 \cos \frac{2\pi}{L} t + A_2 \cos \frac{4\pi}{L} t \\ &\quad + A_3 \cos \frac{6\pi}{L} t \\ A_1 &= \frac{a}{L}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{L^2} \\ &\quad \times \frac{\cosh 2\pi h/L (\cosh 4\pi h/L + 2)}{(\sinh 2\pi h/L)^3} \\ A_3 &= -\frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{a}{L} \right)^3 \\ &\quad \times \frac{8 (\cosh 2\pi h/L)^6 + 1}{(\sinh 2\pi h/L)^6} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

によって求められるが、倍振動および3倍振動の効果が著しくなると、とくに谷の部分で実験値と合わない。 $T\sqrt{g/h} = 30$ の場合の実験波形は、谷の部分にもう一つ低い波が現われ、理論波形と一致しない。これは波の起こし方を改良して、きれいな波が起こるようにすれば、理論波形の適用性がさらに確かめられよう。このような波形のきたなさが、波速や波長の実験値にもある程度影響している可能性もある。

d) 波の谷から静水面までの高さ 図—11 は波の谷から静水面までの高さ δ を波形記録から読みとり点描した結果であり、図中の曲線は図—2 および図—5 を用いて求めたものである。 $T\sqrt{g/h} = 15$ および 20 の場合には、実験値は散乱しているが、ほぼクノイド波の理論値と一致している。しかし、25 および 30 の場合は、実験値の方が全体として大きく、このことは図—10 においてわかるように、水位の最も低いところを谷とみなして、そこから静水面までの高さを δ としたからであって、波形の谷の部分のきたなさが原因となっている。岸¹⁶⁾は Beach Erosion Board の実験資料¹⁷⁾を用いて $\eta_0 = H - \delta$ の値をクノイド波の理論値と比較し、 $T = 11.33 \text{ sec}$, $h = 15 \text{ ft}$ ($T\sqrt{g/h} \approx 16.6$) の場合には η_0 の理論値が実験値より大きいことを指摘している

が、図—2 および 図—5 を用いて調べてみると、その差はあまり大きくない。しかし、 δ に換算すると、実験値の方が大きく出る傾向がみられる。なお、図—11 において、Stokes 波の曲線が記入されていないのは、前述し

たように倍振動および3倍振動の影響が大きくなって、谷の部分で波形が波うつため、 δ の定義が明確でなくなり無意味となるからである。

4. 結 語

以上、この論文では、まず Laitone のクノイド波理論の結果にもとづいて、波速、波長、波形および波の谷から静水面までの高さを求める図表を作成し、周期、水深および波高を与えてこれらの波の特性を算出する方法を述べた。ついで、水深の波長比の小さい波、換言すれば $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合の波について、上記の波の特性を測定し、クノイド波の第2次近似値や Stokes 波の3rd order の値および微小振幅波の値と比較した。その結果、 $T\sqrt{g/h} = 30$ の場合には、波形が十分きれいでなかったのが明らかでないが、 $T\sqrt{g/h} = 15, 20$ および 25 の場合には、クノイド波とほぼ一致することがわかった。

なお、最近クノイド波のエネルギーの輸送の計算を試みた例¹⁸⁾もあり、さらにここで取り扱った以外の波の特性を検討する必要があるが、これは今後の課題である。

最後に、実験に当って協力していただいた海岸研究室の方々に謝意を表するとともに、この研究は文部省特定研究費による研究の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Korteweg, D.J. and G. de Vries : On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 39, 1895, pp. 422~443.
- 2) Keulegan, G.H. : Wave Motion, Engineering Hydraulics, Wiley, New York, ed. by H. Rouse, Chapt. 11, 1950, pp. 711~768.
- 3) Laitone, E.V. : Limiting Conditions for Cnoidal and Stokes Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 4, April, 1962, pp. 1555~1564.
- 4) Wilson, B.W., L.M. Webb and J.A. Hendrickson : The Nature of Tsunamis, Their Generation and

- Dispersion in Water of Finite Depth, National Science Co., Tech. Rep. No. SN 57-2, August, 1952, pp. 1~150.
- 5) 岩垣雄一 : クノイド波に関する研究 (第1報) —— 波形こう配および波形について ——, 京大防災研究所年報, 第7号, 昭 39.3, pp. 373~386.
- 6) Wiegel, R.L. : A Presentation of Cnoidal Wave Theory for Practical Application, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 7, No. 2, Feb., 1960, pp. 273~286.
- 7) Masch, F.D. and R.L. Wiegel : Cnoidal Waves, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1961, pp. 1~129.
- 8) Keller, J.B. : The Solitary Wave and Periodic Waves in Shallow Water, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 1, 1948, pp. 323~339.
- 9) Keulegan, G.H. and G.W. Patterson : Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, Jour. of Research of the National Bureau of Standards, U.S. Dept. Commerce, Vol. 24, Jan., 1940, pp. 47~101.
- 10) Littman, W. : On the Existence of Periodic Waves near Critical Speed, Commu. Pure Appl. Math., Vol. 10, No. 2, 1957, pp. 241~269.
- 11) Laitone, E.V. : The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, Jour. of Fluid Mechanics, Vol. 9, 1961, pp. 430~444.
- 12) Chappellear, J.E. : Shallow-Water Waves, Jour. of Geophysical Research, Vol. 67, No. 12, Nov., 1962, pp. 4693~4704.
- 13) 岩垣雄一 : クノイド波に関する研究 (第2報) —— 波速および波長について ——, 京大防災研究所年報, 第8号, 昭 40.3, pp. 343~351.
- 14) Skjelbreia, L. : Gravity Waves, Stokes' Third Order Approximation, Tables of Functions, Council on Wave Research, The Engineering Foundation, 1959, pp. 1~337.
- 15) 岩垣雄一・細見昌彦 : クノイド波に関する研究 (第3報) —— 波形、波速および波長に関する実験 ——, 京大防災研究所年報, 第9号, 昭 41.3, pp. 637~645.
- 16) 岸 力・佐伯 浩 : クノイド波に関する研究, 第11回海岸工学講演会講演集, 昭 39.11, pp. 7~11.
- 17) Bretschneider, C.L. : Selection of Design Wave for Offshore Structures, Proc. ASCE, Vol. 84, No. WW 2, March, 1958, pp. 1~37.
- 18) Masch, F.D. : Cnoidal Waves in Shallow Water, Proc. 9th Conference on Coastal Engineering, 1964, pp. 1~22.