

長 波 に つ い て

—— 一様傾斜斜面上へのうちあげ高 ——

首 藤 伸 夫*・松 村 圭 二**

1. はじめに

ふつう非線型浅水理論の基本式と呼びならわされている式を Greenspan らが行なった変形にしたがって変形したあと、傾斜が一様である斜面上のうちあげ高を求め、えられた結果を鹿島水理試験所で行なわれた実験値と比較した。

2. 基本方程式

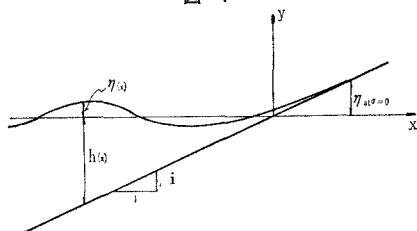
非線型浅水波に対する基本方程式は、静水面上の変位を η 、水平方向の水分子流速を u とするとき、

$$\eta_t + [u \cdot (\eta + h)]_x = 0 \quad (2-1)$$

$$u_t + u \cdot u_x + g \cdot \eta_x = 0 \quad (2-2)$$

である。ここで、添字 t, x は、それぞれ t, x に関する偏微分を表わしている。また、 h は静水面からの水底の深さを示している。これら座標のとり方は図-1に示されている。

図-1



水底の傾斜が一様であるとき、

$$h(x) = -\frac{m}{g}x \quad (2-3)$$

g : 重力の加速度, m : 定数

とおく。

$$g \cdot (\eta + h) = c^2$$

として、Stoker によると式 (2-1), (2-2) から式 (2-4), (2-5) をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} [u + 2c + mt] + (u + c) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [u + 2c + mt] = 0 \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [u - 2c + mt] + (u - c) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [u - 2c + mt] = 0 \quad (2-5)$$

ついで Greenspan らにしたがって、

$$\left. \begin{aligned} u + 2c + mt &= \alpha \\ u - 2c + mt &= -\beta \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u + c \quad \text{上で} \quad \alpha = \text{const} \\ \frac{dx}{dt} &= u - c \quad \text{上で} \quad \beta = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

という関係は、

$$\left. \begin{aligned} x_\beta &= (u + c) t_\beta \\ x_\alpha &= (u - c) t_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

という連立偏微分方程式となる。添字 α, β は、それぞれ α, β による偏微分を意味している。

$$\left. \begin{aligned} u + mt &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\lambda \\ c &= \frac{1}{4}(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

という変数変換によって λ, σ を導入すると、連立偏微分方程式 (2-8) から、

$$\sigma \{t_{\sigma\sigma} - t_{\lambda\lambda}\} + 3t_\sigma = 0 \quad (2-10)$$

をうる。式 (2-9) の第1式の関係から、 t に関する微分方程式と u に関するそれとは同じ形をもつことになる。つまり u に対して、

$$\sigma \{u_{\sigma\sigma} - u_{\lambda\lambda}\} + 3u_\sigma = 0 \quad (2-11)$$

である。

3. 式 (2-11) の一般解

式 (2-11) をとくのに変数分離をして、

$$u = A(\lambda) \cdot B(\sigma) \quad (3-1)$$

とおくと、 A, B に対する微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} A_{\lambda\lambda} + n^2 A &= 0 \\ B_{\sigma\sigma} + 3\frac{1}{\sigma} B_\sigma + n^2 B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

であって、

$$A(\lambda) = \begin{cases} \cos n\lambda \\ \sin n\lambda \end{cases} \quad (3-3)$$

$$B(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \begin{cases} J_1(n\sigma) \\ N_1(n\sigma) \end{cases} \quad (3-4)$$

の組合せによって u の解を求めうる。 J_1, N_1 は、それぞれ一次の Bessel 関数、一次の Neumann 関数である。

x に対する表現は、式 (2-8) から、

$$\left. \begin{aligned} x_\sigma &= u t_\sigma - c t_\lambda \\ x_\lambda &= u t_\lambda - c t_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

* 正会員 建設省土木研究所河川部海岸研究室

** 正会員 同 鹿島水理試験所

であるから,

$$\left. \begin{aligned} x_\sigma &= ut_\sigma - ct_\lambda = -\frac{1}{m} \cdot u \cdot u_\sigma - \frac{\sigma}{4} \cdot \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{m} u_\lambda \right) \\ &= -\frac{1}{2m} (u^2)_\sigma - \frac{\sigma}{8m} + \frac{\sigma}{4m} \\ &\quad \times \left[\frac{-n \cdot \sin n\lambda}{n \cdot \cos n\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[\frac{J_1(n\sigma)}{N_1(n\sigma)} \right] \right] \\ x &= -\frac{1}{2m} u^2 - \frac{\sigma^2}{16m} + \frac{1}{4m} \\ &\quad \times \left[\frac{\sin n\lambda}{-\cos n\lambda} \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] + e(\lambda) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-6)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} x_\lambda &= ut_\lambda - ct_\sigma = u \cdot \left(\frac{1}{2m} - \frac{u_\lambda}{m} \right) + \frac{\sigma}{4m} \cdot u_\sigma \\ &= -\frac{1}{2m} (u^2)_\lambda + \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\cos n\lambda}{\sin n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_1(n\sigma)}{N_1(n\sigma)} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma}{4m} \left(-\frac{n}{\sigma} \right) \cdot \left[\frac{\cos n\lambda}{\sin n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_2(n\sigma)}{N_2(n\sigma)} \right] \\ &= -\frac{1}{2m} (u^2)_\lambda + \frac{n}{4m} \cdot \left[\frac{\cos n\lambda}{\sin n\lambda} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{2}{n\sigma} \left\{ \frac{J_1(n\sigma)}{N_1(n\sigma)} \right\} - \left\{ \frac{J_2(n\sigma)}{N_2(n\sigma)} \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{2m} (u^2)_\lambda + \frac{n}{4m} \cdot \left[\frac{\cos n\lambda}{\sin n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] \\ x &= -\frac{1}{2m} u^2 + \frac{1}{4m} \left[\frac{\sin n\lambda}{-\cos n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] \\ &\quad + f(\sigma) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-7)$$

ゆえに,

$$x = -\frac{1}{2m} u^2 + \frac{1}{4m} \left[\frac{\sin n\lambda}{-\cos n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] - \frac{\sigma^2}{16m} \dots\dots\dots (3-8)$$

をうることができる。

ただし, ここで $\left[\frac{\cos n\lambda}{\sin n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right]$ などの記号は, 三角関数と Bessel 関数の任意の組合せに適当な定数をかけて境界条件をみたすように加えあわせる演算を意味している。

静水面からの変位 η は,

$$\begin{aligned} g\eta &= c^2 - gh = c^2 + mx = \frac{\sigma^2}{16} - \frac{1}{2} u^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\sin n\lambda}{-\cos n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] - \frac{\sigma^2}{16} \\ &= -\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\sin n\lambda}{-\cos n\lambda} \right] \cdot \left[\frac{J_0(n\sigma)}{N_0(n\sigma)} \right] \dots\dots\dots (3-9) \end{aligned}$$

で表わされる。

例 1

いま底面摩擦による減衰もなく碎波もおこらず, 反射率が 1.0 の場合の定常波に対する表現を求めよう。

このときには $x \rightarrow -\infty$, つまり十分遠い沖合で, 完全重複波となっているとする。

このためには,

$$u = \frac{a}{\sigma} \cdot \cos n\lambda \cdot J_1(n\sigma) \dots\dots\dots (3-10)$$

$$g\eta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\sigma^2} \cdot \cos^2 n\lambda \cdot J_1^2(n\sigma) + \frac{a}{4} \cdot \sin n\lambda \cdot J_0(n\sigma) \dots\dots\dots (3-11)$$

という組合せをえらべばよい。これが $x \rightarrow -\infty$ のときに完全重複波になっていることは Bessel 関数の漸近展開,

$$J_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{(2\nu+1)}{4} \pi\right), \quad z \rightarrow +\infty$$

を用いて考えればよい。

$x \rightarrow -\infty$ ということは,

$$\sigma = 4\sqrt{g(\eta+h)} = 4\sqrt{g\eta - mx} \rightarrow +\infty$$

ということである。したがって,

$$\begin{aligned} u &\simeq \frac{a}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi\sigma}} \cdot \cos\left(n\sigma - \frac{3}{4}\pi\right) \cdot \cos n\lambda \\ &= \frac{a}{8} \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \cdot (g\eta - mx)^{-3/4} \cdot \cos\left(n\sigma - \frac{3}{4}\pi\right) \\ &\quad \times \cos 2n(u+mt) \\ &\simeq \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{n\pi}} \cdot (-mx)^{-3/4} \cdot \\ &\quad \times \cos\left\{4n(-mx)^{1/2} - \frac{3}{4}\pi\right\} \cdot \cos 2nmt \end{aligned} \dots\dots\dots (3-12)$$

また,

$$\begin{aligned} g\eta &\simeq \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi\sigma}} \cdot \cos\left(n\sigma - \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \sin n\lambda \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{n\pi}} \cdot (g\eta - mx)^{-1/4} \\ &\quad \times \cos\left\{4n(g\eta - mx)^{1/2} - \frac{1}{4}\pi\right\} \cdot \sin 2n(u+mt) \\ &\simeq \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{n\pi}} \cdot (-mx)^{-1/4} \cdot \\ &\quad \times \cos\left\{4n(-mx)^{1/2} - \frac{1}{4}\pi\right\} \cdot \sin 2nmt \end{aligned} \dots\dots\dots (3-13)$$

となる。これらが沖での定常波を表わしていることは明らかであろう。

例 2

反射率 0 のとき, つまり入射波のみが存在する場合を求めよう。

$$u = \frac{a}{\sigma} \cdot [\cos n\lambda \cdot J_1(n\sigma) + \sin n\lambda \cdot N_1(n\sigma)] \dots\dots\dots (3-14)$$

$$\begin{aligned} g\eta &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\sigma^2} \cdot [\cos n\lambda \cdot J_1(n\sigma) + \sin n\lambda \cdot N_1(n\sigma)]^2 \\ &\quad + \frac{a}{4} \cdot [\sin n\lambda \cdot J_0(n\sigma) - \cos n\lambda \cdot N_0(n\sigma)] \end{aligned} \dots\dots\dots (3-15)$$

が, $x \rightarrow -\infty$ で入射波のみが存在するという条件をみたすことは, Neumann 関数の漸近展開,

$$N_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin\left(z - \frac{2\nu+1}{4} \pi\right)$$

を使って例1とおなじ議論をすれば明らかである。

4. 長波の打ちあげ高

波の先端では $\sigma=0$ である。この条件を η に入れ η の最大値を求める。

反射率0のときには流速および変位の式の中に Neumann 関数が入っているの、先端での u, η は無限大となってしまう。

しかし、反射率 1.0 のときには、

$$\begin{aligned} g\eta_{at\sigma=0} &= \left[\frac{a}{4} \cdot \sin n\lambda \cdot J_0(n\sigma) - \frac{a^2}{2\sigma^2} \cdot \cos^2 n\lambda \cdot J_1^2(n\sigma) \right]_{\sigma=0} \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sin n\lambda - \frac{a^2}{2} \cdot \cos^2 n\lambda \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sigma^2} \left\{ \frac{n\sigma}{2} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot \left(\frac{n\sigma}{2}\right)^{2r}}{r! \cdot \Gamma(r+2)} \right\} \right]_{\sigma=0} \\ &= \frac{a}{4} \cdot \sin n\lambda - \frac{a^2 n^2}{8} \cdot \cos^2 n\lambda \dots \dots \dots (4-1) \end{aligned}$$

であって、最大打ちあげ高 $\eta_{\max}$ は、

$$\eta_{\max} = \frac{a}{4g} \dots \dots \dots (4-2)$$

であたえられる。

3. で求めた長波の振幅は水深によって変化している。いま十分遠くで成立する式 (3-13) を進行波を反射波とに分離すると、

$$\begin{aligned} g\eta &= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{a}{\sqrt{n\pi}} \cdot (-mx)^{-1/4} \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad \times \left[\sin \left\{ 4n(-mx)^{1/2} + 2n \cdot mt - \frac{1}{4}\pi \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sin \left\{ 4n(-mx)^{1/2} - 2n \cdot mt - \frac{1}{4}\pi \right\} \right] \\ &\dots \dots \dots (4-3) \end{aligned}$$

である。 $x=-x_1$ での水深を h_1 とするとこの地点での入射波の波形は、

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{a}{g\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{1}{(gh_1)^{1/4}} \\ &\quad \times \sin \left\{ 4n(-mx_1)^{1/2} - 2nmt - \frac{1}{4}\pi \right\} \\ &\dots \dots \dots (4-4) \end{aligned}$$

で与えられる。周期を T とすると $2\pi/T=2nm$ を用いて x_1 地点 (水深 h_1) の所の入射波の半波高 A は、

$$A = \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{mT}}{g\pi} \cdot \frac{1}{(gh_1)^{1/4}} \dots \dots \dots (4-5)$$

である。斜面勾配を i で表わすと、 $i=m/g$ である。斜面上の最大打ちあげ高 $\eta_{\max}$ の水深 h_1 での半波高 A に対する比をつくると、

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{\max}}{A} &= \frac{\frac{a}{4g}}{\frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{g\pi} \cdot \frac{\sqrt{mT}}{(gh_1)^{1/4}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{mT}} \cdot \pi \cdot (gh_1)^{1/4} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{g \cdot i \cdot T}} \cdot (gh_1)^{1/4} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{iT}} \cdot \left(\frac{h_1}{g}\right)^{1/4} \\ &\dots \dots \dots (4-6) \end{aligned}$$

5. 実験値との比較

実験は土木研究所鹿島水理試験所の高潮津波造波水槽で行なわれている。造波様式は気圧式であり、長さ 150 m、幅 6.0 m、高さ 1.0 m の水路となっている。水路末端に約 25 m の長さの 1/30 勾配の斜面が設置されており、この斜面にいたるまでの水路底は水平となっている。使用された実験波は、峰一つだけのもの、峰が二つのものであるが、未整理のため、ここでは峰が一つだけあるものについての実験値をとりあげた。斜面の立上りの場所で波形をとり、ここの波形記録で峰の位置が波形の真中にあるもの、峰の位置が前方にずれて先端より

図-2 造波水路の波高計配置

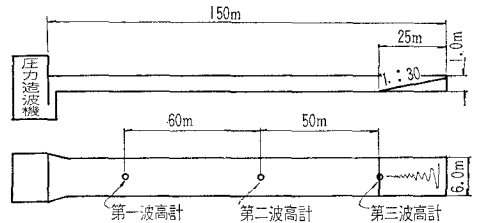


図-3 使用された実験波波形

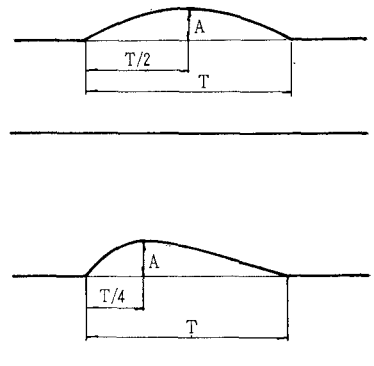
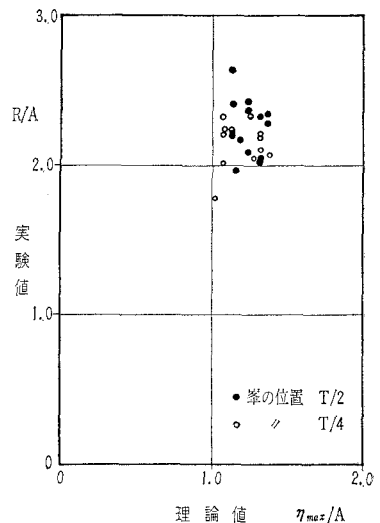


図-4 実験値と理論値の比較



表—1

実験番号	静水深 (cm)	半周期 (sec)	半波高 A (cm)	うちあげ高 R (cm)	相対うちあげ 高実験値 R/A	相対うちあげ 高理論値 $v_{\max}/A$
14	30.0	120	8.5	17.3	2.04	1.31
21	30.0	120	7.1	14.4	2.03	1.31
11	30.0	110	6.0	17.3	2.88	1.37
15	30.0	160	8.6	20.6	2.40	1.13
18	30.0	120	6.0	13.9	2.32	1.31
16	30.0	160	7.0	18.4	2.63	1.13
19	30.0	160	5.3	11.6	2.19	1.13
94*	30.0	120	9.3	19.5	2.10	1.31
93*	30.0	120	6.0	13.2	2.20	1.31
71*	30.0	180	8.7	17.5	2.01	1.07
96*	30.0	180	8.6	18.9	2.20	1.07
69*	30.0	120	8.7	18.9	2.18	1.31
95*	30.0	180	5.6	13.0	2.32	1.07
48*	25.0	100	7.5	15.5	2.07	1.37
58*	25.0	150	9.8	21.8	2.23	1.12
57*	25.0	150	9.8	21.8	2.22	1.12
53*	25.0	160	5.8	17.5	2.24	1.08
49*	25.0	115	8.1	16.5	2.04	1.27
54*	25.0	120	5.7	13.3	2.33	1.25
56*	25.0	180	5.8	10.3	1.78	1.02
23	25.0	140	11.5	22.5	1.96	1.15
22	25.0	120	9.0	18.7	2.08	1.25
26	25.0	120	8.6	20.8	2.42	1.25
27	25.0	120	8.7	20.5	2.36	1.25
83	35.0	120	9.0	20.5	2.28	1.36
84	35.0	160	9.3	20.1	2.16	1.18
82	35.0	120	6.0	14.0	2.34	1.36

* は峯の位置が先端より $T/4$ の場所にあるもの

$T/4$ (T は半周期) にあるもので分類してある。図—3 はこの関係を図で表わしている。表—1 に実験値と式 (4-6) にもとづく計算値を、図—4 に両方の値の比較を行なっている。

図—4 から明らかなとおり、理論値は実験値の約 60 % になっている。

こうした差を生じた原因としてはつぎのようなことが考えられよう。

(1) 理論値をもとめるときには、波群は無限に続くものと考えているが、実験の場合には波として一つしか与えていない。しかし、まだまだ未整理ではあるが、くり返し波を与えた実験でも、峯一つの場合のうちあげ高とほとんど変わらないうちあげ高になるようである。

(2) 式 (4-6) にもとづく計算を行なうとき、水深 h_1 として斜面始端での水深、半波高としてその位置での記録の最高値をとった。しかし、式 (4-6) を求めるための仮定として水深 h_1 が十分大きいということを考えており、水深が 25~35 cm のところではこの仮定は十分な精度では成立たない。

(3) 基本式 (2-1), (2-2) を導びくにあたっては鉛直方向の流速成分が存在しないこと、圧力が静水圧分布をしていることを仮定しているけれども、この実験のような場合、以上の仮定がもはや成立しないことも考えられる。もちろん 表—1、図—4 に使った実験値としては、長波の先端に段波ができたり、あるいは斜面上で砕波するようなものはのぞいたのであるけれども、以上の仮定が成立しない可能性はある。

このように、実測値との差をもたらしものはいろいろと考えられるが、式 (4-6) で表わされる相対うちあげ高は第一近似としてはかなり良いものであろう。

参考文献

- 1) Carrier, G.F. & Greenspan, H.P.: "Water waves of finite amplitude on a sloping beach", J. Fluid Mech. 1958.