# 波の方向分析に関する試法

堀　口　孝　男*

## 1. はしがき

波浪エネルギーの伝達方向の分析については，波浪の予報，発達の問題と関連して多くの研究がなされている。しかしこれらの問題だけに止まらず，港湾，海岸などの公共事業の方面でも，波の方向解析の必要性が認識されてきている。例えば近年において，船型の大型化，入港船舶数の増大，あるいは港湾を中心とする臨海部土地造成の要請から，かなり沖合に大規模防波堤を建設することが計画されるが，防波堤開口部から浸入する波と港内に発生する波との interaction の結果，どの方向にどの程度のエネルギーが伝達されるか，開口部の位置，幅員，港内の地形あるいは各種施設の配置などと関係して，波浪対策の面で重要な懸案事項となっている。

現在までに行なわれた directional spectrum の観測には，航空写真の実体視により，space correlation から spectrum を算出する SWOP の方法，数個の wave detector array を用いて iteration によって算出する Munk, Barber らの方法，あるいは floating buoy を使用して，波の水位記録ならびに水面勾配を測定し，これら相互の cross-spectrum から directional spectrum を求める Longuet-Higgins の方法などがある。しかしながら，これらはいずれも高価な測定器，大がかりな測定法にもとづいて行なわれており，これを直接このままわが国に適用することは資金の面でかなりの制約がある。したがって，ここで述べる方法は Longuet-Higgins の分析方法に準拠しながら，比較的安価に directional spectrum を算出するため，多少の考察を試みたものである。

## 2. 理論的考察

波の状態を定常でかつ一様な実数値確率過程とするときは，つぎのような線型の spectral representation が得られる。

$$\eta=\mathcal{R}\iint e^{i(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)}d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

ここで $\boldsymbol{X}=(x,y)$，$\boldsymbol{K}=(K_x,K_y)=(K\cos\phi, K\sin\phi)$，$\sigma$ と $K$ との間には関数関係が存在し，深海の場合には，

$$\sigma^2=gK$$

となる。$d\boldsymbol{A}(K)$ を実数と虚数部分に分解し，

$$d\boldsymbol{A}(K)=d\boldsymbol{A}_1(K)+id\boldsymbol{A}_2(K)$$

とするときは，$d\boldsymbol{A}_1(K)$，$d\boldsymbol{A}_2(K)$ は実数値過程でありそれぞれにおいて無相関増分過程であるとともに，相互においてもその増分は無相関である。したがって，式 (2.1) はつぎのように変形される。

$$\eta=\iint\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_1(K)-\iint\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_2(K) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

式 (2.2) よりつぎの結果がそれぞれ得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\eta}{\partial x}&=-\iint K_x\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_1(K)-\iint K_x\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_2(K)\\
\frac{\partial\eta}{\partial y}&=-\iint K_y\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_1(K)-\iint K_y\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_2(K)\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}&=-\iint K_x^2\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_1(K)+\iint K_x^2\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_2(K)\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}&=-\iint K_y^2\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_1(K)+\iint K_y^2\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)d\boldsymbol{A}_2(K)
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

いま，

$$\eta=\xi_1,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\xi_2,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\xi_3,\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\xi_4$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\xi_5$$

と表わし，また定常確率過程の理論から，

$$\overline{d\boldsymbol{A}_1(K)d\boldsymbol{A}_1(K)}=\overline{d\boldsymbol{A}_2(K)d\boldsymbol{A}_2(K)}=\frac{1}{2}\overline{d\boldsymbol{A}(K)d\boldsymbol{A}^*(K)}$$

ここで，* 印は conjugate value

bar は ensemble average

であることに留意すれば，$\xi_i, \xi_j$ の covariance function $R_{ij}$ はつぎのように示される。

$$\overline{\xi_i(t+\tau)\xi_j(t)}=R_{ij}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{ij}(\sigma)e^{i\sigma\tau}d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}C_{ij}(\sigma)\cos\sigma\tau\, d\sigma+\int_{-\infty}^{\infty}Q_{ij}(\sigma)\sin\sigma\tau\, d\sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

ここで，$f_{ij}(\sigma)$；cross-spectrum

* 正会員　運輸省港湾局防災課

$C_{ij}(\sigma)$; co-spectrum

$Q_{ij}(\sigma)$; quadrature spectrum

また directional spectrum $F(\sigma,\phi)$ を,

$$F(\sigma,\phi)d\sigma d\phi=\frac{1}{2}\overline{dA(K)dA^*(K)}$$

と表わすことにより，式 (2.2), (2.3), (2.4) からつぎのような $\xi_i,\xi_j$ の co-spectrum, quadrature spectrum が得られる。

$$\left.\begin{aligned}C_{11}&=\int_0^{2\pi}F(\sigma,\phi)\,d\phi\\C_{22}&=\int_0^{2\pi}K^2\cos^2\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\\C_{33}&=\int_0^{2\pi}K^2\sin^2\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\\C_{23}&=\int_0^{2\pi}K^2\cos\phi\sin\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.5)$$

$$\left.\begin{aligned}Q_{12}&=\int_0^{2\pi}K\cos\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\\Q_{13}&=\int_0^{2\pi}K\sin\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\\Q_{24}&=\int_0^{2\pi}K^3\cos^3\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\\Q_{35}&=\int_0^{2\pi}K^3\sin^3\phi\,F(\sigma,\phi)d\phi\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.6)$$

一方，$F(\sigma,\phi)$ を $\phi$ に関する Fourier 級数に展開すれば,

$$a_n+ib_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{ni\phi}F(\sigma,\phi)d\phi$$

これより式 (2.5),(2.6) を参照して，つぎの関係式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&a_0=\frac{1}{\pi}C_{11},\ a_1=\frac{1}{\pi K}Q_{12},\ a_2=\frac{1}{\pi K^2}(C_{22}-C_{33})\\&a_3=\frac{1}{\pi}\left(\frac{4Q_{24}}{K^3}-\frac{3Q_{12}}{K}\right),\ b_1=\frac{1}{\pi K}Q_{13}\\&b_2=\frac{2}{\pi K^2}C_{23},\ b_3=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3Q_{13}}{K}-\frac{4Q_{35}}{K^3}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(2.7)$$

なお，$a_3,b_3$ についてはつぎの表現も可能である。

$$\left.\begin{aligned}a_3&=\frac{1}{\pi K^3}(Q_{24}-3Q_{25})\\b_3&=\frac{1}{\pi K^3}(3Q_{34}-Q_{35})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.8)$$

このようにして，$F(\sigma,\phi)$ の $\phi$ に関する第3次高調成分まで $C_{ij},Q_{ij}$ との関係式が求められた。そこで $C_{ij}$, $Q_{ij}$ を算出するため，なんらかの形式で表面で波の記録をとる wave detector 5基を使用し，その座標位置を，(0,0), $(\varDelta x,0)$, $(0,\varDelta y)$, $(-\varDelta x,0)$, $(0,-\varDelta y)$ に設定する。これらの座標における波を $\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ と表わすとき，$\partial\eta/\partial x$ の代りに $(\eta_1-\eta_3)/2\varDelta x$ を適用すれば,

$$\frac{\eta_1-\eta_3}{2\varDelta x}=\mathcal{R}\iint e^{i(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)}\cdot i\cdot\frac{\sin(K_x\varDelta x)}{\varDelta x}dA(K)$$
$$=-\iint\sin(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)\frac{\sin(K_x\varDelta x)}{\varDelta x}dA_1(K)$$
$$-\iint\cos(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)\frac{\sin(K_x\varDelta x)}{\varDelta x}dA_2(K)$$
$$\cdots\cdots(2.9)$$

となり，$\eta_0$ と $(\eta_1-\eta_3)/2\varDelta x$ との covariance function はつぎのように示される。

$$\overline{\eta_0(t+\tau)\frac{\eta_1(t)-\eta_3(t)}{2\varDelta x}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma\tau\,d\sigma\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta x\cos\phi)}{\varDelta x}F(\sigma,\phi)d\phi$$

したがって，$\eta_0=\xi'_1$, $\dfrac{\eta_1-\eta_3}{2\varDelta x}=\xi'_2$ とすれば,

$$Q'_{12}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta x\cos\phi)}{\varDelta x}F(\sigma,\phi)d\phi\cdots(2.10)$$

の結果となる。同様にして,

$$\xi'_3=\frac{\eta_2-\eta_4}{2\varDelta y},\ \xi_4'=\frac{\eta_1-2\eta_0+\eta_3}{(\varDelta x)^2}$$

$$\xi_5'=\frac{\eta_2-2\eta_0+\eta_4}{(\varDelta y)^2}$$

とするならば,

$$\left.\begin{aligned}C'_{11}&=C_{11}\\C'_{22}&=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\sin(K\varDelta x\cos\phi)}{\varDelta x}\right\}^2F(\sigma,\phi)d\phi\\C'_{33}&=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\sin(K\varDelta y\sin\phi)}{\varDelta y}\right\}^2F(\sigma,\phi)d\phi\\C'_{23}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta x\cos\phi)}{\varDelta x}\\&\quad\times\frac{\sin(K\varDelta y\sin\phi)}{\varDelta y}F(\sigma,\phi)d\phi\\Q'_{13}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta y\sin\phi)}{\varDelta y}F(\sigma,\phi)d\phi\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots(2.11)$$

となり，また,

$$\xi_4'=\mathcal{R}\iint e^{i(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}+\sigma t)}\left\{-4\frac{\sin^2K_x\dfrac{\varDelta x}{2}}{(\varDelta x)^2}\right\}dA(K)$$

であるから,

$$\left.\begin{aligned}Q'_{24}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta x\cos\phi)}{\varDelta x}\\&\quad\times\frac{4\sin^2\left(K\cdot\dfrac{\varDelta x}{2}\cos\phi\right)}{(\varDelta x)^2}F(\sigma,\phi)d\phi\\Q'_{35}&=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(K\varDelta y\sin\phi)}{\varDelta y}\\&\quad\times\frac{4\sin^2\left(K\cdot\dfrac{\varDelta y}{2}\sin\phi\right)}{(\varDelta y)^2}F(\sigma,\phi)d\phi\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots(2.12)$$

が得られる。式 (2.11), (2.12) の各式は $\varDelta x,\varDelta y\to 0$ のとき式 (2.5),(2.6) の各式に収斂する。

$C'_{ij},Q'_{ij}$ から $C_{ij},Q_{ij}$ を推定するには，$\sin(K\varDelta x\cos\phi)$, $\sin(K\varDelta y\sin\phi)$ に Neumann の公式,

$$\sin(K\varDelta x\cos\phi)$$
$$=2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}J_{2m-1}(K\varDelta x)\cos(2m-1)\phi$$

$$\sin(K\Delta y\sin\phi)=2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m-1}(K\Delta y)\sin(2m-1)\phi$$

の適用も考えられるが，$F(\sigma,\phi)$ が未知関数であるから，これらをむしろ Taylor 級数に展開し，逐次近似によって誤差を小さくしてゆく方法が便利と思われる。すなわち，式 (2.10),(2.11),(2.12) を級数展開した場合，

$$\left.\begin{aligned}
C'_{11}&=C_{11}\\
C'_{22}&=C_{22}-\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{2}{3!}K^4\Delta x^2\cos^4\phi\\
&\quad-\Big(\frac{2}{5!}+\frac{1}{3!\times3!}\Big)K^6\Delta x^4\cos^6\phi+\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi\\
C'_{33}&=C_{33}-\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{2}{3!}K^4\Delta y^2\sin^4\phi\\
&\quad-\Big(\frac{2}{5!}+\frac{1}{3!\times3!}\Big)K^6\Delta y^4\sin^6\phi+\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi\\
C'_{23}&=C_{23}-\int_0^{2\pi}\Big\{\Big(\frac{1}{3!}K^4\Delta x^2\cos^3\phi\sin\phi\\
&\quad+\frac{1}{3!}K^4\Delta y^2\cos\phi\sin^3\phi\Big)-\Big(\frac{1}{5!}K^6\Delta x^4\cos^5\phi\sin\phi\\
&\quad+\frac{1}{5!}K^6\Delta y^4\cos\phi\sin^5\phi+\frac{1}{3!\times3!}K^6\Delta x^2\Delta y^2\cos^3\phi\\
&\quad\sin^3\phi\Big)+\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2.13)$$

$$\left.\begin{aligned}
Q'_{12}&=Q_{12}-\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{1}{3!}K^3\Delta x^2\cos^3\phi\\
&\quad-\frac{1}{5!}K^5\Delta x^4\cos^5\phi+\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi\\
Q'_{13}&=Q_{13}-\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{1}{3!}K^3\Delta y^2\sin^3\phi\\
&\quad-\frac{1}{5!}K^5\Delta y^4\sin^5\phi+\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi\\
Q'_{24}&=Q_{24}-\int_0^{2\pi}\Big\{\Big(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2\times3!}\Big)K^5\Delta x^2\cos^5\phi\\
&\quad+\Big(\frac{1}{5!}+\frac{1}{2\times3!\times3!}+\frac{2}{6!}\Big)K^7\Delta x^4\cos^7\phi\\
&\quad-\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi\\
Q_{53}'&=Q_{35}-\int_0^{2\pi}\Big\{\Big(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2\times3!}\Big)K^5\Delta y^2\sin^5\phi\\
&\quad+\Big(\frac{1}{5!}+\frac{1}{2\times3!\times3!}+\frac{2}{6!}\Big)K^7\Delta y^4\sin^7\phi\\
&\quad-\cdots\Big\}F(\sigma,\phi)d\phi
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2.14)$$

の結果が得られる。$F(\sigma,\phi)$ を $\phi$ の第3次成分まで考慮し，それ以上の高次成分を無視することは，

$$\begin{aligned}
F_1(\sigma,\phi)&=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\phi+b_1\sin\phi\\
&\quad+a_2\cos2\phi+b_2\sin2\phi\\
&\quad+a_3\cos3\phi+b_3\sin3\phi
\end{aligned}$$

なる $F_1(\sigma,\phi)$ が，

$$F_1(\sigma,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\sigma,\phi')G(\phi'-\phi)d\phi'\cdots(2.15)$$

$$\begin{aligned}G(\phi'-\phi)&=1+2\cos(\phi'-\phi)+2\cos2(\phi'-\phi)\\&\quad+2\cos3(\phi'-\phi)\end{aligned}$$

のごとく，$F(\sigma,\phi)$ に smoothing を行なったものと等価である。よって，式 (2.13)，(2.14) の右辺に含まれる $F(\sigma,\phi)$ を式 (2.15) に示される $F_1(\sigma,\phi)$ で置換し，これをまず $\xi'_i,\xi'_j$ の cross-correlation の Fourier 変換から得られる $C'_{ij},Q'_{ij}$ を利用して式 (2.7) から $F_1^{(0)}(\sigma,\phi)$ を算定する。このとき，式 (2.7) よりして $F_1^{(0)}(\sigma,\phi)$ の $F_1(\sigma,\phi)$ に対する誤差は，$O(K^2\Delta x^2)$，$O(K^2\Delta y^2)$ の位数に存在している。この $F_1^{(0)}(\sigma,\phi)$ を用いて式 (2.13)，(2.14) の右辺カッコ内の第1項までの積分を行ない，$C'_{ij},Q'_{ij}$ に修正を加え，同様に式 (2.7) によって $F_1^{(1)}(\sigma,\phi)$ を算定するときは，$F_1^{(1)}(\sigma,\phi)$ の $F_1(\sigma,\phi)$ に対する誤差は $O(K^4\Delta x^4)$，$O(K^4\Delta y^4)$ の位数にある。以下同様にして，積分されるべき右辺の項を逐次増加して，$F_1^{(2)}(\sigma,\phi)$，$F_1^{(3)}(\sigma,\phi)\cdots$ を求めれば，$F_1(\sigma,\phi)$ に対する近似の程度は上昇する。いま，$\Delta x=\Delta y$ となし，また $K^2\Delta x^2=\left(2\pi\cdot\frac{\Delta x}{L}\right)^2$ (ここで $L$ は波長) であることから誤差の程度を評価してみると，周期2秒の波を例にとれば，

$$K^2\Delta x^2=0.1$$

なるためには，

$$\Delta x=31.4\ \mathrm{cm}$$

となる。つぎに $\Delta x=50$ cm として周期3秒の波をとれば，

$$K^2\Delta x^2\fallingdotseq0.05$$

となる。したがって $\Delta x=50$ cm 程度とするときは，周期3秒以上の波については第1次の近似計算で十分であるが，それより小さい周期の波については，より高次の近似計算が必要となる。

これまでの考察は，$\xi'_2,\xi'_3,\xi'_4,\xi'_5$ が求められたものとしての議論であるが，別の観点からして，これらの本来の表現にたちもどり，つぎのように $\eta_i$ の相互の cross-spectrum を用いて，$C'_{ij},Q'_{ij}$ が得られる。なぜならば一つの例として，$\xi'_1,\xi'_2$ の covariance function は，

$$\begin{aligned}R'_{12}(\tau)&=\overline{\xi'_1(t+\tau)\xi'_2(t)}=\overline{\eta_0(t+\tau)\cdot\frac{\eta_1(t)-\eta_3(t)}{2\Delta x}}\\&=\frac{1}{2\Delta x}\{\overline{\eta_0(t+\tau)\eta_1(t)}-\overline{\eta_0(t+\tau)\eta_3(t)}\}\end{aligned}$$

で表わされ，$\eta_i,\eta_j$ の covariance function を $\tilde{R}_{ij}$，cross-spectrum を $\tilde{f}_{ij}$，co-spectrum を $\tilde{C}_{ij}$，quadrature spectrum を $\tilde{Q}_{ij}$ とするとき，

$$\begin{aligned}R'_{12}(\tau)&=\frac{1}{2\Delta x}\{\tilde{R}_{01}(\tau)-\tilde{R}_{03}(\tau)\}\\&=\frac{1}{2\Delta x}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{C}_{01}-\tilde{C}_{03})\cos\sigma\tau\,d\sigma\\&\quad+\int_{-\infty}^{\infty}(\tilde{Q}_{01}-\tilde{Q}_{03})\sin\sigma\tau\,d\sigma\Big\}\cdots(2.16)\end{aligned}$$

となる。ここで，一様なる定常確率過程の仮定からすれ

ば,

$$\widetilde{R}_{03}(\tau)=\widetilde{R}_{10}(\tau)$$

であり，また $\widetilde{R}_{ij}(\tau)$ が実数であることよりして cross-spectrum $\widetilde{f}_{ij}(\sigma)$ は,

$$\widetilde{f}_{ij}(\sigma)=\widetilde{f}_{ji}{}^{*}(\sigma) \quad \cdots\cdots(2.17)$$

のごとくエルミート共軛である。$\widetilde{f}_{ij}(\sigma)$ は,

$$\widetilde{f}_{ij}(\sigma)=\widetilde{C}_{ij}(\sigma)-i\widetilde{Q}_{ij}(\sigma) \quad \cdots\cdots(2.18)$$

であるから,

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{C}_{ij}(\sigma)&=\widetilde{C}_{ji}(\sigma)\\ \widetilde{Q}_{ij}(\sigma)&=-\widetilde{Q}_{ji}(\sigma)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.19)$$

となり，式 (2.16) は結局つぎのように変形される。

$$\begin{aligned}R'_{12}(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma\tau\cdot\frac{\widetilde{Q}_{01}(\sigma)}{\Delta x}d\sigma\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma\tau\cdot Q'_{12}(\sigma)d\sigma\end{aligned}$$

したがって,

$$Q'_{12}(\sigma)=\frac{\widetilde{Q}_{01}(\sigma)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots(2.20)$$

$Q'_{13}$ についても同様であり，$\Delta x=\Delta y$ とするとき,

$$Q'_{13}(\sigma)=\frac{\widetilde{Q}_{02}(\sigma)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots(2.21)$$

が得られる。他の cross-spectrum についても同様な手段により，つぎの結果が求められる。

$$\left.\begin{aligned}C'_{22}(\sigma)&=\frac{1}{2\Delta x^2}\{\widetilde{C}_{11}(\sigma)-\widetilde{C}_{13}(\sigma)\}\\ C'_{33}(\sigma)&=\frac{1}{2\Delta x^2}\{\widetilde{C}_{22}(\sigma)-\widetilde{C}_{24}(\sigma)\}\\ C'_{23}(\sigma)&=\frac{1}{2\Delta x^2}\{\widetilde{C}_{12}(\sigma)-\widetilde{C}_{14}(\sigma)\}\\ Q'_{24}(\sigma)&=\frac{1}{\Delta x^3}\{\widetilde{Q}_{13}(\sigma)+2\widetilde{Q}_{01}(\sigma)\}\\ Q'_{35}(\sigma)&=\frac{1}{\Delta x^3}\{\widetilde{Q}_{24}(\sigma)+2\widetilde{Q}_{02}(\sigma)\}\end{aligned}\right\} \cdots(2.22)$$

式 (2.22) の各式においては,

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{C}_{11}=\widetilde{C}_{33},\ \widetilde{C}_{22}=\widetilde{C}_{44}\\ &\widetilde{C}_{34}=\widetilde{C}_{21},\ \widetilde{Q}_{34}=\widetilde{Q}_{21}\\ &\widetilde{C}_{32}=\widetilde{C}_{41},\ \widetilde{Q}_{32}=\widetilde{Q}_{41}\\ &\widetilde{C}_{30}=\widetilde{C}_{01},\ \widetilde{Q}_{30}=\widetilde{Q}_{01}\\ &\widetilde{C}_{40}=\widetilde{C}_{02},\ \widetilde{Q}_{40}=\widetilde{Q}_{02}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.23)$$

の関係が成立つものとしている。したがって逆に，つぎのように,

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{C}_{11}=\widetilde{C}_{22}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{5}\\ &\quad\times\{\widetilde{R}_{00}+\widetilde{R}_{11}+\widetilde{R}_{22}+\widetilde{R}_{33}+\widetilde{R}_{44}\}\cos\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{C}_{12}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\{\widetilde{R}_{12}+\widetilde{R}_{21}+\widetilde{R}_{43}+\widetilde{R}_{34}\}\cos\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{C}_{13}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\widetilde{R}_{13}+\widetilde{R}_{31}\}\cos\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{C}_{14}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\{\widetilde{R}_{14}+\widetilde{R}_{41}+\widetilde{R}_{23}+\widetilde{R}_{32}\}\cos\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{C}_{24}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\widetilde{R}_{24}+\widetilde{R}_{42}\}\cos\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{Q}_{01}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\{\widetilde{R}_{01}+\widetilde{R}_{30}-\widetilde{R}_{10}-\widetilde{R}_{03}\}\sin\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{Q}_{02}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}\{\widetilde{R}_{02}+\widetilde{R}_{40}-\widetilde{R}_{20}-\widetilde{R}_{04}\}\sin\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{Q}_{13}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\widetilde{R}_{13}-\widetilde{R}_{31}\}\sin\sigma\tau\,d\tau\\ \widetilde{Q}_{24}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\widetilde{R}_{24}-\widetilde{R}_{42}\}\sin\sigma\tau\,d\tau\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(2.24)$$

$\widetilde{C}_{ij},\widetilde{Q}_{ij}$ を算定し，これらを用いて $C'_{ij},Q'_{ij}$ を求めれば，$F_1(\sigma,\phi)$ の信頼度は増加する。

discrete sampling による場合には，つぎのように aliased spectrum が発生する。すなわち,

$$\widetilde{R}_{ij}(n\Delta t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\sigma n}{}_{(a)}\widetilde{f}_{ij}(\sigma)d\sigma \quad \cdots\cdots(2.25)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ij}(n\Delta t)&=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\sigma/\Delta t)n\Delta t}{}_{(a)}\widetilde{f}_{ij}(\sigma)\,d\sigma\\ &=\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}e^{i\sigma' n\Delta t}{}_{(a)}\widetilde{f}_{ij}(\sigma'\Delta t)\Delta t\,d\sigma'\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(2.26)$$

ここで,

$$\sigma=\sigma'\Delta t$$

一方，式 (2.4) より $m$ を整数とするとき,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ij}(n\Delta t)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sigma n\Delta t}\widetilde{f}_{ij}(\sigma)d\sigma\\ &=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{(2m-1)\cdot\pi/\Delta t}^{(2m+1)\cdot\pi/\Delta t}e^{i\sigma n\Delta t}\widetilde{f}_{ij}(\sigma)d\sigma\\ &=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}e^{in\Delta t\left(\sigma+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)}\widetilde{f}_{ij}\left(\sigma+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)d\sigma\\ &=\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t}\mathrm{e}^{i\sigma n\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_{ij}\left(\sigma+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)d\sigma\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(2.27)$$

式 (2.26),(2.27) を比較することにより,

$${}_{(a)}\widetilde{f}_{ij}(\sigma\Delta t)\Delta t=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_{ij}\left(\sigma+\frac{2m\pi}{\Delta t}\right)$$

$$\cdots\cdots(2.28)$$

の結果が得られる。式 (2.28) をくわしく表現すれば,

$$\left.\begin{aligned}{}_{(a)}\widetilde{C}_{ij}(\sigma\Delta t)\Delta t=\widetilde{C}_{ij}(\sigma)&+\widetilde{C}_{ij}\left(\frac{2\pi}{\Delta t}+\sigma\right)\\ &+\widetilde{C}_{ij}\left(\frac{2\pi}{\Delta t}-\sigma\right)\\ &+\widetilde{C}_{ij}\left(\frac{4\pi}{\Delta t}+\sigma\right)\\ &+\widetilde{C}_{ij}\left(\frac{4\pi}{\Delta t}-\sigma\right)\\ &+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(2.25)$$

$$\left.\begin{aligned}{}_{(a)}\widetilde{Q}_{ij}(\sigma\Delta t)\Delta t=\widetilde{Q}_{ij}(\sigma)&+\widetilde{Q}_{ij}\left(\frac{2\pi}{\Delta t}+\sigma\right)\\ &-\widetilde{Q}_{ij}\left(\frac{2\pi}{\Delta t}-\sigma\right)\\ &+\widetilde{Q}_{ij}\left(\frac{4\pi}{\Delta t}+\sigma\right)\end{aligned}\right.$$

$$-\tilde{Q}_{ij}\left(\frac{4\pi}{\Delta t}-\sigma\right)\Bigg| \\ +\cdots\cdots \Bigg) \qquad \cdots\cdots(2.30)$$

となる。式 (2.28),(2.29),(2.30) の左辺は，その導き方よりして $\Delta t$ を無次元量とみるべきである。$F_1(\sigma,\phi)$ の算定において，比較的長い周期の波を対象とするときには，$\Delta t$ のとり方に余裕があるので，discrete sampling によって求めることもできるが，短い周期の波を問題にするときは，aliasing を防ぐ手段に余裕がないため近似計算には folding されたエネルギーが入りこみ，近似の程度を悪化させることが予想される。したがってこの場合には continuous recording にもとづいて算定するのが望ましい。

算定された $F_1(\sigma,\phi)$ が負になる場合に対する修正は，現実に得られた結果にもとづいて，妥当な weighting function を用いて smoothing を行なうようにする。

## 参考文献


1) W.J. Pierson, Jr. et al.: The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the Stereo Wave Observation Project, Meteorological papers, Vol. 2, No. 6, 1960, New York Univ.

2) W.H. Munk, G.R. Miller, F.E. Snodgrass, N.F. Barber: Directional recording of swell from distant Storms, Phil. Trans. of Royal Society, A. 1062, Vol. 255, Apr. 1963.

3) M.S. Longuet-Higgins, D.E. Cartwright, N.D. Smith: Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Proc. of a Conf., Ocean wave spectra, Prentice Hall, 1963.

4) N.R. Goodman: On the joint estimation of the spectra, co-spectrum and quadrature spectrum of a two-dimensional stationary Gaussian process, Tech, Rep. No. 8, David Taylor Model Basin, Mar. 1957.

5) 国沢清典：近代確率論，岩波全書，142，1962.