振動流中におかれた円柱に働く抗力と円柱まわりの流況

日 野 幹 雄*・日 野 和 子

1. 序　　論

（1） 数値実験の隆盛

最近の大容量高速度の電子計算機の発達にともなって，科学のあらゆる分野で数値実験がさかんとなりつつあり，海岸工学の分野でも種々の問題が採りあげられている。これらの数値計算は Navier-Stokes の方程式そのものではなく，これを平均化した流体の運動方程式を解いている。それゆえに，渦動粘性係数とか摩擦係数のような経験的もしくは半経験的係数が導入されており，真に N-S 方程式を解いたことにはならない。

一方，N-S 方程式そのものの数値解を求める試みは，すでに 1933 年 Thom[1] により一様流中の円柱まわりの流れに対して試みられた。その後，1953 年前後には川口[2] がいくつかの Reynolds 数の場合に同様な問題を取り扱った。これらの研究は，今日のような電子計算機のないときに行なわれたものであり，定常解とはいえ，大変な困難がともなったと思われる。

電子計算機による N-S 方程式の数値解は Payne[3] の研究が表われて後，急激にさかんになり，Fromm & Harlow[4),5),6)]，広田・都田[7]， Pearson[8),9)] らの研究が相ついで発表された。ことに Fromm & Harlow の研究は，数値実験に対するわれわれの認識を一変するものであった。すなわち，計算結果は電子計算機に直結する Stronberg-Carlson microfilm recorder によりつぎつぎと図化され，これを映写すればあたかも室内実験を見るように（あるいはそれ以上に）流線・vorticity-streak line などの流れの様相を知ることができた。広田・都田の研究は有限の粗い mesh で円柱表面での no-slip の条件を与えたこと，Pearson の研究は差分近似の近似度や iteration の収束性を高めた点に特色がある。

（2） その意義と可能性と限界

このような数値実験はこれまでに海岸工学の分野でも高潮・津波・セイシュ・harbor paradox・冷却水などの問題について行なわれて来ており，今後，ますますさかんになるであろうし，またそうでなければならないと思う。

現在のところ電子計算機の memory 数の制約や非線型項による計算不安定などの技術上の問題から，室内実験（場合によっては現場観測）に取ってかわるほど all mighty ではないけれども，これらの制約は近い将来において解決せられるものであり本質的な障害ではない。

このような数値実験は，ある場合には実験費用や期日の点で従来の実験より有利であり（大気拡散の例では計算費用は実測や風洞実験の約 1/10 あるいはそれ以下[11)]），また高潮や冷却水の問題のように実験が困難な現象の予測をも可能にした。

また，種々の現象の理論は2次元問題についてたてられるが，この実験的検証をする上では数値実験の方が2次元性の仮定を完全に実現しうる利点がある。著者らがこの計算を思い立ったのも，ここ数年来つづけて来た Miles-Phillips の風波発生理論に基づく風波特性の研究の検証を行なうためである。

しかし，このような多様な可能性にもかかわらず，数値実験にはまた本質的な限界がある点にも留意しなくてはならない。数値実験は現象の局所的な力のバランスを記述する微分方程式を機械的に綴合せて解を得る一つの実験的手法にすぎないのであって， Fromm & Harlow が主張するような“理論的研究”と見なすことはできない。すなわち，数値実験は答は与えてくれるが“なぜ”

表—1 Navier Stokes 方程式の数値解の研究

研究者 (発表年)	物体	定常性	Re	計算機	注
Thom (1933)	円柱	定常	10,20	—	
川口光年 (1953, 54)	円柱	定常	40	—	
Payne (1958)	円柱	非定常	40,100	(電子計算機)	$Re=100$ で vortex の非対象性あらわれず；一様流
Fromm & Harlow (1963)*	平板	非定常	15～6 000	IBM 7090	perturbation の導入により Karman 渦が発生；一様流
Harlow & Fromm (1964)	平板	非定常	50～400	IBM 7094	熱輸送もふくむ；一様流
広田・都田 (1965)	円柱	非定常	40,100	IBM 704	truncation error のため $Re=100$ では Karman 渦が発生；一様流
Pearson (1965)	—	非定常	—	—	
今井 功 (1965)[10)]	三次元地形	定常	—	Control Data G-20	自由大気と境界層の二層に分けて解く，Re は乱流 Re
日野 (1965)	円柱	非定常	0.2,100	IBM 7090	振動流

*） $Re>1\,000$ では計算不安定を生じた。

* 正会員　工博　電力中央研究所技術研究所

また“いかにして”の説明をすることはできない。たとえば，流れに perturbation を与えて Karman vortex の発生を作ることができてもその発生の機構は未解決である。これに関しては，Sato の平板後流の理論・実験が部分的解明を与えている。

また，現象の分析と理解が十分でない場合（拡散係数・混相流・漂砂等）にも数値実験は無力である。なぜならば，現象の理解によるモデル化と数式記述ができないからである。

このように，問題の解明には現象の本質を探る人間の智力が必要であり，過程や結果の理解と説明のための数学的手法の発達・応用が大いに望まれるところである。

2. 運動方程式・境界条件・計算法

（1） 基礎方程式

円柱まわりの振動流を考える。問題を2次元非圧縮性流体とすれば，Navier-Stokes の運動方程式，連続式は，

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

である。ここに，x•y：座標（主流方向を x），u•v：それぞれ x•y 方向の流速成分，p：圧力，ρ：密度，μ：粘性係数である。

流れ関数 ψ および渦度 ω,

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \quad \cdots\cdots(5)$$

を導入すれば，式 (1),(2),(3) より p が消去され流体の運動は ω,ψ に関する式 (6),(7) で表わされる。

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega \quad \cdots\cdots(7)$$

長さの単位を円柱半径 a，流速の単位を無限遠での流速 U_∞ にとり，$x/a, y/a, u/U_\infty, \omega a/U_\infty, \psi/aU_\infty, tU_\infty/a$ を新しく無次元量 x,y,u,ω,ψ,t と書けば，式 (6) は，

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{2}{Re}\Delta\omega \quad \cdots\cdots(8)$$

となる。ここに，$Re=2aU_\infty/\nu$ は Reynolds 数，$\Delta=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$ である。式 (7) の形は無次元化しても同じである。

なお，圧力の方程式（無次元化式）は，

$$\Delta p=4\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right] \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。

Helmholtz の vorticity 方程式 (6) または式 (8) を用いることの利点は，計算を円柱近辺の non-zero vorticity の所に限ることができる点である。無限遠で与えられる境界条件を満足するよう川口や Payne は座標変換を行なったが，ここでは種々の問題を対象としてプログラムを行なうつもりであり座標変換は行なわない。

（2） 差　分　式

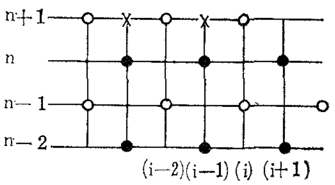
式 (7),(8) を差分化する際には，これらの式が非線型項をふくんでいるから計算不安定を生じないようにいろいろの式型や方法が考えられている。式 (8) は t に関する前進型差分式（explicit expression）とすることもできる（この方が計算時間が少ない）けれども，計算の安定性という点から式 (7) についてと同様，連立型（implicit expression）とする方が良い。

連立型の差分式としては，広田・都田の用いた式と，Pearson の式がある。二，三の計算の後，広田らの式は時間ステップの奇数時と偶数時の coupling が弱く不都合な結果がみられたので，Pearson 法によることにした（この奇数時と偶数時ステップとの coupling は著者らが前に行なった高潮計算にも問題となった*）。

流れの場を間隔 $\Delta x=\Delta y=h$ の格子間隔に区切り，Δt ごとに式(7),(8)を数値積分する。$\omega^{(n)}_{i,j}$，$\psi^{(n)}_{i,j}$ をそれぞれ点 (ih, jh)，時間 $n\Delta t$ での ω および ψ とすれば，つぎの差分表示が得られる。

$$\begin{aligned}
\omega^{(n+1)}_{i,j}-\omega^{(n)}_{i,j}=&\left(\frac{\Delta t}{Reh^2}\right)(\Delta_h\omega^{(n+1)}_{i,j}+\Delta_h\omega^{(n)}_{i,j})\\
&+\frac{\Delta t}{16h^2}(\omega^{(n+1)}_{i,j+1}+\omega^{(n)}_{i,j+1}-\omega^{(n+1)}_{i,j-1}-\omega^{(n)}_{i,j-1})\\
&\times(\psi^{(n+1)}_{i+1,j}+\psi^{(n)}_{i+1,j}-\psi^{(n+1)}_{i-1,j}-\psi^{(n)}_{i-1,j})\\
&-\frac{\Delta t}{16h^2}(\omega^{(n+1)}_{i+1,j}+\omega^{(n)}_{i+1,j}-\omega^{(n+1)}_{i-1,j}-\omega^{(n)}_{i-1,j})\\
&\times(\psi^{(n+1)}_{i,j+1}+\psi^{(n)}_{i,j+1}-\psi^{(n+1)}_{i,j-1}-\psi^{(n)}_{i,j-1})
\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10)$$

* 一般に差分式は，空間的に 1 mesh ずつずれ，時間的にも 1 step ずれた2組の格子系を用いて計算することになる。この点を利用して計算時間や格子点数を減らす方法が，Eliassen 法や Platzman 法である。連立型差分式を解く場合にもこうした方法が応用しうるであろう。下図において○印の格子系 I と●印の格子系 II とは“差”の形で結び付いているが，絶対値では結びついていない。それゆえ，coupling に問題がある。×印点は $(n+1)$ step の iteration のための内挿点を示す。



ここに,

$$\Delta_h \omega_{i,j}^{(n)}=\omega_{i+1,j}^{(n)}+\omega_{i-1,j}^{(n)}+\omega_{i,j+1}^{(n)}+\omega_{i,j-1}^{(n)}-4\,\omega_{i,j}^{(n)} \quad \cdots\cdots(11)$$

式 (10) は $\omega_{i,j}^{(n+1)}$ を右辺にまとめると,

$$\omega_{i,j}^{(n+1)}=\left[1+\frac{4\Delta t}{Re\,h^2}\right]^{-1}\left[\left(\frac{\Delta t}{Re\,h^2}\right)(\omega_{i+1,j}^{(n+1)}+\omega_{i-1,j}^{(n+1)}+\omega_{i,j+1}^{(n+1)}+\omega_{i,j-1}^{(n+1)}+\Delta_h\omega_{i,j}^{(n)})\right.$$
$$+\frac{\Delta t}{16h^2}\{(\omega_{i,j+1}^{(n+1)}+\omega_{i,j+1}^{(n)}-\omega_{i,j-1}^{(n+1)}-\omega_{i,j-1}^{(n)})\times(\psi_{i+1,j}^{(n+1)}+\psi_{i+1,j}^{(n)}-\psi_{i-1,j}^{(n+1)}-\psi_{i-1,j}^{(n)})$$
$$\left.-(\omega_{i+1,j}^{(n+1)}+\omega_{i+1,j}^{(n)}-\omega_{i-1,j}^{(n+1)}-\omega_{i-1,j}^{(n)})\times(\psi_{i,j+1}^{(n+1)}+\psi_{i,j+1}^{(n)}-\psi_{i,j-1}^{(n+1)}-\psi_{i,j-1}^{(n)})\}\right] \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。また, ψ については式 (13) のようになる。

$$\psi_{i,j}^{(n+1)}=\frac{1}{4}[\psi_{i+1,j}^{(n+1)}+\psi_{i-1,j}^{(n+1)}+\psi_{i,j+1}^{(n+1)}+\psi_{i,j-1}^{(n+1)}+h^2\omega_{i,j}^{(n+1)}] \quad \cdots\cdots(13)$$

式 (12), (13) の右辺は, 今求めようとする未知数の $(n+1)$ ステップの ω, ψ をふくんでいるが, これらの式は accelerated (or extrapolated) Liebmann 法[12] による relaxation 法で解くことができる。すなわち, 式 (12) あるいは, 式 (13) から一応 ω, ψ の近似値が求まったら (これを $\{\omega_{i,j}^{(n+1)}\}'_{k+1}$ と書く), これを加速係数 φ で加速して第 $(k+1)$ 近似,

$$\{\omega_{i,j}^{(n+1)}\}_{k+1}=(1-\varphi)\{\omega_{i,j}^{(n+1)}\}_k+\varphi\{\omega_{i,j}^{(n+1)}\}'_{k+1} \quad \cdots\cdots(14)$$

をつくり, ただちに電子計算機の memory の第 k 近似 $\{\omega_{i,j}^{(n+1)}\}_k$ と置き換える。このような方法は memory 数が少なくてすむ上に収束も早くなる。加速係数 φ は一般に $1\leq\varphi<2$ の範囲にあり, $\varphi=1$ の場合が Liebmann 法である。

なお, $\omega^{(n+1)}\cdot\psi^{(n+1)}$ の第1近似値としては $\omega^{(n-1)}$ と $\omega^{(n)}, \psi^{(n-1)}$ と $\psi^{(n)}$ などから外挿した値を用いる。

(3) 境界条件

方程式 $\Delta\psi=-\omega$ の意味の視覚的なとらえ方は, ψ をゴム膜のたわみ, ω を単位荷重/張力とみなすことである。したがって, 式 (7) の解が定まるには四辺の境界のうち少なくとも相対する二辺での ψ の値を境界値として与えなければ解は決定しない。他の二辺は必ずしも境界値を与えなくとも, ψ の急激な変化はないとして2階微分係数を0とすれば十分である。ここでは, 流れに平行な壁面を free slip と考え,

$$\left.\begin{aligned}\psi_{i,1}&=(1-j_0)\,h[K+(1-K)\sin 2\pi ft]\\ \psi_{i,j\max}&=(j_{\max}-j_0)\,h[K+(1-K)\sin 2\pi ft]\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)$$

とし, 流入・流出部で,

$$\left.\begin{aligned}\psi_{1,j}&=2\psi_{2,j}-\psi_{3,j}\\ \psi_{i\max,j}&=2\psi_{i\max-1,j}-\psi_{i\max-2,j}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(16)$$

ととる。

ω の境界条件として, 流れに平行な辺では $\omega=0$ とする。式 (12) のような移流型の方程式では流入端での境界条件のほかに数値計算上は流出端での境界条件も必要となる。新田[13),14)] はいくつかの境界条件式の適否を調べており, 広田・都田はその一つとして $\partial^2\omega/\partial x^2=0$ を用いた。著者らもこの条件を用いた。(5) に述べる Pearson の方法により式 (19) を用いることはいけない。式 (19) を ω, ψ について二重に使うことになるからである。

(4) 円柱まわりの境界条件

円柱表面では no slip の条件が満たされなければならない。すなわち,

$$\psi=\text{const} \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\partial\psi/\partial n=0 \quad \cdots\cdots(18)$$

また ω は,

$$\omega=h^{-2}\Delta_h\psi \quad \cdots\cdots(19)$$

しかし, 円柱自身を表現するほど格子間隔を細くすることは実際上不可能であり, 直接上の条件を用いるわけにはゆかない。それゆえ, 円柱表面に最も近い格子点の値を上の束縛条件から決める二, 三の方法がある[7),15)]。

(5) 境界値・内部値の平滑化

今解こうとする $(n+1)$ ステップの $\omega^{(n+1)}$ の円柱まわりの境界値は, さきにのべたように $\psi^{(n-1)}, \psi^{(n)}$ の外挿から求めた $\psi^{(n+1)}$ の近似値から式 (19) で与えられる (広田・都田の方法では $\psi^{(n)}$ から式 (19) で求めた境界値 $\omega^{(n)}$ を $\omega^{(n+1)}$ と仮定している)。それゆえ, Δt が大きくなると $\omega^{(n+1)}$ の値の信頼度が低くなる。そこで, 式 (12) の解として内部点の $\omega^{(n+1)}$ が求められ, さらに式 (13) で $\psi^{(n+1)}$ が一応与えられると, すぐつぎの $(n+2)$ ステップに進まずに, $\psi^{(n+1)}$ から逆に $\omega^{(n+1)}$ の境界値 (これを $[\omega_1^{(n+1)}]'_{p+1}$ と記す) を求め $(n+1)$ ステップの計算をくり返す。ただし, $(p+1)$ サイクル目の境界値 $[\omega_1^{(n+1)}]_{p+1}$ は p サイクル目の境界値 $[\omega_1^{(n+1)}]_p$ と, このときの $[\psi^{(n+1)}]_p$ から定まる境界値 $[\omega_1^{(n+1)}]'_{p+1}$ との加重平均値とする。

$$[\omega_1^{(n+1)}]_{p+1}=\alpha[\omega^{(n+1)}]_p+(1-\alpha)[\omega_1^{(n+1)}]'_{p+1} \quad \cdots\cdots(20)$$

p サイクル目と $(p+1)$ サイクル目の ω の境界値の差がなくなったらつぎの $(n+2)$ 時間ステップに移る。

ω の境界値の平滑化 (boundary smoothing) と同様に, ω の内部値の平滑化 (internal smoothing) も計算

不安定を防ぐこと，時間間隔 Δt を大きくとること，iteration の回数を減す上に有効である。

この Pearson の平滑化法は，ψ の relaxation 計算に適用すればやはり iteration 回数をいちじるしく減ずることができる。すなわち，ψ の relaxation 計算では内部値の $(n+1)$ ステップの第 k 近似が求まると，式 (16)，(18) により四辺および円柱まわりの境界値の第 $(k+1)$ 近似値を挿定しなければならない。この場合にも，

$$\{\psi_1{}^{(n+1)}\}_{k+1}=\beta\{\psi_1{}^{(n+1)}\}_k+(1-\beta)\{\psi_1{}^{(n+1)}\}'_{k+1} \quad \cdots\cdots(21)$$

とする。この平滑化は，iteration のたびごとに行なう点が ω の場合と異なる。

（6） 計 算 法

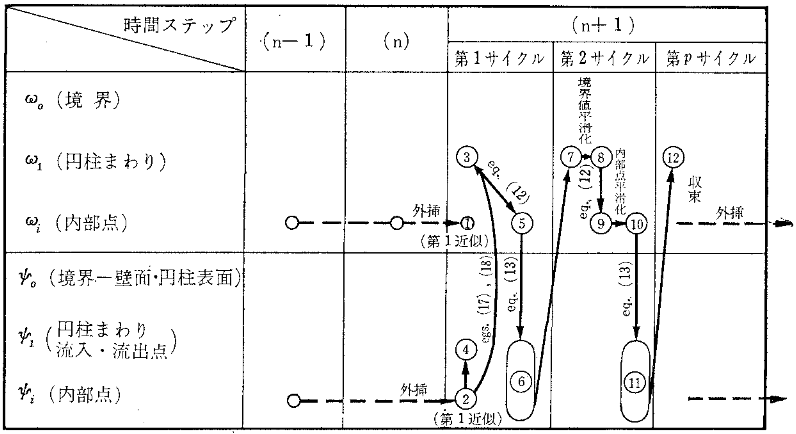
計算の順序は 表—2 のようである。ⓘ $(n-1)\cdot(n)$ ステップの値から $(n+1)$ ステップの $\omega\cdot\psi$ の内部値の第1近似値を外挿する。ⓘⓘ 外挿した $\psi^{(n+1)}$ の内部値から式 (16)，(17)，(18)，(19) により $\omega\cdot\psi$ の境界値の第1近似を定める。ⓘⓘⓘ 式 (12) により accelerated Liebmann 法で ω の内部値を定める。第2サイクル以後ならば ω の internal smoothing を行なう。ⓘⓥ 上の ω の解を用いて式 (13) から ψ の内部値を求める。この際 ψ の境界値は iteration のたびごとに式 (16)，(18)，(21) で修正し boundary smoothing を行なう。ⓥ この ψ から式 (19) により，再び $(n+1)$ ステップの ω の境界値を求める。もし，ⓘⓘⓘ での境界値との誤差が大きければ，boundary smoothing の後 ⓘⓘⓘ～ⓥ の計算をくり返す。ⓥⓘ ω の円柱まわりの境界値が所定の誤差以内に収束すれば，$(n+2)$ ステップの計算に移行する。

このような計算方法は一見非常に煩鎖のようにみえる。しかし，たとえば式 (6)，(7) から ψ に関する4次式1個になおすこともできるけれども，計算の収束性は $\omega\cdot\psi$ に関する2個の方程式を解く場合よりはなはだ不利である。また，Fromm & Harlow の前進型の vorticity 差分式はもちろん，広田・都田の連立型にくらべても Pearson 法はすぐれている。著者らは，はじめ Fromm らに刺戟されてこの計算をはじめたが，この3つの方法がつぎつぎに発表されるごとにプログラムの変更を行なって得た結論である。

（7） 抗力・揚力

流れの中に置かれた物体に働く抗力・揚力 (P_x, P_y) は，物体を囲む閉曲線内の運動量の増加から求められる。

表—2 計 算 の 方 法



$$-P_x+iP_y=i\oint p d\bar{z}+\frac{\partial}{\partial t}(Q_x-iQ_y)+Q_x{}^*-iQ_y{}^* \quad \cdots\cdots(22)$$

ここに，$Q_x{}^*\cdot Q_y{}^*$ は領域外への運動量束，

$$Q_x{}^*=\rho\oint u\,\partial\psi/\partial s\,ds,\quad Q_y{}^*=\rho\oint v\,\partial\psi/\partial s\,ds \quad \cdots\cdots(23)$$

であり，$Q_x\cdot Q_y$ は領域内の運動量，

$$Q_x=\rho\iint u\,dx\,dy,\quad Q_y=\rho\iint v\,dx\,dy \quad \cdots\cdots(24)$$

である。式 (24) は Phillips によれば[16]，vorticity ω を用いて，

$$Q_x=\rho\iint \omega y\,dy\,dx,\quad Q_y=-\rho\iint \omega x\,dx\,dy \quad \cdots\cdots(25)$$

と表わすことができる。

したがって，

$$D_0=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\iint \omega y\,dx\,dy\right]-\rho\oint u\frac{\partial\psi}{ds}ds-R\left\{i\oint p d\bar{z}\right\} \quad \cdots\cdots(26)$$

抗力・揚力は円柱表面に働く圧力・せん断力の分力として求めることもできる。この場合には全抵抗にしめる形の抵抗 (form or pressure drag) と表面抵抗 (skin friction drag) の割合を知りうる。これを無次元形に書けば[7]，

$$D_0=D_v+D_p \quad \cdots\cdots(27)$$

$$D_v=-\frac{2}{Re}\int_0^{2\pi}\omega_0\sin\theta\,d\theta \quad \cdots\cdots(28)$$

$$D_p=-\int_0^{2\pi}p_0\cos\theta\,d\theta \quad \cdots\cdots(29)$$

となる。suffix 0 は円柱表面の値を意味する。

3．計算結果および検討

（1） 計 算 結 果

Reynolds 数が 0.2，流れの振動数(真の振動数を a/U_0 倍して無次元化した値) が5の場合と，Reynolds 数が

100 で，振動数が 0.5 の場合について計算を行なった。前者は，Stokes の理論解と比較するため，後者は定常流の場合とくらべるためである。

結果は 図—**1**,**2**,**3**,**4** に示すようになる。$Re_0=(2aU_0/\nu)=100$ の場合は 3/4 サイクルでほぼ定常状態に達していると思われるが，$Re_0=0.2$ の場合はまだ過渡状態である。

(2) Stokes の解

Reynolds 数が十分小さい，いわゆる Stokes 近似の成立する範囲で，円柱が静水中を $U_0 \sin\omega t$ の振動をするときの抗力は[17]，

$$F=M'U_0\omega \times(k\cos\omega t+k'\sin\omega t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

である。ここに，$M'=\pi\rho a^2 l$ であり，k, k' は $\beta=a^2\omega/\nu$ の関数である。β が十分大きければ，

$$k=1+2\sqrt{(2/\beta)} \cdots\cdots(31)$$

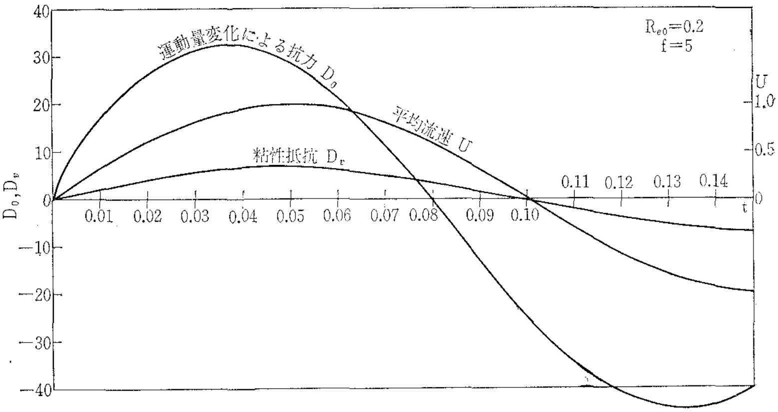
$$k'=2\sqrt{(2/\beta)}+2/\beta \cdots(32)$$

となる。式 (30) のうち，

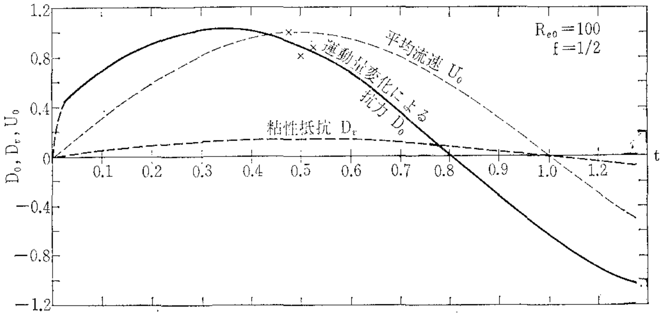
$$-M'U_0\omega k\cos\omega t=-M'k\partial U/\partial t$$

は，いわゆる virtual mass の項で，流体が完全流体ならば $k=1$ となる。式 (30) は $\beta\gg1$, $Re_0\ll1$, あるいは $\omega a/U_0\gg1$ の場合に成立する。実験的にも $a>10U_0$ の場合に Stuart らの検証がある。ここで行なった計算のうち，$Re=0.2$ の場合が，これにあたるけれども，求められた抗力は Stokes の解よりはるかに小さい。これはまだ運動が定常化していないことにもよるが，むしろ側壁のために物体の影響による流体の変形が押えられたためと考えられる。Re が小さい場合の抵抗は変形抵抗で無限遠にその影響がおよぶ性質のものだか

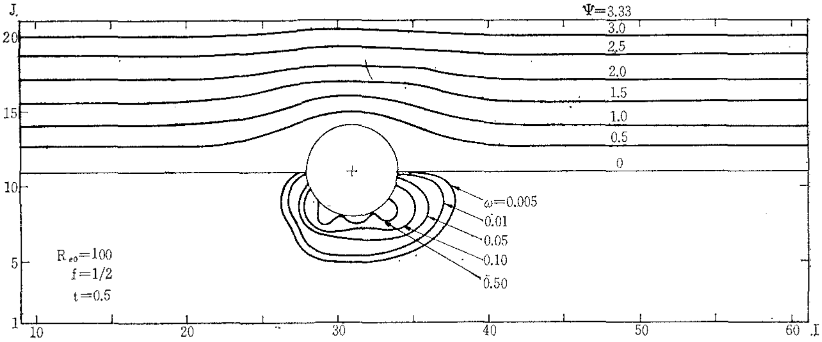
図—1



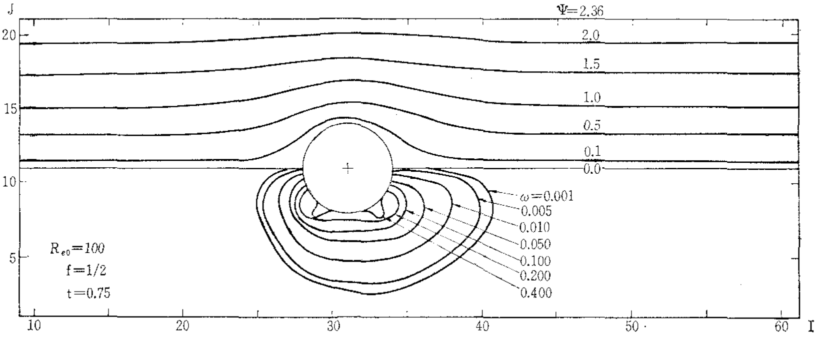
図—2



図—3



図—4



らである。

(3) 振動周期と渦の発生

McNown & Keulegan[18) によれば，非定常流中の物体の抗力は Strouhal time（流れの振動周期 T_0 と Strouhal 数 $S=2f_0a/U_0$ で定義される物体からの渦の発生周期 T_vの 比$\sim T_0/T_v$）が重要なパラメーターである。

T_0/T_v が 10 より大きければ，流れはほぼ準定常であり，また 0.1 より小さければ渦の発生は重要ではない。

定常流では Karman 渦は $Re_0>40$ で発生する。Re_0と S との関係は，$S=0.212-(4\cdot5/Re)=0.167$。したがって

$$Re_0=0.2 \quad T_0/T_v=0$$

$$Re_0=100 \quad T_0/T_v=f_v/f_0=0.167$$

である。後者は，渦の発生の影響をうける下限に近いが，ψ や ω の分布図からはその様子を認めることができない。ただ，$t=0.5$ くらいのときの抗力にバラツキが現われた。これが，流れの不安定による渦の発生と関係するか，単なる計算誤差かは明らかでない。

(4) 周期的抗力

振動流中に置かれた物体に働く力はつぎの3つの作用――流速に関係する抗力，周囲の流体を加速するための圧力勾配による力，慣性力――よりなる。

$$F=C_D\rho\, 2\, al\frac{U^2}{2}+\rho l\, \pi a^2 U_0 \times\left\{\frac{d(kU/U_0)}{dt}+\frac{d(U/U_0)}{dt}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

あるいは，$D=F/\rho l a U_0^2$ とすれば，

$$D=C_D(U/U_0)^2+(\pi a/U_0)(k+1)\frac{d(U/U_0)}{dt} =C_D(Re)\frac{Re}{Re_0}\sin\omega t+\frac{\pi a\omega}{U_0}(k+1)\cos\omega t \quad\cdots\cdots(34)$$

となり，式(30)と同じ形となる（$C_D(Re)Re/Re_0$ は定数と考えて良い）。

一般の実用範囲のRe域では C_D は定常流の場合の値，$(k+1)$ は 2.0 よりやや小さい値を取ることが実験的に認められている[19)。ここで行なったような Re の小さい場合（$Re=100$）にも $C_D=0.9$ であり，定常流の値 $C_D=1.05$ にきわめて近い。しかし，慣性項の係数は 0.63 で小さすぎる値となる。これは，式（26）右辺の第3項（圧力項）を省いたためと思われる。Payne その他の一様流の数値実験では，これは省略された項であり，圧力勾配の影響が大きいことがわかる。

(5) 流線・渦度・粘性抵抗

定常流の場合とくらべると流線の変形はきわめて少なく，また渦度の発生も円柱の前後の非対象度が少ない。Re が 40 を越えた $Re=100$ の場合にも不安定にもとづく vortex の発生は第一サイクルではみられない。粘性にもとづく抵抗係数は 0.15 で，定常流の場合の 0.34 の半分くらいである[7),20)（$Re_0=100$）。これは円柱まわりの境界層の発達が十分でないことを考えれば当然であろう。なお，渦度 ω が円柱より最も遠くにおよぶのは，$Re_0=100$ の場合で $t=0.75$，つまり加速度項の最大時よりやや遅くなり，流れの逆流との中間くらいにあたる。

参 考 文 献

1) Tohm, A. : The flow past circular cylinders at low speeds, Proc. Roy. Soc. Lond. A. Vol. 141, 651-669 (1933).
2) Kawaguchi, M. : Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 8, 747-757 (1953).
3) Payne, R.B. : Calculations of unsteady viscous flow past a circular cylinder, J. Fluid Mech. Vo. 4, 81-86, (1958).
4) Fromm, J.E. & Harlow, F.H. : Numerical solution of the problem of vortex street development, Phy. Fluid, Vol. 6, No. 7, 975-982 (1963).
5) Harlow, F.H. & Fromm, J.E. : Dynamics and heat transfer in the von Kármán wake of a rectangular cylinder, Phy. Fluid, Vol. 7, No. 8, 1147-1156 (1964).
6) Fromm, J.E. : Computer experiments in fluiddynamics, Scientific American, Vol. 212, No. 3, 104-110 (1965).
7) Hirota, I. & Miyakoda, K. : Numerical solution of Kármán vortex street behind a circular cylinder, J. Meteorological Soc. Japan, Ser. II, Vol. 43, No. 1, 30-41, Feb. (1965).
8) Pearson, C.E. : A computational method for viscous flow problems, J. Fluid Mech. Vol. 21, Part 4, 611-622, Apr. (1965).
9) Pearson, C.E. : Numerical solutions for time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks, J. Fluid Mech. Vol. 21, Part 4, 623-633 (1965).
10) 気象庁・建設省：本州四国連絡架橋調査―気象調査（中間報告 その3），第6章"理論計算による設計風速の推定（II）"（明石海峡における風の分布の理論的研究），19-35，3月（1965）.
11) 日野幹雄：排煙濃度分布に関する数値解析（I） 差分近似による方法，電力中央研究所技術研究所報告，No.65058，8月（1965）.
12) 森口繁一・高田 勝：数値計算法，p 114-142，岩波講座現代応用数学（1958）.
13) Nitta, T. : The outflow boundary condition in numerical time integration of advective equations, J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II, Vol. 40, No. 1, 13-24 (1962).
14) Nitta, T. : On the reflective computational wave caused by the out flow boundary condition, J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II, Vol. 42, 274-276, (1964).
15) 正野重方：理工学のための緩和法入門，p.53，朝倉書店（1963）.
16) Phillips, O.M. : The intensity of aeolian tones, J. Fluid Mech. Vol. 1, 607-624 (1956).
17) Rosenhead, L. (editor) : Laminar Boundary Layers, (by Stuart, J.T.) Unsteady boundary layers, p.390, Oxford (1963).
18) McNown, J.S. & Keulegan, G.H. : Vortex formation and resistance in periodic motion, Proc. ASCE, Vol. 85, No. EM 1, Jan. (1959).
19) 土木学会：水理公式集，p. 514 (1963).
20) Goldstein, S. : Modern Developments in Fluiddynamics, Vol. II, p.425, Oxford at Clarendon Press, (1938).
21) Laird, A.D.K., Johnson, C.A. & Walker, R.W. : Water eddy forces on accelerated cylinders, Poc. ASCE, Vol. 85, No. WW 1, March (1959).