

表面波の2次干渉(2)

浜 田 徳 一*

1. 前回の計算では2成分波の2次干渉につき検討したが、今回の計算では波形スペクトルが連続な幅を持っている場合の2次干渉につき考える。この場合の2次干渉については、L.J. Tick¹⁾ の計算が水深無限の時につき発表されており、水深有限の時については計算の詳細は未発表となっているが、その概要は参考文献²⁾に記載されている。この計算は Tick の場合と同じく、逆行波をふくまない場合のみとし、1次元の場合、2次元の場合について行なう。また座標の取り方は Tick の計算と同じくして比較に便なようにした。計算では1次波は互いに独立であると仮定する (gaussian assumption)。

2. 1次元の計算を行なう。Fourier-Stieltjes type の表現で、同方向に進む波の1次波の表現は、

$$\phi^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)|x + \omega t]} \times d\xi_1(\omega) \cosh F(\omega)(z-d) \dots \dots \dots (1)$$

$$\eta^{(1)} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} e^{i[-\operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)|x + \omega t]}$$

$$[\phi_{zz}^{(1)} \phi_t^{(1)}]_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\{\operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)| + \operatorname{sgn}(\omega')|F(\omega')|\}x + (\omega + \omega')t]} \frac{d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega')}{2} \times \left[\frac{(-1)i\omega\omega'^2 F(\omega) \cosh F(\omega) d \cdot \cosh F(\omega') d}{\sinh F(\omega) d \cdot \sinh F(\omega') d \cdot F(\omega')} + \frac{(-1)i\omega'\omega^2 F(\omega') \cosh F(\omega') d \cdot \cosh F(\omega) d}{\sinh F(\omega') d \cdot \sinh F(\omega) d \cdot F(\omega')} \right] \dots \dots \dots (8)$$

の形式を用いて計算することは複雑となるから、

$$[\phi_{zz}^{(1)} \phi_t^{(1)}]_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\{\operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)| + \operatorname{sgn}(\omega')|F(\omega')|\}x + (\omega + \omega')t]} d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') \times \frac{(-1)i\omega\omega'^2 F(\omega) \cosh F(\omega) d \cdot \cosh F(\omega') d}{\sinh F(\omega) d \cdot \sinh F(\omega') d \cdot F(\omega')} \dots \dots \dots (9)$$

の形式で計算を行ない、final form を求めるところで式(8)の形式の変形を行なうこととする。よって式(7)の右辺は計算の結果、

$$(\phi_{tt}^{(2)} - g \phi_z^{(2)})_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega\omega'^2 d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') e^{i[-\{\operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)| + \operatorname{sgn}(\omega')|F(\omega')|\}x + (\omega + \omega')t]} \times \left[\frac{-F(\omega) \coth F(\omega) d \cdot \coth F(\omega') d}{F(\omega')} - 2 \coth F(\omega) d \cdot \coth F(\omega') d + 1 + \frac{\omega(\omega' + \omega)}{\omega'^2} \right] \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{ただし、} \operatorname{sgn}(\omega)\operatorname{sgn}(\omega') \frac{|F(\omega)||F(\omega')|}{F(\omega)F(\omega')} = 1, \operatorname{sgn}(\omega)|F(\omega)| + \operatorname{sgn}(\omega')|F(\omega')| = F(\omega) + F(\omega') \dots \dots \dots (11)$$

を用いる ($F(\omega)$, ω は同符号をとるから)。よって、

$$\phi^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\{F(\omega) + F(\omega')\}x + (\omega + \omega')t]} d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') G(\omega, \omega') \times \cosh \{F(\omega) + F(\omega')\}(z-d) + \text{const. } t \dots \dots \dots (12)$$

とおいて、式(10)の関係より $G(\omega, \omega')$ を決定し、かつ $F(\omega) = k$ とおくこととする。

$$G(\omega, \omega') = \frac{i\omega\omega'^2 \left[-\frac{k \coth kd \coth k'd}{k'} - 2 \coth kd \coth k'd + 1 + \frac{\omega(\omega' + \omega)}{\omega'^2} \right]}{-(\omega + \omega')^2 \cosh(k + k')d + g(k + k') \sinh(k + k')d} \dots \dots \dots (13)$$

* 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所

となる。つぎに、

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{g} \phi_t^{(2)} + \frac{1}{2g} \phi_z^{(1)} \phi_z^{(1)} + \frac{1}{2g} \phi_x^{(1)} \phi_x^{(1)} + \frac{1}{g^2} \phi_{tz}^{(1)} \phi_t^{(1)} \text{ at } z=0 \dots\dots\dots(14)$$

を用い、 $\eta^{(2)}$ を決定する。式(14)より明らかとなり、

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(k+k')x + (\omega+\omega')t]} \times \left[\frac{gkk'}{2\omega\omega'} - \frac{\omega\omega'}{2g} - \frac{\omega^2}{g} + \frac{(\omega+\omega')}{g(k+k') \tanh(k+k')} d - \frac{(\omega+\omega')^2}{g} \right] d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') \dots\dots\dots(15)$$

よって、

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(k+k')x + (\omega+\omega')t]} \times \left[\frac{gkk'}{2\omega\omega'} + \frac{\omega\omega'}{2g} - \frac{(\omega+\omega')^2}{2g} + \frac{(\omega+\omega')^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{g\omega'k^2 + g\omega k'^2}{\omega\omega'(\omega+\omega')} + \frac{gkk'}{\omega\omega'} + \frac{\omega\omega'}{2g} - \frac{(\omega+\omega')^2}{2g} \right\}}{g|k+k'| \tanh|k+k'| d - (\omega+\omega')^2} \right] d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') \dots\dots\dots(16)$$

この式は参考文献²⁾ 式(9),(10)と見合う式である。

1次波がそれぞれ独立の仮定より、式(16)を用い2次波の波形スペクトルは、

$\phi^{(2)}$ の const. t は $\eta^{(2)}$ の定数項に関係するものであり、波形スペクトルでは波数 zero の点に現われ、直接スペクトルの具体的形状には関係しないから、const. $t \rightarrow 0$ として計算を進める。

式(14)の右辺を計算すれば、

$$S^{(2)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) S^{(1)}(\lambda - \omega) S^{(1)}(\omega) d\omega \quad \left\{ \dots\dots\dots(17) \right.$$

$$\omega + \omega' = \lambda$$

ただし、

$$K(\omega, \lambda) = \frac{1}{4} \left[\frac{gkk(\lambda - \omega)}{\omega(\lambda - \omega)} + \frac{\omega(\lambda - \omega)}{g} - \frac{\lambda^2}{g} + \frac{\lambda^2 \left\{ \frac{g(\lambda - \omega)k^2 + g\omega k^2(\lambda - \omega)}{\omega(\lambda - \omega)\lambda} + \frac{2gkk(\lambda - \omega)}{\omega(\lambda - \omega)} + \frac{\omega(\lambda - \omega)}{g} - \frac{\lambda^2}{g} \right\}}{g|k+k(\lambda - \omega)| \tanh|k+k(\lambda - \omega)| d - \lambda^2} \right] \dots\dots\dots(18)^*$$

$$\text{また、} \langle \eta^{(2)^2} \rangle = \int S^{(2)}(\lambda) d\lambda = \int E^{(2)}(f_\lambda) df_\lambda$$

$$\langle \eta^{(1)^2} \rangle = \int S^{(1)}(\omega) d\omega = \int E^{(1)}(f) df$$

から、

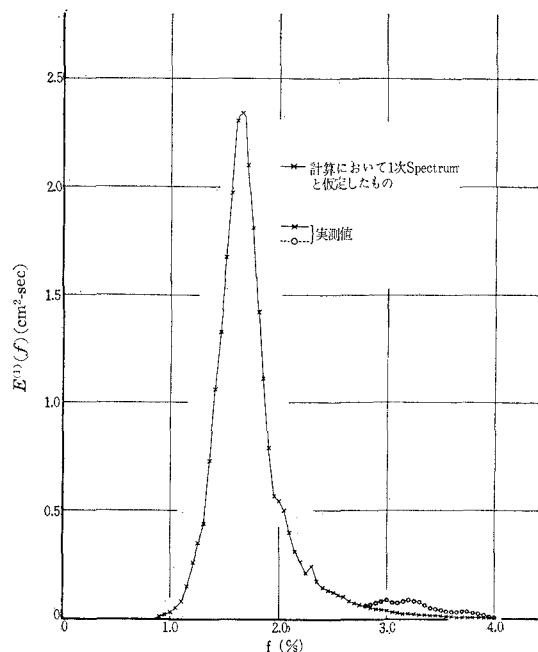
$$\begin{aligned} E^{(2)}(f_\lambda) &= 2\pi S^{(2)}(\lambda) \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) S^{(1)}(\lambda - \omega) S^{(1)}(\omega) d\omega \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) \frac{E^{(1)}(f_\lambda - f)}{2\pi} \frac{E^{(1)}(f)}{2\pi} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) E^{(1)}(f_\lambda - f) E^{(1)}(f) df \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

を用いてもよい。

図-1 は水路実験において得られた水深 15 cm の有限水深として取り扱わねばならない場合の風波の波形スペクトルの一例である。図は $-\infty$ から $+\infty$ の間に分布させた場合の+側の密度を示している。このスペクトルの x^2 -自由度はきわめて大きい。このスペクトルは analogue 型の周波数分析の方法で得られており、現れた非線型成分には機械的なものが多少入っているかも知れない。図-1 に示すように、明瞭に非線型成分と思われる部分を除いて、 $E^{(1)}(f)$ の model をつくる。こ

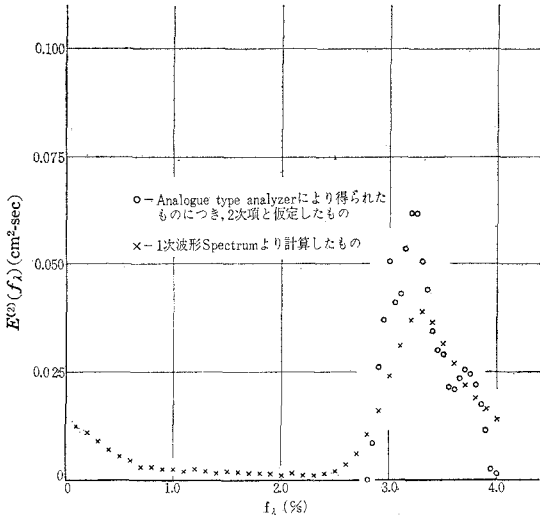
れに式(18),(19)を用いて $E^{(2)}(f_\lambda)$ を求める。計算の結果は 図-2 のようになり、analogue 方式でははっきりしなかった低周波数領域の干渉2次成分が現われ、かつ $E^{(1)}(f)$ の peak の約2倍の周波数付近に現われる非線型成分ははっきりとしており、analogue 方式で得

図-1 Analogue Type Analyzer による実測値



* Tick の計算では $K(\omega, \lambda) = \frac{1}{2} [\dots]^2$ となっているが、これは $\frac{1}{4} [\dots]^2$ とするべきであろう。また $k(\lambda - \omega)$ は $\lambda - \omega$ の関数としての k を意味する。

図-2 波形周波数 Spectrum の2次項



られたものと相似している。しかし analogue 方式の方が強度がやや大きい部分があり、多少機械的なものの影響があるのではないかと思わせる。水路実験により得られたものは、波の方向分散の影響が入るはずであり、この効果については後に述べる。また 図-2 を参考文献²⁾

$$p^{(2)} = \rho \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(\text{sgn}(\omega)'k + \text{sgn}(\omega')k')x + (\omega + \omega')t]} d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega') \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{(\omega + \omega') \left[-\frac{g^2 k^2}{\omega} - 2\frac{g^2 k k'}{\omega} + \omega \omega'^2 + \omega^2(\omega' + \omega) \right] \cosh(k + k')(z - d)}{-(\omega + \omega')^2 \cosh(k + k')d + g(k + k') \sinh(k + k')d} - \frac{1}{2} \omega \omega' \frac{\cosh(k - k')(z - d)}{\sinh k d \sinh k' d} \right\} \right] \quad (25)$$

ゆえに、

$$p^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(\text{sgn}(\omega)'k + \text{sgn}(\omega')k')x + (\omega + \omega')t]} \frac{d\xi_2(\omega) d\xi_2(\omega')}{\rho g^2 \cosh k(z - d) \cosh k'(z - d)} \\ \times \left[\frac{(\omega + \omega')^2 \left[-\frac{g^2 k^2 \omega' + k'^2 \omega}{2 \omega \omega'(\omega + \omega')} - g^2 \frac{k k'}{\omega \omega'} - \frac{\omega \omega'}{2} + \frac{(\omega + \omega')^2}{2} \right] \cosh(k + k')(z - d)}{-(\omega + \omega')^2 \cosh(k + k')d + g(k + k') \sinh(k + k')d} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \omega \omega' \frac{\cosh(k - k')(z - d)}{\sinh k d \sinh k' d} \right] \quad (26)$$

よって圧力の2次スペクトルを、

$$S_p^{(2)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(\omega, \lambda) S_p^{(1)}(\lambda - \omega) S_p^{(1)}(\omega) d\omega \quad (27)$$

$\omega + \omega' = \lambda$

と表わせば、

$$K_p(\omega, \lambda) = \frac{1}{4} \left[\frac{\cosh k d \cosh k(\lambda - \omega) d}{\rho g^2 \cosh k(z - d) \cosh k(\lambda - \omega)(z - d)} \right. \\ \times \left\{ \frac{\lambda^2 \left[-g^2 \frac{k^2(\lambda - \omega) + k^2(\lambda - \omega)\omega}{\omega(\lambda - \omega)\lambda} - g^2 \frac{2 k k(\lambda - \omega)}{\omega(\lambda - \omega)} - \omega(\lambda - \omega) + \lambda^2 \right]}{-\lambda^2 \cosh(k + k(\lambda - \omega))d + g(k + k(\lambda - \omega)) \sinh(k + k(\lambda - \omega))d} \right. \\ \left. \times \cosh(k + k(\lambda - \omega))(z - d) - \omega(\lambda - \omega) \frac{\cosh(k - k(\lambda - \omega))(z - d)}{\sinh k d \sinh k(\lambda - \omega) d} \right\} \right] \quad (28)$$

式(27), (28)により水中任意点の波による圧力変動の1次スペクトルを知れば、その2次スペクトルを計算することができる。これを水頭単位で表わせば、

Fig. 4-1-2 と比較するとき、筆者の計算値は L.J. Tick のものと多少性質が異なっているように思われる。

3. 水圧式波高計により得られる圧力記録にもこの2次干渉成分があるわけであり、この成分については1次成分のよく知られた表面換算法³⁾とは異なった関係が生まれる。以下これについて述べる。

運動方程式の積分より容易に、

$$\frac{p^{(0)}}{\rho} = g z \quad (20)$$

$$\frac{p^{(1)}}{\rho} = -\phi_z^{(1)} \quad (21)$$

$$\frac{p^{(2)}}{\rho} = -\phi_z^{(2)} - \frac{1}{2} \phi_x^{(1)2} - \frac{1}{2} \phi_x^{(1)2} \quad (22)$$

これにより $p^{(2)}$ のスペクトル表示を求める。 $\phi^{(2)}$ で $\text{const. } t$ を無視しているため、この $p^{(2)}$ のスペクトルも波数 zero の成分に不確定性を残している。

計算の結果は、

$$p^{(1)} = -\rho \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\text{sgn}(\omega)'k|x + \omega t]} d\xi_2(\omega) \frac{g \cosh k(z - d)}{\cosh k d} \quad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-\text{sgn}(\omega)'k|x + \omega t]} d\xi_2(\omega) \quad (24)$$

$$\frac{S_p^{(2)}(\lambda)}{\rho^2 g^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 g^2 K_p(\omega, \lambda) \frac{S_p^{(1)}(\lambda - \omega)}{\rho^2 g^2} \frac{S_p^{(1)}(\omega)}{\rho^2 g^2} d\omega \quad (29)$$

他方水面における波形の2次スペクトルは、

$$\begin{aligned} S^{(2)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) S^{(1)}(\lambda - \omega) S^{(1)}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) \frac{S_p^{(1)}(\lambda - \omega)}{\rho^2 g^2} \\ &\quad \times \frac{\cosh^2 k(\lambda - \omega)d}{\cosh^2 k(\lambda - \omega)(z - d)} \frac{S_p^{(1)}(\omega)}{\rho^2 g^2} \\ &\quad \times \frac{\cosh^2 kd}{\cosh^2 k(z - d)} d\omega \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\frac{S^{(2)}(\lambda)}{S_p^{(2)}(\lambda)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, \lambda) S_p^{(1)}(\lambda - \omega) \frac{\cosh^2 k(\lambda - \omega)d}{\cosh^2 k(\lambda - \omega)(z - d)} S_p^{(1)}(\omega) \frac{\cosh^2 kd}{\cosh^2 k(z - d)} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 g^2 K_p(\omega, \lambda) S_p^{(1)}(\lambda - \omega) S_p^{(1)}(\omega) d\omega} \dots\dots\dots (32)$$

式(18), (28)の $K(\omega, \lambda)$, $K_p(\omega, \lambda)$ を見れば、式(32)は式(31)にくらべ、相当複雑な関係であり、 $S^{(2)}(\lambda)$ の非線型成分が大きく現われる高周波領域では、これまでの1次関係のみによる換算は雑音の存在とともに、波形スペクトル本来の姿についての詳細な検討を不可能にしている。またこの計算は1次元スペクトルに関するものであり、波の方向分散を考える時はさらに複雑となる。

4. 2次元の場合を取り扱う。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots (33)$$

$$\phi_{tt}^{(1)} - g\phi_z^{(1)} = 0 \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (34)$$

$$\eta_t^{(1)} = \phi_z^{(1)} \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned} \phi_{tt}^{(2)} - g\phi_z^{(2)} &= \phi_{zz}^{(1)}\phi_t^{(1)} - 2\phi_x^{(1)}\phi_{tx}^{(1)} \\ &\quad - 2\phi_y^{(1)}\phi_{ty}^{(1)} - \phi_z^{(1)}\phi_{zt}^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{g}(\phi_{tz}^{(1)}\phi_{tt}^{(1)} + \phi_{ttz}^{(1)}\phi_t^{(1)}) \quad \text{at } z=0 \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \frac{1}{g}\phi_t^{(2)} + \frac{1}{2g}\phi_z^{(1)}\phi_z^{(1)} + \frac{1}{2g}\phi_x^{(1)}\phi_x^{(1)} \\ &\quad + \frac{1}{2g}\phi_y^{(1)}\phi_y^{(1)} + \frac{1}{g^2}\phi_{tz}^{(1)}\phi_t^{(1)} \quad \text{at } z=0 \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

$$\phi_z^{(1)} = 0 \quad \text{at } z=d \dots\dots\dots (38)$$

$$\phi_z^{(2)} = 0 \quad \text{at } z=d \dots\dots\dots (39)$$

式(38)を満足するように、

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \beta t)} \\ &\quad \times d\xi(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \cosh r(z-d) \dots\dots (40) \end{aligned}$$

とおく。

$r^2\phi^{(1)}=0$ より $-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + r^2=0$, $r>0$ とすれば、 $|K|=k$ として、 $\alpha_1=k\cos\alpha$, $\alpha_2=k\sin\alpha$, $r=k$ となる。ゆえに式(40)は、

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K \cdot X + \beta t)} \\ &\quad \times d\xi(K, \beta) \cosh|K|(z-d) \dots\dots (41) \end{aligned}$$

実数値定常過程の条件から、

ただし1次スペクトルにおける換算係数としては、

$$\frac{S^{(1)}(\omega)}{S_p^{(1)}(\omega)} = \frac{\cosh^2 kd}{\cosh^2 k(z-d)} \dots\dots\dots (31)$$

を用いる。

式(29), (30)より圧力のスペクトルの2次成分の表面波形への換算係数は、

$$\begin{aligned} &ei\beta t d\xi(K, \beta) \cosh|K|(z-d) \\ &= [ei\beta(-K)t d\xi(-K, \beta(-K)) \cosh|K|(z-d)]^* \end{aligned} \dots\dots\dots (42)$$

*印は複素共軛を示す。式(34)より β と K との関係を求めると、

$$\beta^2 = g|K| \tanh|K|d \dots\dots\dots (43)$$

式(42), (43)より、

$$\beta(K) = -\beta(-K) \dots\dots\dots (44)$$

いま順行波の波速ベクトルを $C^{(+)}$ 、逆行波のそれを $C^{(-)}$ とすれば、上述の条件から、

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K \cdot X - \text{sgn}(K, C^{(+)})|\beta|t)} \\ &\quad \times d\xi^{(+)}(K) \cosh|K|(z-d) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K \cdot X - \text{sgn}(K, C^{(-)})|\beta|t)} \\ &\quad \times d\xi^{(-)}(K) \cosh|K|(z-d) \end{aligned} \dots\dots\dots (45)$$

この計算では進行波のみについて行なうから、式(45)の第1積分だけをとり、(+)を省略する。式(35)を用いて $\eta^{(1)}$ を求めると、

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} i|K| \frac{e^{i(K \cdot X - \text{sgn}(K, C)|\beta|t)}}{-\text{sgn}(K, C)|\beta|} \\ &\quad \times \sinh|K|d d\xi(K) \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

$\frac{i|K|}{-\text{sgn}(K, C)|\beta|} \sinh|K|d d\xi(K) = d\xi_1(K)$ とおけば、

$$\eta^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(K \cdot X - \text{sgn}(K, C)|\beta|t)} d\xi_1(K) \dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \text{sgn}(K, C)|\beta|}{|K|} \\ &\quad \times \frac{e^{i(K \cdot X - \text{sgn}(K, C)|\beta|t)}}{\sinh|K|d} \\ &\quad \times d\xi_1(K) \cosh|K|(z-d) \dots\dots (48) \end{aligned}$$

式(36)を用いて $\phi^{(2)}$ を求める。この場合もconst. t の項を無視する。

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad \times Ge^{i\{(K+K') \cdot X - (\text{sgn}(K, C)|\beta| + \text{sgn}(K', C')|\beta'|)t\}} \\ &\quad \times \frac{\cosh|K+K'|(z-d)}{\sinh|K+K'|d} d\xi_1(K) d\xi_1(K') \end{aligned} \dots\dots\dots (49)$$

において,

$$G = \frac{ig}{2} \frac{1}{\{-\{\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| + \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'|\}^2 \coth|\mathbf{K} + \mathbf{K}'|d + g|\mathbf{K} + \mathbf{K}'|\}} \\ \times \left[|\mathbf{K}| \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \coth|\mathbf{K}|d + |\mathbf{K}'| \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'| \coth|\mathbf{K}'|d + 2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' \frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})}{|\mathbf{K}|} |\beta| \coth|\mathbf{K}|d \right. \\ \left. + 2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' \frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')}{|\mathbf{K}'|} |\beta'| \coth|\mathbf{K}'|d - 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| |\mathbf{K}'| \tanh|\mathbf{K}'|d - 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'| |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d - \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'| |\mathbf{K}'| \tanh|\mathbf{K}'|d \right] \dots\dots\dots (50)$$

式(49)の $\phi^{(2)}$ を用い, 式(37)より $\eta^{(2)}$ は,

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| + \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'|) \frac{2}{ig} G - \frac{1}{2g} \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'| \right. \\ \left. + \frac{1}{2g} \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}' \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'|}{|\mathbf{K}| |\mathbf{K}'|} \coth|\mathbf{K}|d \coth|\mathbf{K}'|d - \frac{1}{2} |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d - \frac{1}{2} |\mathbf{K}'| \tanh|\mathbf{K}'|d \right] \\ \times e^{i[\mathbf{K}(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{X} - (\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| + \operatorname{sgn}(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{C}')|\beta'|)t]} d\xi_1(\mathbf{K}) d\xi_1(\mathbf{K}') \dots\dots\dots (51)$$

いま $\mathbf{X}$ に関する過程のみに注目し,

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{K}, \mathbf{K}') e^{i(\mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{X}} \\ \times d\xi_1(\mathbf{K}) d\xi_1(\mathbf{K}') \dots\dots\dots (52)$$

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}' = \mathbf{Q} \dots\dots\dots (53)$$

を用いれば,

$$\eta^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{K}, \mathbf{Q} - \mathbf{K}) e^{i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}} \\ \times d\xi_1(\mathbf{K}) d\xi_1(\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \dots\dots\dots (54)$$

$$H(\mathbf{K}, \mathbf{Q} - \mathbf{K}) = \frac{1}{2} \frac{\{\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| + \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})|\}}{\{-\{\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| + \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})|\}^2 + g|\mathbf{Q}| \tanh|\mathbf{Q}|d\}} \\ \times \left[|\mathbf{K}| \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \coth|\mathbf{K}|d + |\mathbf{Q} - \mathbf{K}| \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})| \coth|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d \right. \\ \left. + 2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \coth|\mathbf{K}|d}{|\mathbf{K}|} + 2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \frac{\operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})|}{|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|} \right. \\ \times \coth|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d - 2 \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| |\mathbf{Q} - \mathbf{K}| \tanh|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d - 2 \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})| |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d \\ \left. - \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d - \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})| |\mathbf{Q} - \mathbf{K}| \tanh|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d \right] \\ - \frac{1}{2g} \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})| \\ + \frac{1}{2g} \frac{\mathbf{K} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \operatorname{sgn}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{C})|\beta| \operatorname{sgn}((\mathbf{Q} - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{C}')|\beta(\mathbf{Q} - \mathbf{K})| \coth|\mathbf{K}|d \coth|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d}{|\mathbf{K}| |\mathbf{Q} - \mathbf{K}|} \\ - \frac{1}{2} |\mathbf{K}| \tanh|\mathbf{K}|d - \frac{1}{2} |\mathbf{Q} - \mathbf{K}| \tanh|\mathbf{Q} - \mathbf{K}|d \dots\dots\dots (57)$$

5. このようにして2次元の2次の波形スペクトルムの表示が得られた。これを用いて1次波が角方向の分散を持つ時, それが2次波にどのように影響するかを簡単な計算例で調べて見る。

第1の treatment は $|\mathbf{K}|$ が一定であり, かつ $-\pi/2$ から $\pi/2$ にわたって等強度の1次スペクトルムを持つ場合である。これを Fourier-Stieltjes type で示せば, 半径 $|\mathbf{K}|$ の円周上に等強度の1次エネルギー密度があることとなる。

すなわち,

$$\phi^{(1)}(\mathbf{K}) = A \operatorname{Dirac}(|\mathbf{K}| - k_1) \dots\dots\dots (58)$$

これに対する $\langle \eta^{(1)2} \rangle$ は,

これに対応する2次の2次元波形スペクトルムは,

$$\phi^{(2)}(\mathbf{Q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \\ \times H^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q} - \mathbf{K}) \phi^{(1)}(\mathbf{K}) \phi^{(1)}(\mathbf{Q} - \mathbf{K}) d\mathbf{K} \dots\dots\dots (55)$$

ただし $\phi^{(1)}(\mathbf{K})$ は1次の波形スペクトルムであり,

$$\langle \eta^{(1)2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(1)}(\mathbf{K}) d\mathbf{K} \dots\dots\dots (56)$$

$H(\mathbf{K}, \mathbf{Q} - \mathbf{K})$ を省略なしに記せば,

$$\int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} A \operatorname{Dirac}(|\mathbf{K}| - k_1) k dk d\theta' = A k_1 2\pi \dots\dots (59)$$

これに対応する $\phi^{(2)}(\mathbf{Q})$ を計算する。 $\mathbf{Q} = \{|\mathbf{Q}|, \theta\}$ で表わすものとする,

$$\cos \delta = \frac{|\mathbf{Q}|}{2|\mathbf{K}|}, \quad \frac{\pi}{2} \geq \delta \geq 0$$

で表わされる角 δ との関係から, つぎの3つの case ができる。

$$(i) \quad 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\phi^{(2)}(|\mathbf{Q}|, \theta) = 4 H_{(1)}^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q} - \mathbf{K}) \frac{A^2 k_1^2}{\sqrt{4k_1^2 - |\mathbf{Q}|^2} |\mathbf{Q}|} \dots\dots\dots (60)$$

$$|\mathbf{K}| = |\mathbf{Q} - \mathbf{K}| = k_1$$

$$H_{(1)}(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) = |\beta| \frac{2k_1|\beta|\coth k_1 d + (2|\mathbf{Q}|^2 - 4k_1^2) \frac{|\beta|}{k_1} \coth k_1 d - 6|\beta|k_1 \tanh k_1 d}{-4|\beta|^2 + g|\mathbf{Q}|\tanh|\mathbf{Q}|d} \\ - \frac{1}{2g} |\beta|^2 + \frac{1}{2g} \frac{\left(\frac{|\mathbf{Q}|^2}{2} - k_1^2\right) |\beta|^2 \coth^2 k_1 d}{k_1^2} - k_1 \tanh k_1 d \dots\dots\dots (61)$$

$$(ii) \quad \frac{\pi}{2} - \delta \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \delta$$

$$\phi^{(2)}(|\mathbf{Q}|, \theta) = 4 H_{(2)}^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) \frac{A^2 k_1^2}{\sqrt{4k_1^2 - |\mathbf{Q}|^2} |\mathbf{Q}|} \times \left[\coth^2 k_1 d \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\sinh^2 k_1 d}\right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 2k_1 d} \right] \dots\dots\dots (62)$$

$$H_{(2)}(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) = \frac{1}{2g} |\beta|^2 \\ - \frac{1}{2g} \frac{\left(\frac{|\mathbf{Q}|^2}{2} - k_1^2\right) |\beta|^2 \coth^2 k_1 d}{k_1^2} - k_1 \tanh k_1 d \dots\dots\dots (63)$$

$$(iii) \quad \frac{\pi}{2} + \delta \leq |\theta| \leq \pi$$

$$\phi^{(2)}(|\mathbf{Q}|, \theta) = 4 H_{(1)}^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) \frac{A^2 k_1^2}{\sqrt{4k_1^2 - |\mathbf{Q}|^2} |\mathbf{Q}|} \dots\dots\dots (64)$$

これから,

$$\langle \eta^{(2)2} \rangle = \int \phi^{(2)}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 8 \int_0^{2k_1} \frac{A^2 k_1^2 d |\mathbf{Q}|}{\sqrt{4k_1^2 - |\mathbf{Q}|^2}} \\ \times \left[H_{(1)}^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) \left(\pi - 2 \cos^{-1} \frac{|\mathbf{Q}|}{2k_1} \right) \right. \\ \left. + H_{(2)}^2(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K}) 2 \cos^{-1} \frac{|\mathbf{Q}|}{2k_1} \right] \dots\dots (65)$$

2次の2次元スペクトルは式(60),(62),(64)のようになるが、式(65)の右辺積分の第1項が周波数スペクトルにおいて、1次周波数の2倍周波数の場所に現われるものに相当し、第2項が周波数 zero に現われる成分に相当することは、式(51)より明らかである。

第2の treatment は1次成分 $\phi^{(1)}(\mathbf{K})$ が波数平面で1点に集中しているものとする。Fourier-Stieltjes 表現で、

$$\phi^{(1)}(\mathbf{K}) = B \text{Dirac}(|\mathbf{K}| - k_1) \text{Dirac}(\theta') \\ + B \text{Dirac}(|\mathbf{K}| - k_1) \text{Dirac}(\theta' - \pi) \dots\dots\dots (66)$$

となり、これに対応する $\langle \eta^{(1)2} \rangle$ は、

$$\langle \eta^{(1)2} \rangle = 2Bk_1 \dots\dots\dots (67)$$

となる。式(59)の $\langle \eta^{(1)2} \rangle$ と式(67)のそれとが相等しいとすれば、

$$A = \frac{B}{\pi} \dots\dots\dots (68)$$

これに対応する $\phi^{(2)}(\mathbf{Q})$ はこの場合の $H(\mathbf{K}, \mathbf{Q}-\mathbf{K})$ を計算し、式(55)を $\mathbf{K}$ につき積分することにより求められ、また $\langle \eta^{(2)2} \rangle$ は $\langle \eta^{(2)2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(2)}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}$ により計算される。計算の結果は、

$$\langle \eta^{(2)2} \rangle = 2\pi^2 A^2 k_1^4$$

右辺の第1項は周波数2倍のところに現われるいわゆる2倍周波数成分であり、第2項は周波数 zero のところに現われ、式(49)の $\phi^{(2)}$ における const. t の無視に関係している。

数値計算例としては、図-1に示した周波数スペクトルの場合のものを用いる。そして式(59),(67)の $\langle \eta^{(1)2} \rangle$ に対応するものは $\langle \eta^{(1)2} \rangle = 2.4586 \text{ cm}^2$ 、1次スペクトルの密度は図-1のスペクトルの peak に集中するとして、 $f_1 = 1.65 \text{ c/s}$ 、 $k_1 = 0.1165 \text{ cm}^{-1}$ 、 $A = 3.3589 \text{ cm}^3$ となる。計算の結果は式(65)による $\langle \eta^{(2)2} \rangle$ は、

$$\langle \eta^{(2)2} \rangle = 0.0284 + 0.00657 \text{ cm}^2 \dots\dots\dots (70)$$

式(69)による $\langle \eta^{(2)2} \rangle$ は、

$$\langle \eta^{(2)2} \rangle = 0.0659 + 0.000151 \text{ cm}^2 \dots\dots\dots (71)$$

いずれも右辺第1項は周波数スペクトルの2倍周波数に現われる成分であり、第2項は周波数 zero に表われる成分である。これによれば波形スペクトルの1次成分が方向分散するときには、周波数スペクトルの2倍周波数成分は減少する傾向があることが認められる(式(65)に対応する1次スペクトルの分散は極端な場合であるが)。そして周波数 zero の成分は増加している。これは波数絶対値 $|\mathbf{K}|$ を一定値 k_1 に集中した簡単な計算であるが、これによっても周波数スペクトルの高周波側に現われる非線型成分は複雑な性質を持つことがわかる。

なお図-2に表われた実測値の非線型成分の主として2倍周波数付近に現われたものの $\langle \eta^{(2)2} \rangle$ としての推定値は 0.079 cm^2 であり、式(71)によるものよりもさらに大であるが、これにはすでに述べたように、analogue 型分析器のもつ機械的非線型性の影響が多少ふくまれていると考えられる。

なお計算機を用いた数値計算において竹田英章君、数値計算において加藤 始君の協力を得た。

参考文献

- 1) Tick, L.J.: A nonlinear random model of gravity waves I, J. of Math. & Mech., Vol. 8, No. 5, 1959.
- 2) Tick, L.J.: Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean wave spectra, Prentice-Hall, 1963.
- 3) Pierson Jr. W.J.: An electronic wave spectrum analyzer and its use in engineering problems, B.E. B.T.M., No. 56, 1954.