

鉛直振動流による造波の理論について

合 田 良 実*

1. ま え が き

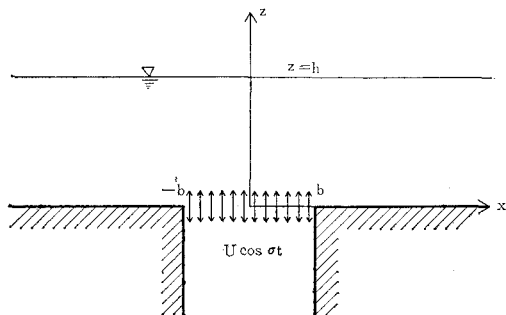
波を発生させる装置、すなわち造波装置は、港湾・海岸の諸問題の試験・研究に欠くことのできない実験装置である。機械的に造波板を動かして波を起こすピストン型、フラップ型（いわゆるフラッター型であるが原語から見てこう呼ぶのが適当である）、プランジャー型、また気密室の圧力増減で水を出入させて波を発生する気密式などを初めとして様々の造波装置が考案され、使用されている^{1),2)}。しかし今までの造波装置のほとんどは、造波部分が波を反射する構造になっている。このため模型構造物で反射された波が再び造波部で反射され、模型波をゆがめる欠陥がある。この再反射波の影響を軽減する方法としてフィルターを使用したり、水槽の全幅の一部を使用して反射波を残りの部分に拡散させたり、さらには模型からの反射波が再び模型に到達する以前に測定を終了したりするなどの手段が取られてきた。

この造波部からの再反射の問題は、波が反射しないような構造の造波装置を作ることによって解決される。たとえば水路底面に縦溝孔を設け、その溝孔から水を噴出入させて波を作ることができれば、造波部からの反射波がほとんどなくなるであろう。実際にこの方式による造波装置の建設例は、岩垣・土屋・井上によって報告されている³⁾。しかしこうした鉛直振動流によって整った波形の波を起こせるものなのか、また造波特性はどうなのか、などの点については明らかにされていない。このため本報告では鉛直振動流による造波現象についてその速度ポテンシャルを求め、造波特性や造波力などについて検討を行なった。

2. 造波条件の設定

鉛直振動流を用いる造波装置の基本形として、図-1のように幅 $2b$ の縦溝孔内で $U \cos \sigma t$ のような振動流が与えられている場合を考える。ただし σ は角振動数で $2\pi/T$ であり、 T は振動周期である。座標原点は開口部中央に取り、 z 軸を上方正にとる。したがって静水面は $z=h$ である。 y 軸方向については運動は一樣とする、すなわち二次元運動を考える。また U は振動流の最大速度である。

図-1



運動の第一近似として発生波の波高は波長および水深にくらべて微小であると仮定する。また流体の粘性および圧縮性も無視できるとする。そして速度ポテンシャル ϕ が存在するとして、 ϕ を求めてみよう。基本方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

の Laplace 方程式である。境界条件は、まず水路底面において

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = \begin{cases} -U \cos \sigma t & \text{ただし } |x| < b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

また水面において圧力 0 および水面連続の条件から

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=h} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が要請される。さらに解の唯一性を保つため、造波領域から十分に離れた所では進行波の形をとるという Sommerfeld の条件（たとえば Stoker⁴⁾ p. 59）も付加しておく。以上の基本方程式および境界条件を満足する解が求められれば、逆に鉛直振動流が微小振幅の渦なしの波を発生しうることが示されるわけである。

速度ポテンシャルの解を求めるためつぎのように時間項を分離する。

$$\phi(x, z, t) = -f(x, z) \cos \sigma t \quad \dots\dots\dots (4)$$

こうすると式 (1)~(3) が $f(x, z)$ に関してつぎのように書き直され、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=0} = \begin{cases} U & \text{ただし } |x| < b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=h} - \frac{\sigma^2}{g} f(x, h) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

問題は式 (5)~(7) を満足する $f(x, z)$ を求めることに。

* 正会員 Sc. M. 運輸省港湾技術研究所水工部

帰着される。

3. 速度ポテンシャルの解

式 (6) の境界条件の特性から、次式で示される $f(x, z)$ のフーリエ変換 $F(u, z)$ を導入すると、

$$F(u, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} f(s, z) ds \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} F(u, z) du \quad \dots\dots\dots (9)$$

式 (5)~(7) がつぎのように書き改められる。

$$-u^2 F(u, z) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{2U \sin ub}{u} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=h} = \frac{\sigma^2}{g} F(u, h) \quad \dots\dots\dots (12)$$

式 (10) の一般解は

$$F(u, z) = C_1(u) e^{uz} + C_2(u) e^{-uz} \quad \dots\dots\dots (13)$$

であるから式 (11), (12) を満足するよう未定係数 $C_1(u)$, $C_2(u)$ を定めると $F(u, z)$ がつぎのように求められる。

$$F(u, z) = \frac{2U \sin ub [ug \cosh u(z-h) + \sigma^2 \sinh u(z-h)]}{u^2 (\sigma^2 \cosh uh - ug \sinh uh)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

この結果を式 (9) に代入して $f(x, z)$ を求めると、形式的につぎのように表わされる。

$$f(x, z) = \frac{U}{2\pi i} [G(x+b, z) - G(x-b, z)] \quad (15)$$

ただし

$$G(\xi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu\xi} [ug \cosh u(z-h) + \sigma^2 \sinh u(z-h)]}{u^2 (\sigma^2 \cosh uh - ug \sinh uh)} du \quad \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) 右辺の積分を求めるには、これを複素平面に移して留数の定理を利用すれば良い。いま式 (16) 右辺の被積分関数を $g(u)$ で表わし、複素数 $w = u + iv$ に關するつぎの積分を考える。

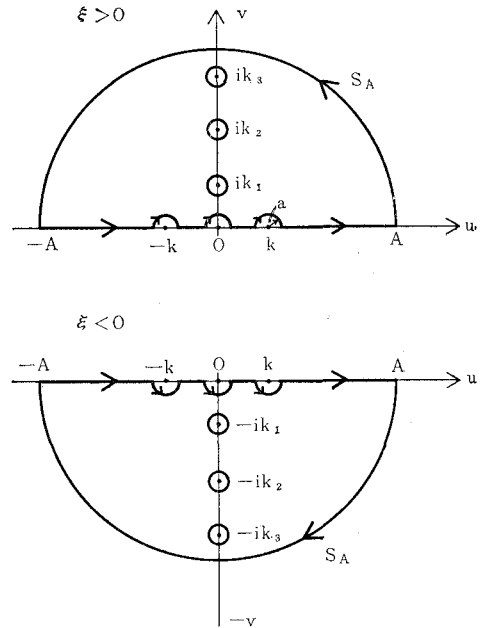
$$I_w = \int_C g(w) dw \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし積分路 C は、図-2 のように u 軸と半径 A の半円で作られ、 $w = -k, 0, k$ の 3 箇所に半径 a の回路を持つ。この積分路は、 ξ が正のときは上平面 ($v > 0$)、 ξ が負のときは下平面 ($v < 0$) にとる。ここで $w = -k, 0, k$ の 3 点は、 $g(w)$ の分母を 0 とする u 軸上の極で k は

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad \dots\dots\dots (18)$$

から定められる。後に示されるように k は波数 $2\pi/L$ である (L は波長)。 $g(w)$ はこの 3 点のほか、 v 軸上に

図-2 複素積分路



$$\sigma^2 = -gk_n \tan k_n h \quad (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (19)$$

で与えられる $w = \pm ik_n$ の無限個の極を持っている。

いま求めている式 (16) の積分は、式 (17) の複素積分において $A \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ としたときの u 軸に沿っての部分積分に等しい。この際、積分路が図-2 のようにとてあるので、 S_A に沿っての積分は 0 となる。したがって留数の定理により $G(\xi, z)$ は次のように表わされる。

$$G(\xi, z) = \pm 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} R(\pm ik_n) \mp \pi i [R(-k) + R(0) + R(k)] \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし $R(ik_n)$, $R(k)$ など $w = ik_n$, $w = k$ などにおける留数でそれぞれつぎの値を持つ。

$$\left. \begin{aligned} R(k) &= -\frac{2e^{ik\xi} \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} \\ R(-k) &= -\frac{2e^{-ik\xi} \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} \\ R(0) &= (z-h) + \frac{1}{k \tanh kh} \\ R(\pm ik_n) &= \frac{2e^{\mp kn\xi} \cos k_n z}{k_n(\sin 2k_n h + 2k_n h)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また式 (20), (21) に現われる複号は、 $\xi > 0$ のときに上の符号、 $\xi < 0$ のときに下の符号をとるものとする。

式 (21) の値を式 (20) に代入して整理すると、

$$G(\xi, z) = \pm \pi i \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mp kn\xi} \cos k_n z}{k_n(\sin 2k_n h + 2k_n h)} - 4 \frac{\cos k\xi \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} + (z-h) + \frac{1}{k \tanh kh} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

の結果が得られる。したがって複号の正負に注意しながら

ら式 (15) で $f(x, z)$ を求めると

$|x| > b$ の範囲では

$$f_0(x, z) = 4U \left\{ \frac{\sin kb \sin k|x| \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-kn|x|} \sinh knb \cos knz}{kn(\sin 2knh + 2knh)} \right\} \dots (23)$$

$|x| < b$ の範囲では

$$f_1(x, z) = U \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-knb} \cosh knx \cos knz}{kn(\sin 2knh + 2knh)} - 4 \frac{\cos kb \cos kx \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} + (z-h) + \frac{1}{k \tanh kh} \right\} \dots (24)$$

となる。この式 (23), (24) の結果は式 (5)~(7) を満足する。

4. 表面波形

問題の基本方程式 (1), および境界条件式 (2), (3) は ϕ に関して線型である。したがって $x = \pm \infty$ で進行波となるようつぎの速度ポテンシャルを加えることが許される。

すなわち

$$\phi_s = 4U \frac{\sin kb \cos kx \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} \sin \sigma t \dots (25)$$

これによって得られる速度ポテンシャルは, $|x| > b$ の範囲で

$$\phi = \phi_0 + \phi_s = -4U \left\{ \frac{\sin kb \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} \sin(k|x| - \sigma t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{knx} \sinh knb \cos knz}{kn(\sin 2knh + 2knh)} \cos \sigma t \right\} \dots (26)$$

表面波形はこの速度ポテンシャルから

$$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=h} = \frac{4U}{\sigma} \left\{ \frac{\sin kb \sinh kh}{\sinh 2kh + 2kh} \cos(k|x| - \sigma t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-kn|x|} \sinh knb \sin knh}{\sin 2knh + 2knh} \sin \sigma t \right\} \dots (27)$$

と与えられる。この式 (27) の第 1 項は造波領域から離れて両側へ進行する波を表わす。この形から k が波数 $2\pi/L$ であることが明らかである。第 2 項の無限級数は造波部のじょう乱波を表わすが, $e^{-kn|x|}$ の項のために造波部から離れるにつれてその振幅が急速に減少する。 $|x| > 2b$ であれば実際上第 2 項を無視してさしつかえない。ここまでの計算は U が与えられている場合であるが, 実際の造波装置として縦溝孔の中で鉛直方向に往復運動するピストンを考えると, 最大流速 U はピストンの振幅 e と角振動数 σ とから $U = e \cdot \sigma$ で表わされる。したがって, 造波領域から離れた所の波形はつぎのようになる。

$$\eta = 4e \frac{\sin kb \sinh kh}{\sinh 2kh + 2kh} \cos(k|x| - \sigma t) \dots (28)$$

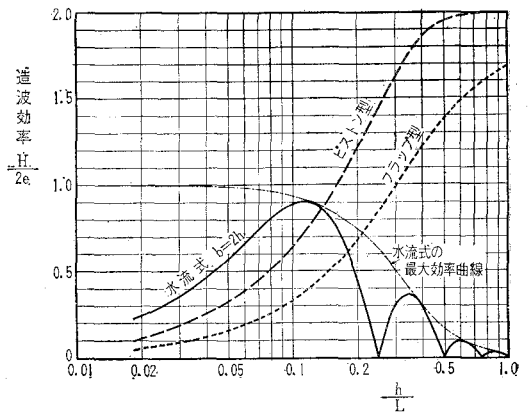
発生波高 H はこの式から

$$H = 8e \frac{\sinh kh}{\sinh 2kh + 2kh} \sin kb \dots (29)$$

である。

式 (29) からつぎのような造波特性がわかる。すなわち造波溝孔の幅が最適 ($kb = \pi/2$) であれば, 水深波高比 h/L が小さいほど造波効率が良い。この最大造波効率と h/L の関係を図-3 の一点鎖線で示す。しかし実際には溝幅 $2b$ が一定なので, たとえば図-3 の実線 ($b=2h$) のような造波効率曲線になる。この場合は $h/L=0.12$ 付近で発生波高が最大であるが, b/h を小さくすればこの極大点が右下に移動し, b/h を大きくすれば左上に動く。したがって溝幅を適当に選んで, 実験予定の波の造波効率を最大にすることができる。しかし溝幅 $2b$ が波長 L の整数倍のときは, $\sin kb$ のファクターのために発生波高が 0 となる。設計上注意すべき点である。

図-3 各種造波方式の造波特性



一方通常のピストン型およびフラップ型の造波装置の発生波高は,

ピストン型:

$$H = 8e \frac{\sinh^2 kh}{\sinh 2kh + 2kh} \dots (30)$$

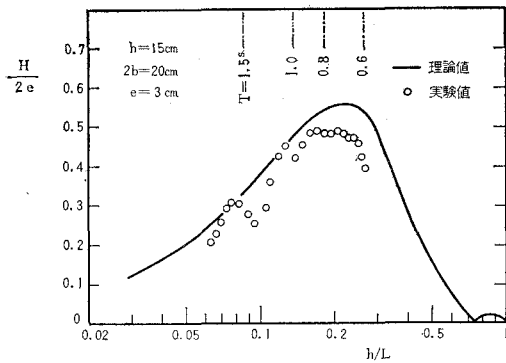
フラップ型:

$$H = 8e \frac{(1 - \cosh kh + kh \sinh kh) \sinh kh}{(\sinh 2kh + 2kh) kh} \dots (31)$$

と与えられ, いずれも深海波領域で造波効率が最大となる。図-3 の破線が両方式の造波特性曲線である。鉛直振動流の造波効率は $b=2h$ の場合, $h/L < 0.18$ でフラップ型に優り, $h/L < 0.14$ ではピストン型をもしのいでいる。

長さ 3.5 m, 幅 20 cm の木製水路で実験した結果では, 図-4 に示すように理論値, 式 (29) の約 80% の発生波高が得られた。特に $T \approx 0.7$ sec 以下で波高が減少する傾向は理論値と良く一致している。また本造波方式の狙いである無反射性の点については, 造波部からの反射が波高にして約 16% と推定された。この反射率の測定には, 水路の一端に消波装置を設け, 他端は直立壁と

図-4 発生波高の実験結果



して重複波を形成させ、壁面での重複波高が波長と水路延長との比によって脈動する割合を測定して、これから反射率を推定したものである⁵⁾。この16%の反射率は、今までの造波装置やフィルターの併用式にくらべてはるかに小さく、造波部分からの再反射はほとんど無視してよいといえよう。

5. 造波力および仕事量

鉛直振動流を発生させるに必要な力および所要馬力を求めるには、まず造波溝における圧力を計算しなければならない。この圧力は、ベルヌーイの一般方程式から導かれる

$$p = \rho \left[g(h-z) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} \dots \dots \dots (32)$$

の式で計算される。ここで速度ポテンシャル ϕ は、 $|x| < b$ に対する式(24)の $f_i(x, z) \cos \sigma t$ に式(25)の ϕ_s を加えたものである。したがって

$$p = \rho g h + \rho \sigma f_i(x, 0) \sin \sigma t + \rho \sigma f_s(x, 0) \cos \sigma t \dots \dots (33)$$

ただし

$$f_s(x, z) = 4 U \frac{\sin kb \cos kx \cosh kz}{k(\sinh 2kh + 2kh)} \dots \dots \dots (34)$$

造波溝の上面 ($z=0$) における全圧力は、式(33)を $-b$ から b まで積分して求められる。いま水路幅を B とすると全圧力 P は

$$P = B \int_{-b}^b p dx = 2 \rho g B b h + P_i \sin \sigma t + P_s \cos \sigma t \dots \dots (35)$$

ただし

$$P_i = 2 \rho \sigma U B b h \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-2k_n b})}{k_n b k_n h (\sin 2k_n h + 2k_n h)} - \frac{2 \sin 2kb}{kb kh (\sinh 2kh + 2kh)} - 1 + \frac{1}{kh \tanh kh} \right\} \dots \dots (36)$$

$$P_s = 8 \rho \sigma U B b h \frac{\sin^2 kb}{kb kh (\sinh 2kh + 2kh)} \dots \dots \dots (37)$$

全圧力の最大値を求めるには式(36)、(37)で P_i 、 P_s を

求め、これらを式(35)で合成すれば良い。ただしこれは溝孔上面における圧力である。溝孔の中を往復するピストンに作用する力は、式(35)の圧力に、ピストンと同一位相で運動する水の慣性力を加えなければならない。ピストン背後の水を逃がすために余水槽が設けられているときには、縦溝孔と余水槽内部の水の重量を W として

$$F = P_s \cos \sigma t + \left(P_i + \frac{\sigma U}{g} W \right) \sin \sigma t \dots \dots \dots (38)$$

なる力がピストンに作用するものと考えられる。

つぎに鉛直振動流が波に対して働く平均仕事量を考えると、これはつぎのように計算される。

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-b}^b P \left[-\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} dx dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P U \cos \sigma t dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [2 \rho g B b h + P_i \sin \sigma t + P_s \cos \sigma t] U \cos \sigma t dt \end{aligned}$$

ここで三角関数の直交性から、右辺第1項および第2項の積分は0となり、結局第3項のみの積分となって

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{2} P_s U \\ &= 4 \rho \sigma U^2 B \frac{\sin^2 kb}{k^2 (\sinh 2kh + 2kh)} \dots \dots (39) \end{aligned}$$

しかし式(29)の結果と $U = e \cdot \sigma$ の関係を用いると結局

$$\bar{W} = 2 \times \frac{1}{16} \sigma g \frac{B H^2 L}{T} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \dots \dots (40)$$

と2方向への波の伝播エネルギーに等しいことが証明される。

5. む す び

以上の解析によって得られた結果をまとめるとつぎのようになる。

- ① 鉛直振動流による造波運動の速度ポテンシャルが求められた。
- ② この造波方式は浅海波あるいは浅海波に近い波を発生させるのに適している。
- ③ 小規模の造波テストで得られた発生波高は、理論値の約80%であった。
- ④ この造波方式では造波部からの反射波がきわめて小さい。

なお本研究に際しては、港湾技術研究所水工部防波堤研究室長・伊藤善行技官から有益なる助言を頂いた。また実験データは同研究室の菊谷 徹君が、原中裕人、北谷高雄技官の助力を得て記録・整理したものである。ここに記して深謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Biesel, F., Suquet, F. and Others: Laboratory Wave-Generating Apparatus (translated from La Houille Blanche), Project Report No. 39, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Univ. of Minnesota, March 1954, 131 pp.

- 2) 鶴田千里・久田安夫：大型造波水路の設計について，運研報告7巻11号，1957.11, 73 pp.
 - 3) 岩垣雄一・土屋義人・井上雅夫：風洞水槽を用いた海岸堤防の越波に関する研究（I），第9回海岸工学講演会講演集，昭 37.10，p. 153—158.
 - 4) Stoker, J.J. : Water Waves, Interscience Pub. Inc., New York, 1957, 567 pp.
 - 5) Goda, Y. and Kikuya, T. : The Generation of Water Waves with a Vertically Oscillating Flow at a Channel Bottom, Report of Port and Harbour Tech. Res. Inst., No. 9, Sept. 1964.
-