

重複波に関する二、三の問題について

永井 莊七郎*

1. 緒 言

重複波に関する最近の研究によって、直立防波堤前面に重複波が発生する条件、いくら水深が深くても完全な重複波が起らず、部分的に砕ける条件、およびそれらの場合における波圧の鉛直分布および合力などの問題については、防波堤設計上からはあまり困らない程度に究明されたと思われるが、重複波の波圧における基本波の1/2周期の変動の問題、重複波の部分的条件に関する理論的考察などの基礎的な問題、あるいは重複波における水底速度による直立堤前面の洗掘に対する懸念など、種々究明を要する問題が残されていた。これらの問題については幾人かの技術者からしばしば質問を受けた。また昨年の海岸工学講演会以来、岸力教授などから重複波の基礎的問題について討議を受けた。これらの質問や討議は非常に重要な問題で、十分に研究し、お互いに討議し合って真実を把握する必要があると思ったので、ここに重複波に関する二、三の問題について検討することにした。

2. 重複波圧における2倍周波数成分について

(1) 波圧式の誘導について

直立壁前面の水深 h が十分に大きく (ほぼ $h/L \geq 1/2$)、水面の波動が水底におよばない場合には、水底波圧は水面に生ずる重複波の2倍の周波数で変動する。これは水面と水底との間の水柱の重心が水面の重複波の2倍周波数で上下に振動するためである¹⁾。

いま静水面 (x 軸) から下方 ($-z$ 軸方向) に十分な深さ h の点に x 軸に平行な面を考え、その面上では圧力 p は x, y に無関係であるとする。この面と水面とに囲まれた長さ L (波長)、 y 軸方向に単位幅の水柱を考え、その質量を M 、この M の重心の位置を $-z_0$ とすれば、運動方程式はつぎのようになる。

$$M \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \int_0^L p dx - M \cdot g \dots \dots \dots (1)$$

式中

$$\begin{aligned} -z_0 &= \frac{\rho}{M} \int_0^L \int_{-h}^{\eta} (-z) dx \cdot dz \\ &= -\frac{\rho L}{2M} \{a^2(1 + \cos 2nt) - h^2\} \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$M = \rho \int_0^L \int_{-h}^{\eta} dx \cdot dz = \rho h L \dots \dots \dots (3)$$

h なる深さの面の波圧 p は一般に次式で表わされる。

$$p = -\rho g z - \rho \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=-h} + \rho f(t) \dots (4)$$

いま h なる深さには水面の波動は伝わらないと考えているから

$$p = \rho g h + \rho f(t) \dots \dots \dots (5)$$

式(2)~(5)を式(1)に代入すると、

$$p = \rho g h - \frac{1}{2} \rho g m H^2 \cdot \cos 2nt \dots \dots \dots (6)$$

すなわち水深 h なる面の圧力は水面の重複波 $\eta = H \cos nt \sin mx$ の2倍周波数で変動する。

式(6)はまた速度ポテンシャル ϕ を次式のように与え、

$$\phi = -\frac{n \cdot H}{m} e^{mz} \cdot \sin nt \cdot \sin mx \dots \dots \dots (7)$$

水面 $z=\eta$ において大気圧 $p_0=0$ なる条件より $f(t)$ を求め、式(4)に代入することによっても求められる。

岸教授は式(1)を浅い水深 $h/L < 1/2$ の場合における重複波にも適用できるはずであると考えた²⁾。

まず重複波の速度ポテンシャル ϕ は次式のように与え

$$\phi = -\frac{nH}{m} \cdot \frac{\cosh m(h+z)}{\sinh mh} \cdot \sin nt \cdot \sin mx \quad (8)$$

式中、

$$n = 2\pi/T, \quad m = 2\pi/L$$

この場合は水面の波動は水底 ($z=-h$) に伝わるから、式(8)を式(4)に代入して水底圧力 p を求めた。ただし水底では $\partial \phi / \partial z = v = 0$ であり、 $\partial \phi / \partial t$ には $\sin mx$ が入っていて1波長について積分すると0になるので、

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho}{2} \int_0^L (V^2) \cdot dx = -\frac{\rho}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2_{z=-h} \cdot dx \\ & = -\frac{1}{4} \rho n^2 H^2 \cdot L \cdot \frac{\sin^2 nt}{\sinh^2 mh} \\ & \text{あるいは} \\ & = -\frac{1}{2} \rho g m \cdot H^2 \cdot L \cdot \frac{\sin^2 nt}{\sinh 2mh} \end{aligned} \dots \dots \dots (9)$$

式(9)を式(4)に代入すると、 $z=-h$ では

$$\begin{aligned} \int_0^L p dx &= \rho g h - \frac{1}{2} \rho g m H^2 L \frac{\sin^2 nt}{\sinh 2mh} \\ &+ \rho \cdot f(t) \cdot L \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

式(10)を運動方程式(1)に代入して $f(t)$ を求め、その $f(t)$ を式(4)に代入すれば圧力 p の一般式が求まる。この式は水面 $z=\eta$ において $p=0$ なる条件を満

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

足しなければならないが、この条件を満足しない。岸教授はその理由が式(8)が厳密でないからであると考えた²⁾。

この点についてお答えしよう。運動方程式(1)において水底($z=-h$)における鉛直方向の圧力 p の項に水平方向の速度 $u=\partial\phi/\partial x$ を考慮する場合には、水底における摩擦抵抗力を考慮しなければならない。もし仮に摩擦抵抗力を無視するならば、水底における鉛直方向の圧力 p の項に $\partial\phi/\partial x$ は入れる必要はない。このような場合はすなわち水底に波動運動がおよばない場合と一致するわけである。

水深が浅い場合に、式(1)のような運動方程式を用いて $f(t)$ を求めようとするには、 z 軸方向のみならず、 x 軸方向の運動方程式も必要であると考えられる。水底における摩擦抵抗力をも考慮した運動方程式の解はかなり面倒であろう。

(2) 水底圧力における2倍周波数成分の影響について

式(8)を用いて $z=\eta$ において $\phi=0$ なる条件より $f(t)$ を求めると次式が得られる¹⁾。

$$f(t)=g\eta+gmH^2\frac{\sin^2 nt}{\sinh 2mh}\{\cosh^2 m(h+\eta)-\sin^2 mx\}-g\eta\frac{\cosh m(h+\eta)}{\cosh mh}\dots\dots\dots(11)$$

直立壁において、 $\eta=\eta_0=H\cos nt$ とおくと、

$$f(t)=g\eta_0+gmH^2\frac{\sin^2 nt}{\sinh 2mh}\sinh^2 m(h+\eta_0)-g\eta_0\frac{\cosh m(h+\eta_0)}{\cosh mh}\dots\dots\dots(12)$$

右辺第3項を展開し、 $\eta_0^2=-\frac{H^2}{2}\cos 2nt$ とおくと、

$$f(t)=gmH^2\frac{\sin^2 nt}{\sinh 2mh}\sinh^2 m(h+\eta_0)-gm\tanh mh\cdot\frac{H^2}{2}\cos 2nt\dots\dots\dots(13)$$

この式でわかるように $f(t)$ は水面における重複波の2倍の周波数で変動する。したがって浅い水深における重複波の水中における圧力の式には2倍周波数で変動する項を持っている。

直立壁において水面から z なる深さの圧力は一般に次式で表わされる。

$$\frac{p}{\rho_0}=-z+\frac{mH^2\cdot\sin^2 nt}{\sinh 2mh}\cosh^2 m(h+\eta_0)-\cosh^2 m(h+z)\}+\eta_0\frac{\cosh m(h+z)}{\cosh mh}-m\tanh mh\cdot\frac{H^2}{2}\cos 2nt\dots\dots\dots(14)$$

水底 $z=-h$ においては、

$$\frac{p}{\rho_0}=h+\frac{\eta_0}{\cosh mh}+\frac{mH^2\sin^2 nt}{\sinh 2mh}\cdot\sinh^2 m(h+\eta_0)$$

$$+\eta_0)-m\tanh mh\cdot\frac{H^2}{2}\cos 2nt\dots\dots\dots(15)$$

式(14)、(15)は直立壁の壁面および底面における重複波の圧力を表わす一般式である。ただし直立壁前面の水底が水平の場合である。したがって重複波が部分的砕波をする場合を除けば、すべての浅海波の重複波に適用できるはずである。

式(14)、(15)から重複波の圧力に関するおもな特長をあげるとつぎのとおりである。

① 浅海波の重複波においては、基本周波数で振動する項(式(15)では右辺第2項)の値が、2倍周波数の振動に関係のある項(式(15)では右辺第3、4項)の値に比して一般に大きいので、深海波の重複波におけるように、水面波形が静水面にきたときに波圧の山が起ることはない。すなわち、波圧の山は、水面波の山のときか、水面波が山と静水面にあるときとの中間に起る。

② 直立壁前面の水深が波長に比して小さい場合には、波形勾配が相当大きい波においても、波圧は水面波と同じ周期で変動し、その山は波の山のときに起る。

③ 水深が波長に比して大きくなるにつれて、波圧は2倍周波数の項の影響が強くなり、波形勾配が比較的小さい場合でも、水面波の山の前後に2つの山ができる。この山は2倍周波数の項の影響が強い場合には $nt=2k\pi\pm\{(\pi/4)\sim(\pi/3)\}$ のときに生ずる。この場合の波圧曲線は図-3および4に示すように圧力の正の部分と負の部分(静水圧に対して)とは非対称形になる。

水底波圧が水面波と同じ周期で振動する場合と2倍周波数で振動する場合との限界は図-1に示されている。

図-1 重複波の水底波圧の変動

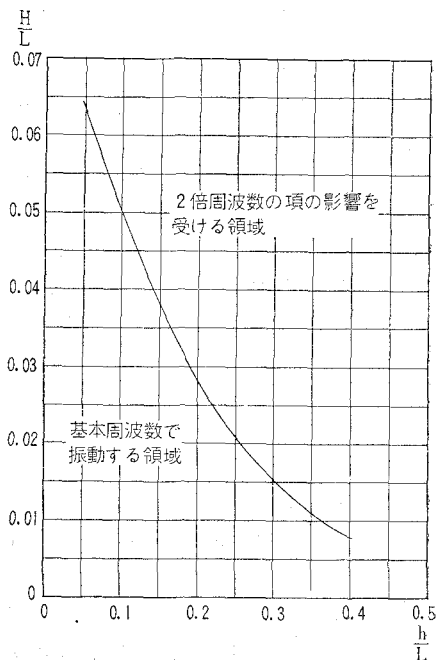


図-2 (a)

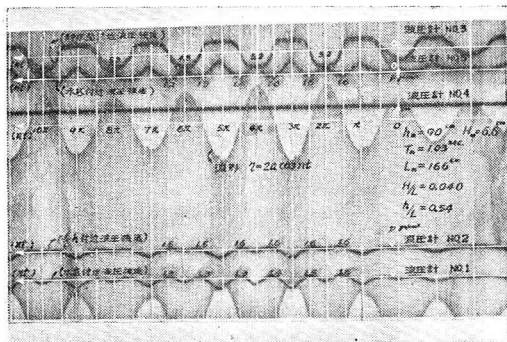


図-2 (b)

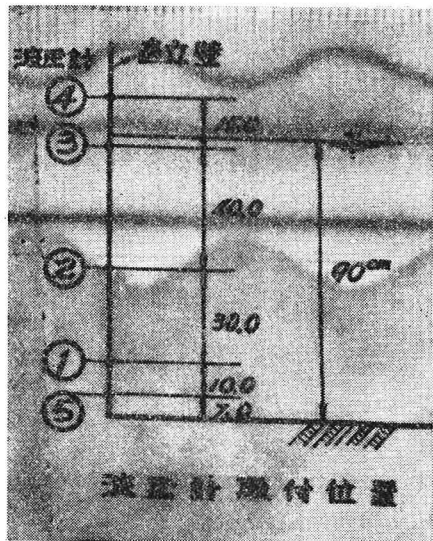


図-1 によれば $h/L \leq 0.10$ の場合 ($h \geq 1.8H$ の条件で) には $H/L \leq 0.050$ の波, すなわち実際に起こるほとんどの波の場合に水底波圧は水面波と同一の周期で変動することがわかる。

以上のことは実験によっても証明することができる。いまここには数例だけを示す。図-2 (a) は水深 $h=90$ cm, 周期 $T=1.03$ sec (縮尺 1/20 として実物に換算すると $T_p=4.6$ sec), 波長 $L=166$ cm, 波高 $H=6.6$ cm, $h/L=0.54$, $H/L=0.040$ の場合の水面の重複波の波形および水面付近から水底付近までの波圧をオシログラフのプロマイドに記録したものである。

図-2 (a) において, No. ⑤ の波圧計は水底から 7 cm 上部に取り付けられたもので, 波圧の山の時刻は水面の波形が $\eta=0$ の時刻に一致した規則正しい 2 倍周期波数で変動している。その波圧の山の実験値は $+(1.2 \sim 1.6)$ g/cm² に対し, 計算値は $+1.65$ g/cm² である。圧力の谷の部の値は負圧になるので, この圧力計では測定できない。したがって記録では山の部より大きく出ているが, これは負圧が大きいのを示すものではない。実験においても正負の圧力強度は同じであるはずである。水底から 17 cm 上方の圧力計 No. ① では, 圧力の山

は $\eta=0$ よりやや波の山のほうへずれている。水深のほぼ中央の No. ② の圧力計では, 圧力の山は $\eta=0$ の時刻から, さらに波の山のほうへずれていることがわかる。

図-3 は, $T=1.12$ sec ($T_p=5.0$ sec), $h=45$ cm, $L=183$ cm, $h/L=0.25$ の場合で,

(a) は $H=10.8$ cm, $H/L=0.059$, 部分的碎波の重複波

(b) は $H=8.0$ cm, $H/L=0.044$, 部分的碎波の重複波

(c) は $H=4.3$ cm, $H/L=0.023$, 完全な重複波の波である。これらは文献³⁾の表-2 中の実験番号 No. 5, 3 および 1 の実験で, (a), (b) は部分的碎波の重複波, (c) は完全な重複波で, 文献³⁾の図-1 の場合である。

図-3 (c) では水底付近の波圧は水面波形と同一の周期で変動している。(b) では波形の山でわずかに波圧が減少し, 波形の山の両側でわずかに大きくなっている。(c) ではこの変動はさらに大きくなり, 波形の山での圧力の谷, その両側の $nt=\pm\{(\pi/3) \sim (\pi/4)\}$ の時刻での圧力の山が大きくなっている。

図-3

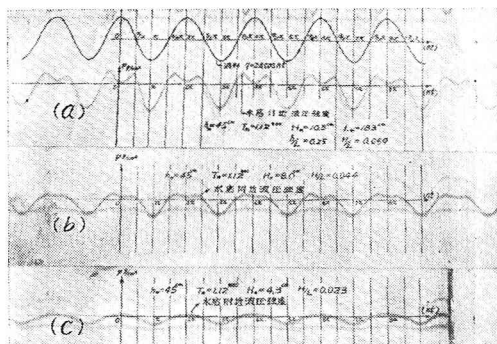


図-4 は $T=1.79$ sec ($T_p=8.0$ sec), $h=45$ cm, $h/L=0.136$ の場合で,

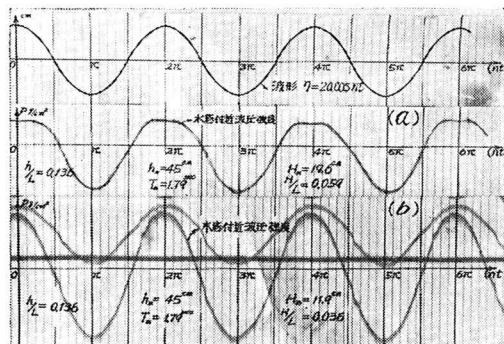
(a) $H=19.6$ cm, $H/L=0.059$, 完全な重複波

(b) $H=11.9$ cm, $H/L=0.036$, 完全な重複波

の波のときの水面波形および波圧の時間的変化を示す。文献³⁾の表-2 中の実験番号 No. 46 と No. 41 で, 図-8 と 7 の波で, 両者とも完全な重複波である。

図-4 (b) の水底付近の波圧は水面波形と同一の周期で変動している。その波圧の山の値は 8.3 g/cm² であるが, 計算値は 7.8 g/cm² である。(a) の波圧は水面波形とはほぼ同一の周期で変動しているが, 山の付近が平で, 波形が山の時刻できわめてわずかではあるが圧力は減少している。計算によると, $nt=0$ のとき (波形が山のとき) が $p=+11.88$ g/cm², $nt=\pi/4$ のとき $p=+12.60$ g/cm² で両者の差はわずかに 0.72 g/cm² である。波形勾配がさらに急になると, 水面波の山付近における波圧の変動はさらに大きくなる。

図—4



一般に重複波が部分的砕波を起こす場合を除けば、すなわち $T_p \leq 7 \text{ sec}$ で $H/L > 0.040$ の場合を除けば、式 (14) および式 (15) はほとんどすべての重複波（完全な重複波を意味する）の場合に実験に良く合うといつてさしつかえないと考えられる。

3. 重複波の部分的砕波について

すでに記したように浅海波の重複波においては 図—1 の曲線より上のほうの範囲においては、水面波の山のときに波圧は最大にはならず、その前後の $nt = \pm \{(\pi/3) \sim (\pi/4)\}$ 付近において最大になる。この水面波の山の前後における波圧の振動は $T_p \leq \sim 7.0 \text{ sec}$ で、 $H/L \geq \sim 0.040$ の波のとき、すなわち重複波の波形が不安定になったときに大きくなり、そのときには波圧は他の場合の重複波の波圧より相当大きい。この範囲の波を部分砕波した重複波と呼んでいる。この範囲ではすでに記したように（文献²⁾ 参照）、式 (14) および式 (15) は適用できない。また Gerstner のだ円トロコイド波理論から導いた式（文献³⁾ 中の式 (4) および (6)）も同様に適用できない。これは両理論とも微小振幅波で H/L が比較的小さく、波長あるいは周期があまり小さくないという条件から導かれたのであるからである。

いうまでもなく重複波においては、直立壁あるいは腹の鉛直面上においては、水粒子は水平運動をせず、ただ鉛直方向に往復運動をするだけである。しかし h/L および H/L をほぼ同じにして、部分砕波する場合 ($T_p \leq 7 \text{ sec}$, $H/L \geq 0.040$) の波圧と部分砕波しない場合 ($T_p \geq 8 \text{ sec}$) を比較すると、前者が後者に比して相当大きいことから判断して（部分砕波の場合は理論式とは比較できない）、部分砕波の場合には直立壁において水粒子はある程度の水平速度を持っているのであらうと考えられる。ただし水底が水平であるかぎり、浅海波の砕波におけるような大きな運動量の輸送はないから、波圧の2つの山の形も、進行波の砕波の衝撃圧力において見られるような非常に短い時間に急激に増減する尖鋭な曲線は描かないと考えられる。

しかし直立壁前面の水底にやや急な勾配を与えると

か、低基混成堤のような場合に、 $h/H \geq 2$ にして、周期が短く、波形勾配が大きい波をあてると、運動量輸送をともなう砕波を起こして衝撃圧力に似た尖鋭な波圧の山をもった波圧曲線を記録する。この場合、周期が比較的大きく、波形勾配があまり大きくないときは、直立壁前面にはほぼ重複波に近い波が起こり、その波圧曲線は2倍周期波数の項の影響を強く受けて、水面波の山の前後で2つの山を生ずる波圧曲線を描く。このような場合についてはすでに浜田博士が指摘している⁴⁾。この場合でも重複波である範囲においては、波圧曲線は式 (14), (15) の計算値にはほぼ合うはずである。しかし部分砕波する場合および運動量の輸送をともなった部分的砕波の場合には、その最大圧力（peak pressure）の値は重複波圧の式から計算した値よりはかなり大きくなる。

4. 重複波圧式の適用限界について

重複波の波形が不安定になって部分的に砕波する限界の条件は岸などによって求められている^{5), 6)}。重複波が部分砕波する限界がこの波形の不安定限界と何んらかの関係があるのではないかと考えられる。岸教授は著者の実験値を用いて H_0/L_0 をパラメータとして H/L と h/L との図を描いて興味深い考察を行なっている²⁾。その図によると、重複波が部分的砕波を起こすのは $H_0/L_0 > 0.03$ の場合である。

しかし 図—1 によってもわかるように、部分砕波の限界は H/L と h/L だけでは決められず、波の周期 T を考慮する必要がある。いうまでもなく浅海波では T は h/L と L の関数であって、 T^2 を L で置きかえることができない。実験の結果では、 $T_p \geq 8 \text{ sec}$ の波では、すべての H/L の波が $h/L < 1/2$ の条件で完全な重複波を生じ、 $T_p \leq 7 \text{ sec}$ で $H/L \geq \sim 0.040$ の波は $h/L < 1/2$ の条件で部分砕波を生ずるから、 H/L と h/L だけでは区別ができない。

なお重複波が部分砕波するときは波圧式 (14) および式 (15) が適用できないことはすでに記したが、その範囲においては式 (14), (15) から得られる波圧強度は水底付近で急激に減少し、 H/L が大きいときはしばしば負の値をとる。文献⁹⁾ の表—2 の中では、式 (15) が負になる場合は波圧合力 P_e を求めなかったが、負にならないときは一応 P_e を求め、 P_e/P_e を記入した。それゆえ、部分砕波領域では P_e/P_e の値が2~10程度にもなっているが、それは P_e が完全な重複波の場合の波圧合力の2~10倍も大きいことを示すのではなく、 P_e が不合理に小さいためである。部分砕波した場合でも、水面波の山の前後における波圧の山がとがって衝撃圧力のような形状をとった場合は全くなかった。岸教授の論文²⁾ にはこの点について誤解があるようであるからつけ加えておく。

5. 直立壁前面水底における水平速度について

直立壁前面に生じた重複波の節の水底における最大水平速度は次式で表わされる。

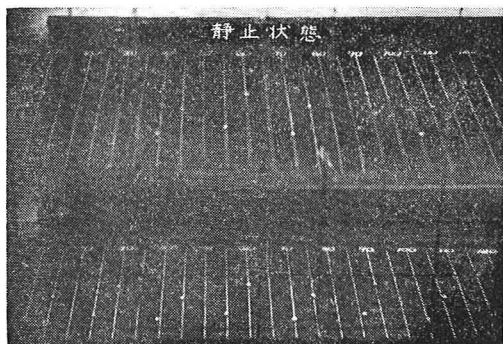
$$(u_b)_{\max} = \frac{\frac{2\pi}{T} H}{\sinh 2\pi \frac{h}{L}} = \frac{nH}{\sinh mh} \dots\dots(16)$$

式(16)によれば、 u_b は波高 H および周期 T あるいは波長 L が大きくなるにつれて増大する。たとえば基本波の周期が 10 sec 以上で、波高が 5~6 m の場合には $u_b=3.90\sim4.68$ m/sec になる。それゆえ、 $h\geq 2H$ の海に直立防波堤を築造する場合、重複波の節付近の水底においてこのような水平速度によって海底が洗掘され、

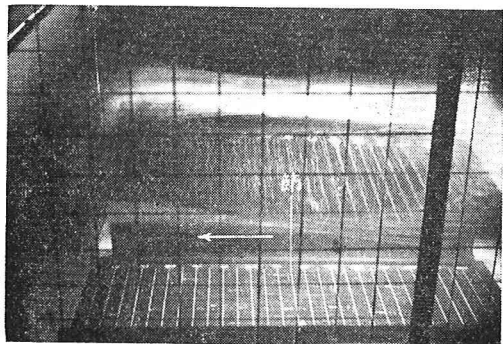
図-5 重複波の水底粒子の運動

$T=1.62$ sec, $H=10.8$ cm,
 $H/L=0.035$, $h=60$ cm

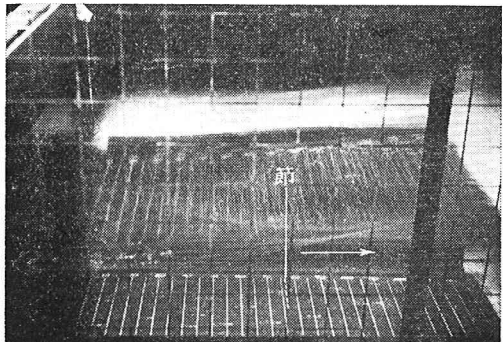
(a)



(b)



(c)



それが原因となって防波堤基部が洗掘されるおそれはないか。この問題に関しては、今までに二、三の直立防波堤および低基混成堤の実験において、水底付近の速度の概略の値を測定してきたが、もう少し正確な値を得るため、断続閃光写真撮影で水底粒子の 1/10 sec ごとの移動を測定した。実験写真の一部を示すと図-5 および 6 のとおりである。

両実験とも水深 $h=60$ cm=一定である。

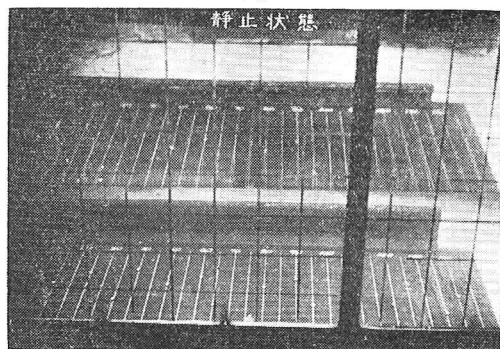
- ① 静止のとき
- ② 直立壁において水面が上昇するとき
- ③ 直立壁において水面が下降するとき

このようにして測定した最大水平速度を式(16)による計算値と比較すると表-1 のとおりである。表-1 に

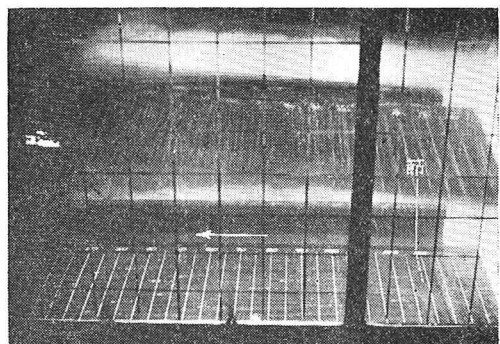
図-6 重複波の水底粒子の運動

$T=2.25$ sec, $H=12.5$ cm,
 $H/L=0.024$, $h=60$ cm

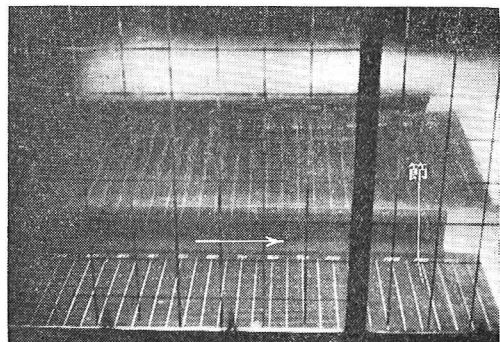
(a)



(b)



(c)



よれば実験値は計算値によく合っている。今回の実験結果から判断すると、実際の海における u_b の値は今後は実験を行なわなくとも計算のみで正確に推定できると考えられる。

表-1 には実験が現地の 1/20 であるとして実験値に対する実物への換算値をそれぞれの値の右に記入しておいた。すでに記したように u_b が大きくなる場合には直立堤から節までの距離 $(1/4)L_p$ の値も大きくなるので、

u_b による海底の洗掘は比較的安全であるが、設計波高が大きい場合には、直立堤基部から $(1/4)L_p$ までの海底を捨石あるいはコンクリートブロックで被覆する必要があると考えられる。

付記 この論文に関する計算および実験は大学院修士課程学生時川和夫君および学部学生佐伯讓君に手伝ってもらった。ここに記して謝意を表す。

表-1 重複波の水底分子の速度

T		h		L		H		H/L	直立壁から(1/4) L点までの距離		理論値		実験値		水底水分子 の運動方向
T_m (sec)	T_p (sec)	h_m (cm)	h_p (m)	L_m (cm)	L_p (m)	H_m (cm)	H_p (m)		$(1/4)L_m$ (cm)	$(1/4)L_p$ (m)	$(u_b)_{\max}$ (cm/sec)	$(u_b)_{\max}$ (m/sec)	$(u_b)_{\max}$ (cm/sec)	$(u_b)_{\max}$ (m/sec)	
1.10	4.9	60	12.0	175	35.0	8.7	1.7	0.050	43.8	8.8	11.7	0.52	{12.1 10.0	{0.54 0.45	直立壁方向 波の進行方向
1.11	5.5	60	12.0	186	37.2	11.8	2.4	0.064	46.5	9.3	17.9	0.80	16.1	0.72	直立壁方向
1.55	6.9	60	12.0	298	59.6	7.6	1.5	0.026	74.5	14.9	19.0	0.85	17.3	0.77	直立壁方向
1.61	7.2	60	12.0	309	61.8	10.8	2.2	0.035	77.3	15.5	25.8	1.15	{27.8 26.1	{1.23 1.17	直立壁方向 波の進行方向
1.57	7.0	60	12.0	312	62.4	15.0	3.0	0.048	78.0	15.6	39.3	1.76	{40.0 35.0	{1.79 1.58	直立壁方向 波の進行方向
2.25	10.0	60	12.0	513	102.6	10.9	2.2	0.021	128.3	25.7	38.0	1.70	{37.0 36.0	{1.65 1.61	直立壁方向 波の進行方向
2.25	10.0	60	12.0	513	102.6	12.5	2.5	0.024	128.3	25.7	43.5	1.94	{44.1 42.1	{1.97 1.88	直立壁方向 波の進行方向

実験は現地の 1/20 縮尺として実物換算値が示されている。

参考文献

- 1) 永井：重複波の発生条件と重複波の波圧，第9回海岸工学講演会講演集，昭和37年10月(1962年)。
- 2) 岸 力：波動論，水工学研修会テキスト，土木学会水理委員会，1964年7月。
- 3) 永井：深い海中に築造された直立防波堤に働く波圧，第10回海岸工学講演会講演集，昭和38年10月。

- 4) 浜田徳一：構造物に作用する波力，第3回海岸工学講演会講演集，昭和31年11月。
- 5) 岸 力：海岸堤防に関する研究(2)一有限振幅の浅水重複波，建設省土木研究所報告，第90号，昭和30年10月。
- 6) Suquet, F. and Wallet, A.: Basic Experimental Wave Research, Proc. I.A.H.R., 1953.