

回折問題の一解法について

和田 明*

要 旨 これまでの多くの回折理論は、半無限壁の回折に対する Sommerfeld の解の重ね合わせによって求められている。このように解法の多くは変数分離法によっており問題の対象となる幾何学的形状にかなり制限が加えられる。ここで提示する Wiener-Hopf 技巧によれば複雑な境界を有する回折問題の領域に有意義な拡張を提供してくれる。

1. 概 要

だ円型偏微分方程式の境界値問題が、ここでのべようとするいわゆる Wiener-Hopf 技巧によって特殊な型の積分方程式として式化できることを最初に示唆したのは Wiener と Hopf (1931) によってであり、それから 10 年ほど経てから、J. Schwinger¹⁾ によって半無限平面による回折問題が積分方程式の形で式化でき、Wiener-Hopf 法で解くことに成功した。Schwinger の発見に先立って厳密に解かれた回折問題といえば Sommerfeld²⁾ による半無限平面による光の回折理論であった。彼の解がまた水波の回折問題の解であることを提唱したのは Penny および Price (1944)³⁾ である。また Putnam および Arthur (1948) の研究報告⁴⁾ には水波の回折波に対する簡易解が展開されており、完全解と簡易解を深海波の実験によって実証した資料が与えられている。これら一連の実験においては単一防波堤の先端の影響を受ける水域が確認されただけであった。さらに後に、Blue および Johnson (1949)⁵⁾ は防波堤の切れ目における回折の実験を深海波、浅海波の両者の場合について行なっている。また田中博士は、先の Sommerfeld の結果を水波の回折問題に適用しようとする厳密な形にまとめ上げて、防波堤開口部から港内に侵入する回折波、島状孤立防波堤による回折、防波堤が一直線上にない二重回折波の問題などにつきこの解を重ね合わせて各領域での回折波の影響を解析論じ、この学問領域に大きな貢献をした⁶⁾。防波堤開口部から港内に侵入する回折波については、Schwarzschild (1902) が、半無限壁の回折に対する Sommerfeld の解を重ね合わせてその攪乱項を修正する方法を示した⁷⁾。ところが上述の解法の多くは変数分離法によっており問題の対象とする幾何学的形状にかなり制限が加えられる。これに対して、変数分離法によって

してはどうしても解決できない問題に対処するためにも、この Wiener-Hopf 法は Fourier 積分の適用によって問題の領域に対する有意義な拡張を提供してくれる。このように複雑な境界を有する回折問題を巧妙に解くことに成功した Schwinger の貢献は実際にはまだ重要なものとしてみなければならない。すなわち J. Schwinger は $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ の方程式に関連する電磁波理論や音響学の境界値問題を

$$\int_0^\infty g(\xi) \cdot K(x-\xi) d\xi = f(x) \quad \xi > 0$$

の型の積分方程式として式化するのに Green の定理をいかに有用化できるかを示し、これが Wiener-Hopf 法で解くことができることに注目した。先に A.E. Heins (1956)⁸⁾ は音響回折理論において導波管の境界値問題を積分方程式法にもとづいて見出しており、最近 J. Crease (1956, 1958)⁹⁾ も同じ方法で回転体系における半無限水路内へ伝播する波の特性を研究し任意形状を有する回折問題に大きな貢献をした。このように今まで多くの問題が積分方程式法によって解かれてきたが、この方法とは異なっているが数学的に等価である別の解法がある。この方法は D.S. Jones (1952)¹⁰⁾ によって展開されたもので、任意の回折問題を形式的な方法で解くものである。この方法によれば、だ円型偏微分方程式に Fourier 変換を直接適用すると積分方程式を作る代りに複素変数方程式が得られる。積分方程式法の解法によれば Green 関数の適切な選択、積分方程式の式化について Fourier 変換の適用などが必要となってくるが、これに反して Jones の解法によれば Fourier 変換を偏微分方程式に適用しただけで Wiener-Hopf 方程式が直接得られるのでより簡便な方法といえる。積分方程式を式化する際 Green 関数の選択が非常にやっかいであるし Hankel 関数のような特殊関数も必然的に導入されてくるがこれら複雑な関数も Jones の方法においては全く避けられる。この Jones の解法においては、必要とする変換は解の過程において得られる。

$$A(\alpha) \cdot T_+ \{ \zeta(\alpha) \} + B(\alpha) \cdot T_- \{ \zeta(\alpha) \} + C(\alpha) = 0$$

型の Wiener-Hopf 式の標準形においては 2 つの未知関数が存在している。Jones の解法においては、これらのものは完全に対称的に表われ、おのおのの未知関数の物理的意義はただちに明瞭である。一方、積分方程式法に

* 正会員 阪大工博 財団法人 電力中央研究所

においては対称性は積分方程式が変換されるとき再現するけれども、式それ自身において失われてしまう。そしてこの解法の主要な利点といえ、該当する問題がはたして Wiener-Hopf 技巧によって解くことができるかどうか判別することが非常に容易であるということである。というのは、対応する積分方程式は半無限領域を有し、核は $(x-\xi)$ のみの関数である $K(x-\xi)$ なる形を有しているからである。複雑な問題において Jones の方法を適用する際しばしば変換された方程式を Wiener-Hopf 式の標準形に直すことにきわめて複雑さをともなうことが多い。

上述の二つの方法の特性から判断すれば、Jones によって展開された理論の方がより容易であるように思われる。したがって本論文で適用されるのは Jones の解法である。3. の前半においては Sommerfeld の半無限長防波堤問題について Jones の方法にもとづいて解を求め、この方法におけるいくつかの基本手段を明らかにしている。3. の後半では近年話題になっている高潮防衛対策の大防波堤建設にとまうその効果について言及し、4. においては特殊な境界を有する回折問題を解くための近似解法が提示されている。この方法によれば有限厚さの防波堤、島状孤立防波堤、防波堤開口部といった複雑な境界による回折問題を解くことができる。特に島状孤立防波堤による防波の有効性を例にとりて計算を進め、防波堤長さに比して入射波長の大なる場合防波堤両端面からの波の相互干渉による影響が無視できないと考え、回折波に対する補正を与えている。

2. 基本方程式

防波堤に沿って x 軸の正側を右方にとり、それに垂直に y 軸をとる。水深 h を一様とし、波は防波堤に角 θ をなして入射するものとする。表面波の速度ポテンシャル ϕ は複素数表示によって

$$\phi = \zeta(x, y) \cdot \cosh k(h+x) e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となり、長波の水位変動は次式で表わされる。

$$\zeta = \zeta(x, y) \cdot e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

したがって、表面波および長波に対してはいずれも

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

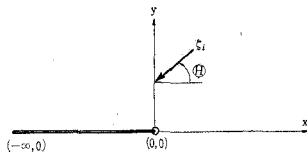
を満足するように、関数 $\zeta(x, y)$ を定めればよいことになる。ここに、 $k = 2\pi/\lambda$ であって λ は波長を表わす。

式 (3) 中の k は小さい正の虚数部分を有するものとし、問題の解が得られたとき 0 とおくことにする。

3. $A(\alpha) \cdot T_+ \{\zeta(\alpha)\} + B(\alpha) \cdot T_- \{\zeta(\alpha)\} + C(\alpha) = 0$ の型の場合

(1) 回折問題のものと式となる Helmholtz の式 (3) を解く際に必要とされるいくつかの基本手段を示すため

図-1 半無限防波堤



に、本節では解のよく知られた Sommerfeld の半無限平面回折問題についてその例を取り解を求めよう。偏微分方程式

問題を取り扱うとき多かれ少なかれ本解法のように形式的な手段によって解を得る方がより便宜である。最もこの時、この形式解が問題の条件を忠実に満足しているかどうかを検証することが必要となってくる。もし問題が唯一解を有していることがわかるならば、われわれの解が正しいものと結論することができる。このような証明問題の議論については別の機会に譲ることにして得られた解が唯一解であるとして議論を進める。図-1 のように 1 本の半無限防波堤の端点を原点とし、入射波を $\zeta_i = \exp\{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\}$, $0 < \theta < \pi \dots\dots (4)$ とすると任意地点での水面上昇は $\zeta = \zeta_i + \zeta_r$ によって表わされる。また境界条件はつぎのようになる。

(i) $-\infty < x < 0$, $y=0$ で $\partial \zeta_i / \partial y = 0$, したがって、 $\partial \zeta / \partial y = ik \sin \theta \cdot \exp(-ikx \cos \theta)$ 。

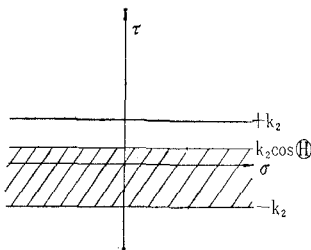
(ii) $-\infty < x < \infty$, $y=0$ で $\partial \zeta_i / \partial y$, したがって $\partial \zeta / \partial y$ は連続。

(iii) $0 < x < \infty$, $y=0$ で、 ζ_i したがって ζ は連続。

さらに、無限遠点および原点である防波堤端における ζ の挙動に関する仮定が必要となってくる (付録 1 参照)。さてここで、つぎに定義される Fourier 変換を導入する。

$$\left. \begin{aligned} T\{\zeta(\alpha, y)\} &= T_+\{\zeta(\alpha, y)\} + T_-\{\zeta(\alpha, y)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx \\ \alpha &= \sigma + i\tau \\ T_+\{\zeta(\alpha, y)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx \\ T_-\{\zeta(\alpha, y)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

図-2



任意の y に対して条件(ii) (付録 1 参照) から、 $x \rightarrow \infty$ のとき $|\zeta| < D_1 \cdot \exp(-k_2 x)$, $x \rightarrow -\infty$ のとき $|\zeta| < D_2 \cdot \exp(k_2 \cdot \cos \theta x)$, (D_1, D_2 : 定数) なるゆえ、

$T_-\{\zeta\}$ は $\tau < k_2 \cdot \cos \theta$, $T_+\{\zeta\}$ は $\tau > -k_2$ でそれぞれ解析的であってまた $T\{\zeta\}$ は帯状区間 $-k_2 < \tau < k_2 \cdot \cos \theta$ で正則である (図-2 参照)。式 (3) に式 (5) で定義された変換を適用すると次式が得られる。

$$d^2 T\{\zeta\} / dy^2 - r^2 \cdot T\{\zeta\} = 0, \quad r = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} \dots\dots (6)$$

上式の解は

$$\left. \begin{aligned} T\{\zeta(\alpha, y)\} &= A_1(\alpha)e^{-\tau y} + B_1(\alpha)e^{\tau y}, \quad (y \geq 0) \\ &= A_2(\alpha)e^{-\tau y} + B_2(\alpha)e^{\tau y}, \quad (y \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 A_1, A_2, B_1 および B_2 は α のみの関数である。

式 (6) において、 τ の実数部分は $-k_2 < \tau < k_2$ で常に正になるゆえ、式 (7) で $B_1 = A_2 = 0$ となる。 $\alpha T\{\zeta\}/\alpha y$ は $y=0$ で連続であるから、式 (7) から

$$A_1(\alpha) = -B_2(\alpha) = A(\alpha)$$

を得る。変換が $y=0$ で不連続であるとき、

$$T_+\{\zeta(\alpha, \pm 0)\} = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx$$

$$T_-\{\zeta(\alpha, \pm 0)\} = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx$$

のような規約を用いることにする。たとえば $(\lim, y \rightarrow 0)$ は y の正の側から 0 に限りなく近づいた時の極限を意味するものとする。導関数についても全く形式的にこのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} T_+\{\zeta'(\alpha, y)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot e^{i\alpha x} dx \\ T_-\{\zeta'(\alpha, y)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot e^{i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

これらの定義を使って境界条件式を書き直すところになる。すなわち、境界条件 (iii) から

$$T_+\{\zeta(+0)\} = T_+\{\zeta(-0)\} = T_+\{\zeta(0)\} \dots \dots (9)$$

また境界条件 (ii) から、 $T_+\{\zeta'(\alpha, +0)\} = T_+\{\zeta'(\alpha, -0)\} = T_+\{\zeta'(\alpha, 0)\}$ 。 $T_-\{\zeta'\}$ に対しても同様である。これらの関係を式 (7) に適用すると、

$$T_+\{\zeta(0)\} + T_-\{\zeta(+0)\} = A(\alpha) \dots \dots (10.a)$$

$$T_+\{\zeta(0)\} + T_-\{\zeta(-0)\} = -A(\alpha) \dots \dots (10.b)$$

$$T_+\{\zeta'(0)\} + T_-\{\zeta'(0)\} = -r A(\alpha) \dots \dots (10.c)$$

なる関係式を得る。正則領域が知られている関数のみをふくむ式を求めるため式 (10) から $A(\alpha)$ を消去する。

式 (10.a) と (10.b) を加えると

$$\begin{aligned} 2 T_+\{\zeta(0)\} &= -T_-\{\zeta(+0)\} - T_-\{\zeta(-0)\} \\ &\dots \dots (11) \end{aligned}$$

が得られ、つぎに式 (10.a) から (10.b) を差し引きこの結果生じる式と式 (10.c) との間で $A(\alpha)$ を消去すれば

$$\begin{aligned} T_+\{\zeta'(0)\} + T_-\{\zeta'(0)\} &= -(1/2) \cdot r [T_-\{\zeta(+0)\} \\ &\quad - T_-\{\zeta(-0)\}] \dots \dots (12) \end{aligned}$$

いま簡単のために

$$\left. \begin{aligned} T_-\{\zeta(+0)\} - T_-\{\zeta(-0)\} &= 2 D_- \\ T_-\{\zeta(+0)\} + T_-\{\zeta(-0)\} &= 2 S_- \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

とおくと、式 (8) および (9) はつぎのようになる。

$$T_+\{\zeta(0)\} = -S_- \dots \dots (14)$$

$$T_+\{\zeta'(0)\} + \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta)} = -r D_- \dots (15)$$

これら 2 つの方程式は標準型の Wiener-Hopf 式であって両者とも $-k_1 < \tau < k_2 \cos \theta$ で成り立っている。式 (10) から、 $A(\alpha)$ を消去した目的はこの型の方程式を得ることであった。式 (15) を上半面 $\tau > -k_2$ で正則な $(\alpha +$

$k)^{1/2}$ で割るとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{T_+\{\zeta'(0)\}}{(\alpha + k)^{1/2}} + \frac{k \cdot \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha + k)^{1/2} \cdot (\alpha - k \sin \theta)} \\ = -(\alpha - k)^{1/2} \cdot D_- \dots \dots (16) \end{aligned}$$

上式の左辺の第 2 項をつぎのように分解する。

$$\begin{aligned} \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha + k)^{1/2} \cdot (\alpha - k \cos \theta)} &= \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta)} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(\alpha + k)^{1/2}} - \frac{1}{(k + k \cos \theta)^{1/2}} \right\} \\ &+ \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (k + k \cos \theta)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} \\ &= H_+(\alpha) + H_-(\alpha) \dots \dots (17) \end{aligned}$$

式 (17) を式 (16) へ代入して再整理をすると

$$\begin{aligned} T_+\{\zeta'(0)\}/(\alpha + k)^{1/2} + H_+(\alpha) \\ = -(\alpha - k)^{1/2} \cdot D_- - H_-(\alpha) \equiv E(\alpha) \dots (18) \end{aligned}$$

が得られる。式 (18) の両辺は帯状領域において正則であるので、左辺は右辺の解析接続になっており、 α 平面の全域にわたって解析的である。 $|\alpha| \rightarrow \infty$ のときの両辺の関数の挙動から、 $E(\alpha)$ は Liouville の定理によって 0 にならなければならない¹¹⁾。すなわち

$$T_+\{\zeta'(0)\} = -(\alpha + k)^{1/2} \cdot H_+(\alpha) \dots \dots (19.a)$$

$$D_- = -H_-(\alpha)/(\alpha - k)^{1/2} \dots \dots (19.b)$$

式 (10.c), (17), (19.a) および $T_-\{\zeta'(0)\}$ より、 $A(\alpha)$ はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k \sin \theta}{(k + k \cos \theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} \\ &\dots \dots (20) \end{aligned}$$

解は式 (7) と逆 Fourier 変換公式を使うと求まる。

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \mp \frac{(k - k \cos \theta)^{1/2}}{2\pi} \\ &\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \tau y}}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha \dots \dots (21) \end{aligned}$$

ここに、 $-k_2 < \alpha < k_2 \cos \theta$ であり、 $(-)$ 記号は $y > 0$ 、 $(+)$ 記号は $y < 0$ に関するものである。一方、式 (14) は式 (15) と数学的に等価であってこれを考慮に入れる必要はなく、完全解は式 (15) のみから求めることができる。

式 (21) の積分を遂行すると、 $0 < \theta < \pi$, $0 < \theta < \pi$ に対して

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= \pm i \cdot e^{\tau/4 \cdot i} / \sqrt{\pi} \cdot [-e^{-ikr \cos(\theta - \theta)} \\ &\quad \cdot F\{(2kr)^{1/2} \cdot \cos(\theta - \theta)/2\} \\ &\quad + e^{-ikr \cos(\theta + \theta)} \cdot F\{(2kr)^{1/2} \cdot \cos(\theta + \theta)/2\}] \dots \dots (22) \end{aligned}$$

ここに $F(v) = \int_v^\infty e^{iu^2} \cdot du$

(2) ここでは前節より複雑な形状を有する境界値問題を解くために、1 例をとりあげ同じ基本的な技巧を適用した。さて最近湾口に大防波堤を設置して外港を作り、沿岸地域の高潮の被害を防止軽減するとともに、この大防波堤の内側の海面を埋め立てて、臨海工業地帯を

限度で多項式となるように選ぶべき任意関数である。
 $|\alpha| \rightarrow \infty$ としたとき、 L_+ 、 L_- は無限乗積のなかの $4b^2k^2/n^2\pi^2$ の項に無関係であるので下半平面で

$$L_-(\alpha) \sim \exp \left\{ \chi_2(\alpha) + \frac{2ib\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{-2\alpha}{k} \right) \right\} \\
\cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2ib\alpha}{n\pi} \right) \cdot e^{-\frac{2ib\alpha}{n\pi}} \dots\dots\dots (38) \\
\sim D \exp \left[\chi_2(\alpha) + \frac{2ib\alpha}{\pi} \left\{ 1 - r_c + \ln \left(\frac{i\pi}{2bk} \right) \right\} \right] \\
\dots\dots\dots (39)$$

なる挙動をする。ただし、 $D: \alpha$ に無関係な定数、 $r_c = 0.5772$ (Euler 定数) である。

いま $\chi_2(\alpha)$ を

$$\chi_2(\alpha) = -\frac{2ib\alpha}{\pi} \left\{ 1 - r_c + \ln \left(\frac{i\pi}{2bk} \right) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

と選ぶとき、 $L_+(\alpha)$ および $L_-(\alpha)$ は $|\alpha| \rightarrow \infty$ のときそれぞれ上および下半平面で定数に漸近する。式 (37) は数値計算の作業に便利なるように次のように変換できる。

$$L_+(k) = \exp \left[\frac{2ibk}{\pi} \left\{ 1 - r_c + \ln \left(\frac{i\pi}{2bk} \right) \right\} \right] \\
+ i \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2bk}{n\pi} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{2bk}{n\pi} \right) \right\} \dots\dots\dots (41)$$

および

$$L_+(k \cos \theta) = \left\{ \frac{\sin(2bk \sin \theta)}{2bk \sin \theta} \right\}^{1/2} \\
\cdot \exp \left[\frac{2ibk \cos \theta}{\pi} \left\{ 1 - r_c + \ln \left(\frac{i\pi}{2bk} \right) \right\} \right] \\
+ \frac{2ibk \theta \sin \theta}{\pi} + i \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2bk \cos \theta}{n\pi} \right) \right. \\
\left. - \tan^{-1} \frac{k \cos \theta}{\left\{ \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 - k^2 \right\}^{1/2}} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

解は、つぎのような Fourier 変換の項で表わすことができる。

$$\zeta = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F \cdot \cosh r(b+y) e^{-2\tau b - i\alpha x} d\alpha \\
(-b < y < b) \dots\dots\dots (43.a)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F \cdot \sinh 2\tau b \cdot e^{-\tau b - \tau y - i\alpha x} d\alpha \\
(y > b) \dots\dots\dots (43.b)$$

沿岸近辺および防波堤による遮へい水域内の擾乱波高は、式 (43) の極における留数を計算すれば算出できる。計算結果をまとめると

(I) $x > 0, \infty > y > -b$

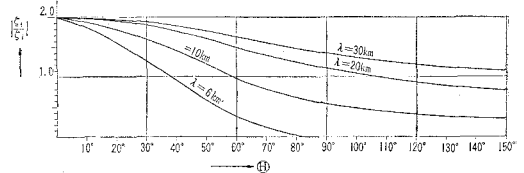
$$\zeta_t = e^{-ik(x \cos \theta - y \sin \theta) - i\omega t} + e^{-ik\{x \cos \theta - (y+2b) \sin \theta\} - i\omega t} \dots\dots\dots (44)$$

(II) $x < 0, \infty > y > b$

$$\zeta_t = e^{-ik(x \cos \theta - y \sin \theta) - i\omega t} + e^{-ik\{x \cos \theta + (-y+2b) \sin \theta\} - i\omega t} \dots\dots\dots (45)$$

(III) $x < 0, b \geq y \geq -b$

図-4 入射角と最大振幅比との関係



$$\zeta_t = 2 \left[\frac{\sin(2bk \sin \theta)}{2bk \sin \theta} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{2ibk}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} \sin \theta \right. \right. \\
\left. \left. - \theta \sin \theta + (1 - \cos \theta) \right\} 1 - r_c + \ln \left(\frac{i\pi}{2bk} \right) - i\omega t \right] \dots\dots\dots (46)$$

沿岸地帯と防波堤間の距離を $2b = 3.0$ km とし、これに外海から波高を一定にし種々の入射角、波長を有する長周期波 (波長 $\lambda > 6$ km) を入射せしめたとき、沿岸水域および防波堤遮へい水域内の水位上昇を数値計算した。初期水深 $h = 10$ m にとりてあり、入射波高を 1 m とする。図-4 は入射角 $\theta = 30^\circ \sim 150^\circ$ に対して防波堤遮へい水域内で起こりうる最大振幅比を長周期入射波長 $\lambda = 6, 10, 20, 30$ km の 4 つの場合の計算値である。入射角が防波堤面に直角に近づくほど、遮へい水域内の波高は減少し、 $2b/\lambda > 0.15$ の波長の波であれば防波堤遮へい効果が $x < 0$ の全水域にわたって現われ、 $2b/\lambda < 0.15$ のときにはいかなる条件の下においても振幅比の値は 1 を超してしまふ。

4. $A(\alpha) \cdot T_+ \{ \zeta(\alpha) \} + E(\alpha) \cdot T_+ \{ \zeta(-\alpha) \} + B(\alpha) \cdot T_- \{ \zeta(\alpha) \} + D(\alpha) \cdot T_- \{ \zeta(\alpha) \} + C(\alpha) = 0$ の型の場合

いままで考えてきた回折波の問題においてはその境界をかなり単純化させて問題が取り扱われてきた。たとえば二次元波動方程式に関連して、平行した無限に薄い半無限および無限長境界値問題のみが考えられた。しかるに本節においては、有限厚さを有する防波堤、島状孤立防波堤、防波堤開口部とかいった特殊な境界による回折問題の近似解法について議論を進める。数学的見地から、これまで考慮してきた二次元波動方程式問題は無限平行境界面上での 2 つの部分混合境界値条件 (すなわち $y = \pm b, -\infty < x < \infty$ で $-\infty < x < 0$ および $0 < x < \infty$ で ζ および $\partial \zeta / \partial y$ を含む互いに異なる条件を与える) をふくんでいた。ここでは以下にのべるような二次元波動方程式の回折問題を解くことにする。

(i) 境界面が互いに平行である場合と同様、 $x = \text{一定}$ 、 $y = \text{一定}$ のように互いに垂直な境界を有する場合。

(ii) 境界が m 個の部分に分割され、各分割断面上で ζ および $\partial \zeta / \partial y$ の条件が規定されているときの m 個の部分混合境界値問題がそれであるが対象とする境界が島状孤立防波堤、防波堤開口部のような場合なので以下 3 つの部分混合境界値問題のみを考える。

3. で考えた厳密解の過程に表われてくる Wiener-Hopf 方程式の標準形は

$$A(\alpha) \cdot T_+(\zeta(\alpha)) + B(\alpha) \cdot T_-(\zeta(\alpha)) + C(\alpha) = 0$$

の型の式に帰着せしめることができた。上式はそれぞれ上および下半平面で正則な 2 つの未知関数をふくんでおいて、複素平面 $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ なる帯状領域において成立する。ただし、 A, B および C は既知の解析関数とする。ところが本節で取り扱う特殊な境界値問題の場合、Wiener-Hopf 式は

$$A(\alpha) \cdot T_+\{\zeta(\alpha)\} + E(\alpha) \cdot T_+\{\zeta(-\alpha)\} + B(\alpha) \cdot T_-\{\zeta(\alpha)\} + D(\alpha) \cdot T_-\{\zeta(\alpha)\} + C(\alpha) = 0 \dots (47)$$

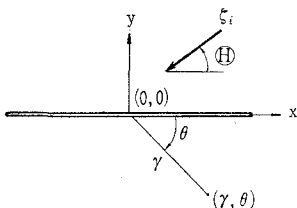
なる型の式におきかえられる。ただし、 $A, \dots, E$ は既知の解析関数、 $T_+\{\zeta(\alpha)\}$ および $T_-\{\zeta(\alpha)\}$ は未知関数、 $T_1\{\zeta(\alpha)\}$ は未知の積分関数である。式 (47) は前述の基本的な Wiener-Hopf 技巧によって厳密に解くことはできないが $E(\alpha) = B(\alpha) \cdot b(\alpha)$ とおくと数学的に取り扱いやすくなり、したがって (47) 式はつぎのように書ける。

$$A(\alpha) \cdot T_+\{\zeta(\alpha)\} + B(\alpha) [T_-\{\zeta(\alpha)\} + b(\alpha) \cdot T_+\{\zeta(-\alpha)\}] + D(\alpha) \cdot T_1\{\zeta(\alpha)\} + C(\alpha) = 0 \dots (48)$$

上式の中に表われる関数 $b(\alpha)$ の性質が近似解において重要な役割を演じる。ここでは紙面の関係上、孤立防波堤による回折現象を例にとり説明する。一般に島状孤立防波堤は一对の半無限長防波堤の重ね合わさった平面として考えられるので入射平面波による励起の結果として遮へい水域内の波は 2 つの防波堤端から影響をうける。一般には個々の独立した半無限長防波堤による回折波高を求めればよい。もっとも入射波長に比して防波堤の長さが極端に長い場合にはよい近似を与えるけれども、逆の場合、防波堤両端面からの波の相互干渉による影響が無視できなく、補正項を付け加える必要がある。そこで、本節では防波堤両端からの相互干渉を考慮に入れた防波堤背後領域の回折波に対する近似補正式を求めた。

いま、図-5 に示すように島状防波堤の長さを $2l$ とし、その中心を原点とし、 (x, y) を直交座標軸とする。

図-5 島状孤立防波堤



また極座標系 (r, θ) において、 θ は正の x 軸から反時計回りを正とする。さて外海から、式 (4) で表わされる波が島状孤立防波堤に入射してくる場合の防波堤背後の陰領域における遮へい有効度を Wiener-Hopf 近似解法によって求める。ここで適用される Fourier 変換は $-k_2 < \tau < k_2$ において正則でなければならない。というのは、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $\exp(-k_2|x|)$ から $\zeta \rightarrow 0$ になるからである。 ζ についての偏微分方程式に対して、 x に関する Fourier 変換を適用すると次式を得る。

$$T\{\zeta(y)\} = A \cdot \exp(-\tau y) \quad (y > 0) \dots (49.a)$$

$$= B \cdot \exp(\tau y) \quad (y < 0) \dots (49.b)$$

式 (49) を y について微分し、 A および B を消去したのち y をそれぞれ 0 におく。すると、

$$T\{\zeta'(0+)\} = -\tau T\{\zeta(0+)\} \dots (50.a)$$

$$T\{\zeta'(0-)\} = \tau T\{\zeta(0-)\} \dots (50.b)$$

が得られる。上式の $(')$ 記号は y についての微分を表わす。このとき式 (50) は (48) と同じ記号を使用するとつぎのようになる。

$$e^{i\alpha l} \cdot T_+\{\zeta'(0+)\} + T_1\{\zeta'(0+)\} + e^{-i\alpha l} T_-\{\zeta'(0+)\} = -\tau [e^{i\alpha l} \cdot T_+\{\zeta(0+)\} + T_1\{\zeta(0+)\} + e^{-i\alpha l} \cdot T_-\{\zeta(0+)\}] \dots (51.a)$$

$$e^{i\alpha l} \cdot T_+\{\zeta'(0-)\} + T_1\{\zeta'(0-)\} + e^{-i\alpha l} \cdot T_-\{\zeta'(0-)\} = \tau [e^{i\alpha l} \cdot T_+\{\zeta(0-)\} + T_1\{\zeta(0-)\} + e^{-i\alpha l} \cdot T_-\{\zeta(0-)\}] \dots (51.b)$$

この問題に対する境界条件は以下のごとくである。

(i) ζ は、 $-l < x < l$ 以外の $y=0$ で連続。

(ii) $\partial \zeta / \partial y$ は $y=0$ で連続。

式 (51) 中で $T_1\{\zeta'(0+)\} + T_1\{\zeta'(0-)\}$ は簡単に求められる。

$$T_1\{\zeta'(0+)\} + T_1\{\zeta'(0-)\} = \frac{ik \sin \theta}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-l}^l e^{i(\alpha - k \cos \theta)x} dx = k \sin \theta \cdot G(\alpha)$$

ここに

$$G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k \cos \theta)} \cdot \{e^{i(\alpha - k \cos \theta)l} - e^{-i(\alpha - k \cos \theta)l}\}$$

一方、式 (51.a) と (51.b) とを加え

$$T_1\{\zeta(0+)\} - T_1\{\zeta(0-)\} = 2 T_1\{\zeta(0)\} \dots (52)$$

とおくと

$$e^{i\alpha l} \cdot T_+\{\zeta'(0)\} + \tau T_1\{\zeta(0)\} + e^{i\alpha l} \cdot T_-\{\zeta'(0)\} = -k \sin \theta \cdot G(\alpha) \dots (53)$$

ここに、 $T_+\{\zeta'\}$, $T_-\{\zeta'\}$ および $T_1\{\zeta\}$ は未知関数であって、

$$\left. \begin{aligned} T_+\{\zeta'\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_l^\infty \zeta' \cdot e^{i\alpha(x-l)} dx \\ T_-\{\zeta'\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-l} \zeta' \cdot e^{i\alpha(x+l)} dx \\ T_1\{\zeta\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l \zeta \cdot e^{i\alpha x} dx \end{aligned} \right\} \dots (54)$$

$T_+\{\zeta'\}$ は $\tau > -k_2$, $T_-\{\zeta'\}$ は $\tau < k_2$ で正則、 $T_1\{\zeta\}$ は整関数であると仮定する。また $\tau = r = K(\alpha) = K_+(\alpha) \cdot K_-(\alpha)$ とおくと、 $K_+(\alpha) = \{\exp(-\pi i/4)\} (k+\alpha)^{1/2}$, $K_-(\alpha) = \{\exp(\pi i/4)\} (\alpha-k)^{1/2}$ となる。式 (53) に $\exp(-i\alpha l) \cdot [K_+(\alpha)]^{-1}$ を乗じつぎの形に再整理を行なう。

$$\frac{T_+\{\zeta'(\alpha)\}}{K_+(\alpha)} + \frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - k \cos \theta)} \left\{ \frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(k \cos \theta)} \right\} + U_+(\alpha) + V_+(\alpha) = -e^{-i\alpha l} \cdot K_-(\alpha) \cdot T_1\{\zeta(\alpha)\} - U_-(\alpha) - V_-(\alpha)$$

$$\frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) \cdot K_+(k \cos \theta)} \dots (55)$$

上式中で

$$U_+(\alpha) + U_-(\alpha) = e^{2ial} \cdot \frac{T_- \{\zeta'(\alpha)\}}{K_+(\alpha)}$$

$$V_+(\alpha) + V_-(\alpha) = -\frac{k \sin \theta \cdot e^{-2ial + ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) K_+(\alpha)}$$

同様にして、式 (53) に $\exp(i\alpha l) \{K_-(\alpha)\}^{-1}$ を乗じ整理すると

$$\frac{T_- \{\zeta'(\alpha)\}}{K_-(\alpha)} + R_-(\alpha) - \frac{k \sin \theta \cdot e^{ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) K_-(\alpha)}$$

$$- S_-(\alpha) = -e^{ial} \cdot K_+(\alpha) \cdot T_1 \{\zeta(\alpha)\}$$

$$- R_+(\alpha) + S_+(\alpha) \dots (56)$$

ここに、

$$R_+(\alpha) + R_-(\alpha) = e^{2ial} \cdot T_+ \{\zeta'(\alpha)\} \cdot \{K_-(\alpha)\}^{-1}$$

$$S_+(\alpha) + S_-(\alpha) = -k \sin \theta (2\pi)^{-1/2}$$

$$\cdot e^{2ial - ikl \cos \theta} \{(\alpha - k \cos \theta) K_-(\alpha)\}^{-1}$$

式 (55) の左辺および式 (56) の右辺は $\tau > -k_2$ で他の辺は $\tau < k_2 \cos \theta$ でそれぞれ正則である。これら各基本式の両辺は $|\alpha| \rightarrow \infty$ のときの無限遠での挙動から Liouville の定理の拡張により 0 になる。いま、

$$T_+ \{\zeta'(\alpha)\} + (2\pi)^{-1/2} k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}$$

$$\cdot (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = \Phi_+(\alpha) \dots (57.a)$$

$$T_- \{\zeta'(\alpha)\} - (2\pi)^{-1/2} k \sin \theta \cdot e^{ikl \cos \theta}$$

$$\cdot (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = \Phi_-(\alpha) \dots (57.b)$$

のような、 $\Phi_+(\alpha)$ 、 $\Phi_-(\alpha)$ なる二つの記号を導入する。式 (55)、(56) の両式の左辺を 0 に等しいとおき、複素関数論における分解定理 (付録 3 参照) を適用しさらに U_+ 、 V_+ 、 R_+ および S_+ 等の明白な表現式も導入して次式が得られた。

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{e^{2i\zeta l}}{(\zeta - \alpha) K_+(\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} = 0 \dots (58.a)$$

$$\frac{\Phi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{e^{2i\zeta l}}{(\zeta - \alpha) \cdot K_-(\zeta)} d\zeta = 0 \dots (58.b)$$

ここに、 $-k_2 < d < k_2 \cos \theta$ 、 $-k_2 < c < k_2 \cos \theta$ 、 $0 < \theta < \pi/2$ から a を $-k_2 \cos \theta < a < k_2 \cos \theta$ なるように選び、 $d = -c = a$ とおく。また式 (58.a) で ζ を $(-\zeta)$ とおき、(58.b) で α の代りに $(-\alpha)$ とおく。さらに、 $K_+(-\alpha) = K_-(\alpha)$ 、 $\Phi_+(\alpha) = \Phi_+(\alpha) + \Phi_-(-\alpha)$ 、 $\Phi_+'(\alpha) = \Phi_+(\alpha) - \Phi_-(-\alpha)$ なる関係式をも考慮し、式 (58.a) と (58.b) をたしききするとつぎのような基本式を得る。

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{2i\zeta l} \cdot \Phi_+(\zeta)}{(\zeta + \alpha) \cdot K_-(\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} \dots (59.a)$$

$$\frac{\Phi_+'(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{2i\zeta l} \cdot \Phi_+'(\zeta)}{(\zeta + \alpha) K_-(\zeta)} d\zeta$$

$$= \frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} \dots (59.b)$$

いま、 $\zeta \rightarrow k$ の極限において、 $\{K_-(\zeta)\}^{-1} \sim C_r (\zeta - k)^{r+1/2}$ と展開できるものと仮定したとき、 $K_-(\zeta) = e^{\pi i/4} \cdot (\zeta - k)^{1/2}$ から $r = -1$ 、 $C_{-1} = e^{-\pi i/4}$ を得る。このとき、 $\frac{\Phi_+(\zeta)}{K_-(\zeta)} / K_-(\zeta) \sim \frac{\Phi_+(k)}{C_{-1}} (\zeta - k)^{-1/2}$ となる。

$$\Phi_+(\alpha) = \frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{k \sin \theta \cdot e^{-ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha - k \cos \theta)}$$

$$- \frac{gk \sin \theta \cdot e^{ikl \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} (\alpha + k \cos \theta)} \dots (60)$$

を式 (59.a) に代入し、この積分を D.S. Jones¹³⁾ が使用した展開を利用して遂行すると (付録 4 参照)、

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} = -\frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi}} \left[S_1(\alpha) - g S_2(\alpha) \right.$$

$$+ \frac{i 2 g k^2 \cdot K_+(k) \cdot e^{2ikl}}{2k \sqrt{2\pi} l \pi - ig K_+(k) \cdot (\alpha + k) \cdot e^{2ikl}} \left. \right]$$

$$\cdot \{G_1(k) - g G_2(k)\} \dots (61)$$

ただし

$$G_1(\alpha) = \frac{e^{-ikl \cos \theta}}{\alpha - k \cos \theta} \left\{ \frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(k \cos \theta)} \right\}$$

$$- e^{ikl \cos \theta} S_1(\alpha) \dots (62.a)$$

$$G_2(\alpha) = \frac{e^{ikl \cos \theta}}{\alpha + k \cos \theta} \left\{ \frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(-k \cos \theta)} \right\}$$

$$- e^{-ikl \cos \theta} S_2(\alpha) \dots (62.b)$$

以上の計算 ($g = -1$) は式 (59.a) に対するものであるが、 $\Phi_+(\alpha)$ の代りに $\Phi_+'(\alpha)$ とおき、 $g = +1$ とすれば式 (59.b) に対する結果が得られる。さて基本式 (61) において、定義 (57) および $\Phi_+(\alpha)$ 、 $\Phi_+'(\alpha)$ の関係式から

$$\Phi_+(\alpha) \text{ に対しては、}$$

$$g = -1, \quad \overline{\Phi_+(\alpha)} = T_+ \{\zeta'(\alpha)\} + T_- \{\zeta'(-\alpha)\}$$

$$\Phi_+'(\alpha) \text{ に対しては}$$

$$g = +1, \quad \overline{\Phi_+'(\alpha)} = T_+ \{\zeta'(\alpha)\} + T_- \{\zeta'(-\alpha)\}$$

これらの関係式を式 (61) に代入し、結果として生ずる方程式を加えると

$$T_+ \{\zeta(\alpha)\} = -\frac{k \sin \theta}{\sqrt{2\pi}} \cdot G_1(\alpha) \cdot K_+(\alpha)$$

$$+ \frac{ik \sin \theta}{2\pi \sqrt{l}} \frac{K_+(k) \cdot K_+(\alpha)}{1 + K_+^2(k) \cdot e^{4ikl/8\pi k^2 l}}$$

$$\cdot \frac{e^{2ikl}}{(\alpha + k)} \left\{ G_2(k) - \frac{i \cdot e^{2ikl}}{k \sqrt{8\pi} l} \cdot K_+(k) \cdot G_1(k) \right\} \dots (63)$$

上式で G_1 と G_2 を取り替え、 α の記号を変えると $T_- \{\zeta(\alpha)\}$ が得られる。 $y < 0$ における回折波について考える。

$y < 0$ での回折波の変換は次式によって与えられる。

$$T\{\zeta(y)\} = B \cdot e^{\gamma y} = -\frac{1}{\gamma} \{e^{ial} \cdot T_+ \{\zeta'(0)\}$$

$$+ T_1 \{\zeta'(0)\} + e^{-ial} \cdot T_- \{\zeta'(0)\}\} e^{\gamma y} \dots (64)$$

したがって、Fourier 逆変換公式により

$$\zeta(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{r} \{e^{ial} \cdot T_+ \{\zeta'(0)\}$$

$$+T_1\{\zeta'(0)\}+e^{-ial}\cdot T_-\{\zeta'(0)\}\}e^{iy-iax}\cdot d\alpha$$
$$\dots\dots(65)$$

上式で、 $T_+\{\zeta'(0)\}$ 、 $T_-\{\zeta'(0)\}$ は式 (63) から直接求められ、また $T_1\{\zeta'(0)\}$ は $k \sin \theta G(\alpha)$ に等しい。式 (65) の近似計算の結果として、回折波は

$\zeta_t = (\text{noninteraction term}) + (\text{interaction term})$ の和として表わすことができる。すなわち

$$\zeta(\text{non.}) = \frac{-ik \sin \theta}{2\pi(k+k \cos \theta)^{1/2}}$$
$$\cdot \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i(\alpha-k \cos \theta)l}}{(\alpha-k \cos \theta)(k-\alpha)^{1/2}}$$
$$\cdot e^{-iax-|y|l} d\alpha + \frac{ik \sin \theta}{2\pi(k-k \cos \theta)^{1/2}}$$
$$\cdot \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i(\alpha-k \cos \theta)l}}{(\alpha-k \cos \theta)(k+\alpha)^{1/2}} \cdot e^{-iax-|y|l} d\alpha \dots(66)$$

上式の $\zeta(\text{non.})$ は各分離した半平面——あたかも他の半平面状防波堤がないかのように作用する——によって生じた回折波の和であって、3.(1) で解を求めた方法によって Fresnel 積分の項で求めることができる。つぎに $\zeta(\text{int.})$ は、防波堤両端面の相互干渉を表わす項であって、いわば noninteraction 解に対する近似補正解でもある。

$$\zeta(\text{int.}) = -\frac{k \sin \theta}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \left[e^{ikl \cos \theta} \cdot S_1(\alpha) \cdot \frac{e^{ial}}{K_-(\alpha)} \right.$$
$$+ e^{-ikl \cos \theta} \cdot S_2(-\alpha) \cdot \frac{e^{-ial}}{K_+(\alpha)}$$
$$+ i \frac{K_+(k)}{1+e^{ikl} \cdot K_+^2(k)/8\pi k^2 l} \left\{ \left(G_2(k) - \frac{i \cdot e^{2ikl}}{2k \sqrt{2\pi} l} \right. \right.$$
$$\cdot K_+(k) \cdot G_1(k) \Big) \frac{e^{ial}}{K_-(\alpha)} \cdot \frac{e^{2ikl}}{\sqrt{2\pi} l (\alpha+k)}$$
$$+ \left(G_1(k) - \frac{i \cdot e^{2ikl}}{\sqrt{8\pi} l \cdot k} \cdot K_+(k) \cdot G_2(k) \right) \frac{e^{-ial}}{K_+(\alpha)}$$
$$\cdot \left. \frac{e^{2ikl}}{\sqrt{2\pi} l (-\alpha+k)} \right\} \Big] e^{-iax-|y|l} d\alpha \dots\dots\dots(67)$$

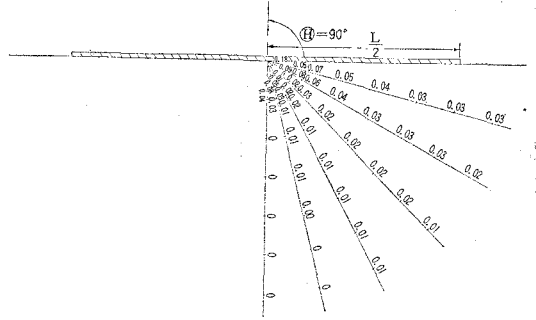
ここで極座標 ($x=r \cos \theta$, $|y|=r \sin \theta$) を導入する。 θ は正の x 軸より時計方向回りを正とし、 θ は正の x 軸から反時計回りを正とする。近似積分法により、大きい r の値に対して

$$\zeta(\text{int.}) \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+e^{ikl}/4\pi k l} \cdot \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \cdot \frac{e^{2ikl}}{\sqrt{4\pi} k l}$$
$$\times \left[\left\{ \frac{e^{-ikl(\cos \theta - \cos \theta)}}{\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} + \frac{e^{ikl(\cos \theta - \cos \theta)}}{\cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} \right\} - \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{4\pi} k l} \right.$$
$$\cdot e^{2ikl} \left\{ \frac{e^{-ikl(\cos \theta + \cos \theta)}}{\sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{e^{ikl(\cos \theta + \cos \theta)}}{\cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} \right\} \Big] \quad (68)$$

を得る。

実際の数値計算においては、各種の入射波長 (λ) に対して原点からの距離を波長単位で表わして $R=r/\lambda$ として観測点の座標 (R, θ) を与えて波の入射角 θ° に応じ式 (68) の相互干渉による二次回折波高および虚数部、

図—6 相互干渉による 2 次回折波の分布 (入射角 $\theta=90^\circ$, $\lambda=0.2 L$)



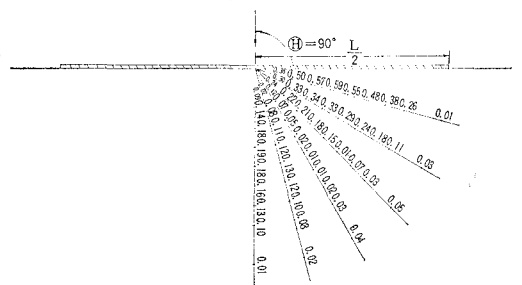
位相を I. B. M. 7090 型計算機によって算出した。防波堤の長さを $L=2l$ としたとき、入射波の特性および観測点の座標 (R, θ) の与えかたを表—1 に示してある。

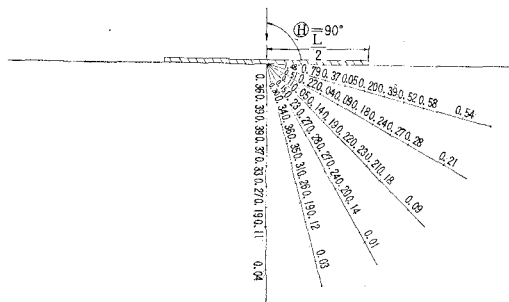
表—1

入 射 波 の 特 性	
波 長 (λ)	10 L, 10 L/3, 2 L, L, L/3, L/5, L/7
入射角 (θ°)	30°, 60°, 90°
観 測 点 の 座 標 (R, θ)	
$R=r/L$	0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0
θ	15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°, 165°

上述の計算結果の一部を表—2 に示す。すなわち入射角が防波堤に直角な場合で入射波長が $\lambda=0.2 L$, $\lambda=L$, $\lambda=2 L$ のときの計算値である。同時に表—2 の二次回折波の波高比を図示する図表を作成したが、これを図—6, 7, 8 に示す。表—2 からあきらかなように本節で得た“interaction term”の補正は“noninteraction”近似解に有意義な改良を加えるものと思われる。また防波堤長が5波長以上に大きくなれば、島状孤立防波堤背後の陰領域における有効度を求めるとき、Sommerfeld の解を重ね合わせればよいことがわかる。しかしながら入射波長が長くなるにつれて防波堤両端面の相互干渉がいちじるしく防波堤背後の領域の回折波に対して近似補正を施す必要が生じてくる。

図—7 相互干渉による 2 次回折波の分布 (入射角 $\theta=90^\circ$, $\lambda=L$)



入射波 (波長 λ)

(i) 回折波は防波堤内の line source の励起に対する応答とみなされるので、 $r \rightarrow \infty$ としたときの回折波は

$(k=k_1+ik_2, \ k_1, k_2 \text{ はともに正})$

(ii) 任意な y , $y > 0$ または $y < 0$ に対して

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & |\zeta| < C_3 \exp(k_2 x \cos \theta - k_2 |y| \sin \theta) : \\ & (-\infty < x < -|y| \cot \theta) \\ (b) \quad & |\zeta| < C_4 \exp\{-k_2(x^2 + y^2)^{1/2}\} : \\ & (-|y| \cot \theta < x < \infty) \end{aligned} \right\} (A.2)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0, x \rightarrow +0 \text{ のとき } \quad \partial \zeta_t / \partial y &\sim C_5 x^{-1/2} \\ y=0, x \rightarrow +0 \text{ のとき } \quad \zeta_t &\sim C_6 \\ y=+0, x \rightarrow -0 \text{ のとき } \quad \zeta_t &\sim C_7 \\ y=-0, x \rightarrow -0 \text{ のとき } \quad \zeta_t &\sim C_8 \end{aligned} \right\} \dots (A.3)$$

因子 $\sinh x$ は無限乗積定理¹¹⁾を適用できる整関数であるので

$$\sinh 2r b/2 \gamma b = \sin 2kb/2 kb \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - \alpha^2/\alpha_n^2\}$$

$$\sin 2kb/2kb = \prod_{n=1}^{\infty} \{1 - 4b^2k^2/n^2\pi^2\}$$

ここに、 $a_n^2 = k^2 - n^2 \pi^2 / 4 b^2$ が成立する。これらの無限乗積を結合させると

$$\frac{\sinh 2rb}{2rb} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{4b^2k^2}{n^2\pi^2} \right) + \frac{4b^2\alpha^2}{n^2\pi^2} \right\} = Z(\alpha) \quad \dots\dots (A.4)$$

$$Z_{\pm}(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{4b^2 k^2}{n^2 \pi^2} \right)^{1/2} \mp \frac{2ib\alpha}{n\pi} \right\} \cdot e^{\left(\pm \frac{2ib\alpha}{n\pi} \right)} \dots\dots (A.5)$$

の形に分解できるものとする。式(34)中の $\exp(-2rb)$ は、

$$\exp(-2rb) = \exp\{-T_+(\alpha)\} \cdot \exp\{-T_-(\alpha)\} \quad \dots\dots (A.6)$$

のように因子分解するとき

$$T_+(\alpha) = 2b\gamma/\pi \cdot \cos^{-1}\alpha/k \quad \text{および} \quad T_-(\alpha) = T_+(-\alpha)$$

() 内の値の計算信頼度は低い

θ	r/L		距 離 ($R=r/L$) の 値													
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	
防 波 堤 長=5 波 長 ($\lambda=0.2L$), $\theta=90^\circ$																
15°	(0.36)	(0.33)	(0.31)	(0.28)	(0.23)	0.18	0.11	0.05	0.07	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	
30	(0.12)	(0.03)	0.02	0.05	0.07	0.08	0.09	0.08	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	
45	(0.11)	(0.07)	0.05	0.03	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	
60	(0.06)	(0.03)	0.03	0.01	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
75	(0.01)	(0.03)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.04	0.03	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
90	(0.05)	(0.07)	0.09	0.09	0.09	0.08	0.06	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
防 波 堤 長=波 長 ($\lambda=L$), $\theta=90^\circ$																
15°	(0.36)	(0.50)	(0.57)	(0.59)	(0.55)	0.48	0.38	0.26	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
30	(0.30)	(0.33)	0.34	0.33	0.29	0.24	0.18	0.11	0.03	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	
45	(0.24)	(0.22)	0.21	0.18	0.15	0.11	0.07	0.03	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	
60	(0.12)	(0.07)	0.05	0.02	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	
75	(0.02)	(0.08)	0.11	0.12	0.13	0.12	0.10	0.08	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
90	(0.09)	(0.14)	0.17	0.19	0.18	0.16	0.13	0.10	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
波 長=2 防 波 堤 長 ($\lambda=2L$), $\theta=90^\circ$																
15°	(1.48)	(0.79)	(0.37)	(0.05)	(0.20)	0.39	0.52	0.58	0.54	0.38	0.31	0.27	0.24	0.22	0.20	
30	(0.51)	(0.22)	0.04	0.09	0.18	0.24	0.27	0.28	0.21	0.15	0.12	0.11	0.09	0.09	0.08	
45	(0.11)	(0.05)	0.14	0.19	0.22	0.23	0.21	0.18	0.09	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04	0.03	
60	(0.15)	(0.23)	0.27	0.28	0.27	0.24	0.20	0.14	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
75	(0.30)	(0.34)	0.36	0.35	0.31	0.26	0.19	0.12	0.03	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	
90	(0.36)	(0.39)	0.39	0.37	0.33	0.27	0.19	0.11	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	
波 長=10 防 波 堤 長 ($\lambda=10L$), $\theta=90^\circ$																
15°	(0.99)	(1.43)	(1.65)	(1.70)	(1.62)	(1.43)	(1.14)	(0.79)	(0.05)	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	
30	(0.70)	(0.89)	(0.98)	0.98	0.91	0.78	0.61	0.40	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
45	(0.63)	(0.73)	(0.77)	0.76	0.69	0.58	0.43	0.27	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	
60	(0.60)	(0.66)	(0.68)	0.66	0.59	0.48	0.36	0.21	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	
75	(0.59)	(0.63)	(0.64)	0.61	0.54	0.44	0.32	0.19	0.07	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	
90	(0.59)	(0.63)	(0.63)	0.60	0.53	0.43	0.31	0.18	0.07	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	

が成り立つ。上半平面で、 $|\alpha| \rightarrow \infty$ としたとき、 $T_+(\alpha)$ は近似的に

$$2ib\alpha/\pi \cdot \ln(2\alpha/k)$$

下半平面で、 $|\alpha| \rightarrow \infty$ のときには、 $T_-(\alpha)$ は近似的に

$$-2ib\alpha/\pi \cdot \ln(-2\alpha/k)$$

に等しくなる。上述の結果をまとめると、

$$L_{\pm}(\alpha) = \exp\{\mp \chi_2(\alpha) - T_{\pm}(\alpha)\} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{4b^2k^2}{n^2\pi^2} \right)^{1/2} \pm \frac{2ib\alpha}{n\pi} \right\} \cdot e^{\left(\pm \frac{2iba}{n\pi} \right)} \dots (A.7)$$

のごとくなる。

付録 3 複素関数の分解定理

関数 $f(\alpha)$ は帯状区間 $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ で正則であって、 $|\sigma| \rightarrow \infty$ のとき $|f(\sigma + i\tau)| < c|\sigma|^{-a}$, $a > 0$ ならばつぎのようにかくことができる。

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta \\ = f_+(\alpha) + f_-(\alpha) \dots (A.8)$$

ただし、 $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$, $f_+(\alpha)$ は $\tau > \tau_-$, $f_-(\alpha)$ は $\tau < \tau_+$ でそれぞれ正則である。

付録 4 $I = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} F(\zeta) \cdot e^{i\zeta l} \frac{1}{\zeta + \beta} d\zeta$ の積分

関数 $F(\zeta)$ が $F(\zeta) = (\zeta - k)^{r+1/2} \cdot f(\zeta)$ として表わせるとき、

$$I \sim 2e^{i\pi/4} \cdot e^{ikl} \cdot e^{-r-1/2} i^r f(k) \cdot W_r\{-i(k+\beta)l\} \dots (A.9)$$

ここに、 W_r : Whittaker の関数である。したがって式(60)を式(59.a)へ代入したとき生じる積分式の解はつぎのようになる。

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{\phi_+(\zeta) \cdot e^{2i\zeta l}}{(\zeta + \alpha) \cdot K_-(\zeta)} d\zeta \sim \frac{\sqrt{2\pi} \cdot e^{2ikl}}{(\alpha + k)} \phi_+(k) \dots (A.10)$$

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{2i\zeta l}}{(\zeta + \alpha)(\zeta - k \cos \theta) K_-(\zeta)} d\zeta \\ \sim 2\pi i \frac{e^{2ikl \cos \theta}}{(\alpha + k \cos \theta) K_-(k \cos \theta)} + 2\pi i S_2(\alpha) \dots (A.11)$$

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{2i\zeta l}}{(\zeta + \alpha)(\zeta + k \cos \theta) K_-(\zeta)} d\zeta \sim 2\pi i S_1(\alpha) \dots (A.12)$$

ここに、

$$S_{1,2}(\alpha) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{2ikl}}{(\alpha \mp k \cos \theta) l} \left(\frac{1}{\alpha + k} - \frac{1}{k \pm k \cos \theta} \right) \dots (A.13)$$

参考文献

- 1) Schwinger, J.S.: Fourier transform solution of integral equation, M.I.T. Radiation Laboratory Report.
- 2) Sommerfeld, A.: Théorie mathématique de la diffraction, Math. Ann., Vol. 47, (1896).
- 3) Penny, W.G. and Price, A.T.: Diffraction of sea waves by breakwaters, Artificial Harbours, Dire. Misc. Weapon Develop. Tech. Hist., No. 26, (1944).
- 4) Putnam, J.A. and Arthur, A.T.: Diffraction of water waves by breakwaters, Trans. A.G.U., Vol. 29, No. 4, (1948).
- 5) Blue, F.L. and Johnson, J.W.: Diffraction of water waves passing through a breakwater gap, Trans. A.G.U., Vol. 30, No. 5, (1949).
- 6) Tanaka K.: On the sea waves, Tech. Rep., Osaka Univ., Vol. 3, No. 65, (1953).
Tanaka, K.: On the distribution of waves in harbour, Tech. Rep., Osaka Univ., Vol. 3, No. 81, (1953).
田中 清: 防波堤の水理, 水工学の最近の進歩, 土木学会, (1953).
田中 清: 円形島による波浪の回折, 第3回海岸工学講演会講演集, (1956).
- 7) Schwarzschild: Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt, Math. Ann, Vol. 55, (1902).
- 8) Heins, A.E.: The scope and limitations of the method of Wiener and Hopf, Commun. Pure Appl. Math., Vol. 9, (1956).
- 9) Crease, J.: Long waves on a rotating earth in the presence of a semi-infinite barrier, J. Fluid Mech, Vol. 1, (1956).
Crease, J.: The propagation of long waves into a semi-infinite channel in a rotating system, J. Fluid Mech, Vol. 4, (1958).
- 10) Jones, D.S.: A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems, The Quart. Jour. of Math., Vol. 2, No. 3, (1952).
- 11) Titchmarsh, E.C.: Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press., (1937).
- 12) 和田 明: 防波堤で遮へいされた水域の擾乱波について, 第9回海岸工学講演会講演集, (1962).
- 13) Jones, D.S.: Diffraction by a waveguide of finite length, Proc. Camb. Phil. Soc. 48, (1952).

(註) Jones の方法によって回折問題を解いた他の分野での論文にはつぎのようなものがある。

Sato, R.: Love waves in case the surface layer is variable in thickness, Jour. of physics of the Earth, (1961).

Shima, M.: On the diffraction of elastic plane pulses by a crack of a half plane, Disaster Prevention Research Instit., (1963).