表面波の２次干渉

浜田徳一*

I. 問題は非粘性非回転とし，Stokes 波型のせつ動における２次干渉を取り扱う。この型の２次干渉の取り扱いとしては，L.J. Tick[1),2)] および M.S. Longuet-Higgins と R.W. Stewart[3)] とのものがある。今回の計算はその力学的意味，具体的な大きさを明かにし，顕著な例として重複波の問題に言及したものである。

基本方程式を簡単に書くと，速度ポテンシャルを φ として $\left(u=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\ v=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\ w=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$

$$\nabla^2\varphi=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{p}{\rho}+gz+\frac{1}{2}q^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

ただし φ には２次量 const. t を含め，平均水面と $z=0$ とを一致させる。

境界条件は

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{at } z=\zeta \quad\cdots\cdots(3)$$

$$g\,\zeta+\frac{1}{2}(q^2)_\zeta+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_\zeta=0 \quad \text{at } z=\zeta \quad\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \quad \text{at } z=-h \quad\cdots(5)$$

このせつ動解は

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\alpha\varphi_1+\alpha^2\varphi_2+\alpha^3\varphi_3+\cdots\cdots\\&\zeta=\alpha\zeta_1+\alpha^2\zeta_2+\alpha^3\zeta_3+\cdots\cdots\\&p=p_0+\alpha\,p_1+\alpha^2p_2+\alpha^3p_3+\cdots\cdots\\&p_0=-\rho\,gz\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

を用い，式 (1)，(2)，(5) については明らかであるから省略し，式 (3)，(4) については計算の結果つぎのとおりとなる。

$$g\,\zeta_1+\varphi_{1t}(0)=0 \quad \text{at } z=0 \quad\cdots\cdots(7\text{-}1)$$

$$g\,\zeta_2+\frac{1}{2}u_1^2(0)+\frac{1}{2}v_1^2(0)+\frac{1}{2}w_1^2(0)+\varphi_{2t}(0)+\varphi_{1tz}(0)\zeta_1=0 \quad \text{at } z=0\cdots\cdots(7\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}&g\,\zeta_3+u_1(0)u_2(0)+u_1(0)u_{1z}(0)\,\zeta_1+v_1(0)v_2(0)\\&\quad+v_1(0)v_{1z}(0)\,\zeta_1+w_1(0)w_2(0)\\&\quad+w_1(0)w_{1z}(0)\zeta_1+\varphi_{3t}(0)+\varphi_{1tz}(0)\zeta_2\\&\quad+\varphi_{2tz}(0)\zeta_1+\frac{1}{2}\varphi_{1tzz}(0)\zeta_1^2=0 \quad \text{at } z=0\end{aligned}\quad\cdots(7\text{-}3)$$

$$\varphi_{1tt}(0)+g\,\varphi_{1z}(0)=0 \quad \text{at } z=0\cdots\cdots(8\text{-}1)$$

$$\begin{aligned}&\varphi_{2tt}(0)+g\,\varphi_{2z}(0)=-\frac{1}{2}(u_1^2(0)+v_1^2(0)\\&\quad+w_1^2(0))_t-\varphi_{1ztt}(0)\zeta_1-\varphi_{1zt}(0)\zeta_{1t}\\&\quad+gu_1(0)\zeta_{1x}+gv_1(0)\zeta_{1y}-g\varphi_{1zz}(0)\zeta_1\\&\qquad \text{at } z=0\end{aligned}\quad\cdots\cdots(8\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}&\varphi_{3tt}(0)+g\,\varphi_{3z}(0)=gu_2(0)\zeta_{1x}+gu_{1z}(0)\zeta_1\zeta_{1x}\\&\quad+gu_1(0)\zeta_{2x}+gv_2(0)\zeta_{1y}+gv_{1z}(0)\zeta_1\zeta_{1y}\\&\quad+gv_1(0)\zeta_{2y}-g\,\varphi_{1zz}(0)\zeta_2-g\varphi_{2zz}(0)\zeta_1\\&\quad-g\frac{1}{2}\varphi_{1zzz}(0)\zeta_1^2-u_{1t}(0)u_2(0)-u_1(0)u_{2t}(0)\\&\quad-u_{1t}(0)u_{1z}(0)\zeta_1-u_1(0)u_{1zt}(0)\zeta_1\\&\quad-u_1(0)u_{1z}(0)\zeta_{1t}-v_{1t}(0)v_2(0)-v_1(0)v_{2t}(0)\\&\quad-v_{1t}(0)v_{1z}(0)\zeta_1-v_1(0)v_{1zt}(0)\zeta_1\\&\quad-v_1(0)v_{1z}(0)\zeta_{1t}-w_{1t}(0)w_2(0)\\&\quad-w_1(0)w_{2t}(0)-w_{1t}(0)w_{1z}(0)\zeta_1\\&\quad-w_1(0)w_{1zt}(0)\zeta_1-w_1(0)w_{1z}(0)\zeta_{1t}\\&\quad-\varphi_{1ztt}(0)\zeta_2-\varphi_{1zt}(0)\zeta_{2t}-\varphi_{2ztt}(0)\zeta_1\\&\quad-\varphi_{2zt}(0)\zeta_{1t}-\frac{1}{2}\varphi_{1zztt}(0)\zeta_1^2-\varphi_{1zzt}(0)\zeta_1\zeta_{1t}\\&\qquad \text{at } z=0\end{aligned}\quad\cdots\cdots(8\text{-}3)$$

もっとも簡単な deep water で２次元の場合について，３成分波の２次干渉の計算を行なうと

$$\begin{aligned}\varphi_1&=a_1c_1e^{k_1z}\sin\{k_1(x-c_1t)+\varepsilon_1\}\\&\quad+a_2c_2e^{k_2z}\sin\{k_2(x-c_2t)+\varepsilon_2\}\\&\quad+a_3c_3e^{k_3z}\sin\{k_3(x-c_3t)+\varepsilon_3\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(9)$$

$$\begin{aligned}\zeta_1&=a_1\cos\{k_1(x-c_1t)+\varepsilon_1\}+a_2\cos\{k_2(x-c_2t)\\&\quad+\varepsilon_2\}+a_3\cos\{k_3(x-c_3t)+\varepsilon_3\}\end{aligned}\quad\cdots\cdots(10)$$

$$k_1c_1^2=k_2c_2^2=k_3c_3^2=g \quad\cdots\cdots(11)$$

に対して２次干渉波は

$$\begin{aligned}\varphi_2=&\begin{matrix}-a_1c_1k_1a_2(k_1>k_2)\\+a_1c_2k_2a_2(k_2>k_1)\end{matrix}e^{|k_1-k_2|z}\sin\{(k_1-k_2)x\\&-(c_1k_1-c_2k_2)t+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\}\\&\begin{matrix}-a_2c_2k_2a_3(k_2>k_3)\\+a_2c_3k_3a_3(k_3>k_2)\end{matrix}e^{|k_2-k_3|z}\sin\{(k_2-k_3)x\\&-(c_2k_2-c_3k_3)t+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}\\&\begin{matrix}-a_3c_3k_3a_1(k_3>k_1)\\+a_3c_1k_1a_1(k_1>k_3)\end{matrix}e^{|k_3-k_1|z}\sin\{(k_3-k_1)x\\&-(c_3k_3-c_1k_1)t+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\}\\&+\text{const.}\,t \quad ただし\ \text{const.}=0\end{aligned}\quad\cdots\cdots(12)^{**}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2=&\frac{a_1^2k_1}{2}\cos\{2\,k_1(x-c_1t)+2\,\varepsilon_1\}\\&+\frac{a_2^2k_2}{2}\cos\{2\,k_2(x-c_2t)+2\,\varepsilon_2\}\\&+\frac{a_3^2k_3}{2}\cos\{2\,k_3(x-c_3t)+2\,\varepsilon_3\}\\&+\frac{a_1a_2(k_1+k_2)}{2}\cos\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\end{aligned}$$

---

* 正会員　工博　運輸省港湾技術研究所

** deep water では速度ポテンシャルの２次項は波数差のもののみとなる。参考文献 4)，式 (52) 参照。

$$+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\}+\frac{a_2a_3(k_2+k_3)}{2}\cos\{(k_2+k_3)x-(c_2k_2+c_3k_3)t+(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\}$$
$$+\frac{a_3a_1(k_3+k_1)}{2}\cos\{(k_3+k_1)x-(c_3k_3+c_1k_1)t+(\varepsilon_3+\varepsilon_1)\}-\frac{a_1a_2|k_2-k_1|}{2}\cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\}$$
$$-\frac{a_2a_3|k_3-k_2|}{2}\cos\{(k_2-k_3)x-(c_2k_2-c_3k_3)t+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\}-\frac{a_3a_1|k_1-k_3|}{2}\cos\{(k_3-k_1)x-(c_3k_3-c_1k_1)t+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\} \quad \cdots\cdots(13)$$

この計算から明らかなとおり，2次干渉については2成分波で計算すればその性質を知ることができる。多成分波の性質は2成分波によるもののsum upとなる。

II. 水深有限のとき2次元 (x, z) の2成分波の計算を行なう。1次波は

$$\varphi_1=b_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1 h}\sin k_1(x-c_1t)+b_2\frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2 h}\sin k_2(x-c_2t) \quad \cdots\cdots(14)$$

$$\zeta_1=a_1\cos k_1(x-c_1t)+a_2\cos k_2(x-c_2t) \quad \cdots(15)$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1=a_1c_1,\quad b_2=a_2c_2 \\ c_1^2=\dfrac{g}{k_1}\tanh k_1h,\quad c_2^2=\dfrac{g}{k_2}\tanh k_2 h,\quad k_1, k_2>0 \end{array}\right\} \quad \cdots(16)$$

$$p_0=-\rho gz \quad \cdots\cdots(17)$$

$$p_1=\rho b_1k_1c_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1 h}\cos k_1(x-c_1t)+\rho b_2k_2c_2\frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2 h}\cos k_2(x-c_2t) \quad (18)$$

に対し，2次波は

$$\varphi_2=B_{21}\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh 2k_1 h}\sin 2k_1(x-c_1t)+B_{22}\frac{\cosh 2k_2(h+z)}{\sinh 2k_2 h}\sin 2k_2(x-c_2t)$$
$$+B_{23}\frac{\cosh(k_1+k_2)(h+z)}{\sinh(k_1+k_2)h}\sin\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\}$$
$$+B_{24}\frac{\cosh(k_1-k_2)(h+z)}{\sinh(k_1-k_2)h}\sin\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\}+\mathrm{const.}t \quad \cdots\cdots(19)$$

において

$$B_{21}=\frac{-\frac{3}{2}b_1^2k_1^3c_1(\coth^2 k_1h-1)}{-4k_1^2c_1^2\coth 2k_1h+2k_1g} \quad \cdots\cdots(20\text{-}1) \qquad B_{22}=\frac{-\frac{3}{2}b_2^2k_2^3c_2(\coth^2 k_2h-1)}{-4k_2^2c_2^2\coth 2k_2h+2k_2g} \quad \cdots\cdots(20\text{-}2)$$

$$B_{23}=\frac{b_1b_2k_1k_2(c_1k_1+c_2k_2)(1-\coth k_1h\coth k_2h)-\frac{1}{2}b_1k_1^3a_2c_1^2(\coth^2 k_1h-1)-\frac{1}{2}b_2k_2^3a_1c_2^2(\coth^2 k_2h-1)}{-(c_1k_1+c_2k_2)^2\coth(k_1+k_2)h+(k_1+k_2)g} \quad \cdots\cdots(20\text{-}3)$$

$$B_{24}=\frac{b_1b_2k_1k_2(c_2k_2-c_1k_1)(1+\coth k_1h\coth k_2h)-\frac{1}{2}b_1k_1^3a_2c_1^2(\coth^2 k_1h-1)+\frac{1}{2}b_2k_2^3a_1c_2^2(\coth^2 k_2h-1)}{-(c_1k_1-c_2k_2)^2\coth(k_1-k_2)h+(k_1-k_2)g} \quad \cdots\cdots(20\text{-}4)$$

$$\mathrm{const.}=-\frac{1}{4}b_1^2k_1^2(\coth^2 k_1h-1)-\frac{1}{4}b_2^2k_2^2(\coth^2 k_2h-1) \quad \cdots\cdots(20\text{-}5)$$

$\zeta_2=\zeta_{21}+\zeta_{22}+\zeta_{23}+\zeta_{24}$ において

$$\zeta_{21}=\frac{1}{g}\left\{2k_1c_1B_{21}\coth 2k_1h+\frac{1}{2}b_1^2k_1^2-\frac{1}{4}b_1^2k_1^2(\coth^2 k_1h-1)\right\}\cos 2k_1(x-c_1t) \quad \cdots\cdots(21\text{-}1)$$

$$\zeta_{22}=\frac{1}{g}\left\{2k_2c_2B_{22}\coth 2k_2h+\frac{1}{2}b_2^2k_2^2-\frac{1}{4}b_2^2k_2^2(\coth^2 k_2h-1)\right\}\cos 2k_2(x-c_2t) \quad \cdots\cdots(21\text{-}2)$$

$$\zeta_{23}=\frac{1}{g}\left\{(c_1k_1+c_2k_2)B_{23}\coth(k_1+k_2)h+\frac{1}{2}(k_1^2c_1b_1a_2+k_2^2c_2b_2a_1)-\frac{1}{2}b_1b_2k_1k_2(\coth k_1h\coth k_2h-1)\right\}\cos\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\} \quad \cdots\cdots(21\text{-}3)$$

$$\zeta_{24}=\frac{1}{g}\left\{(c_1k_1-c_2k_2)B_{24}\coth(k_1-k_2)h+\frac{1}{2}(k_1^2c_1b_1a_2+k_2^2c_2b_2a_1)-\frac{1}{2}b_1b_2k_1k_2(\coth k_1h\coth k_2h+1)\right\}\cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\} \quad \cdots\cdots(21\text{-}4)$$

$p_2=p_{20}+p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{24}$ において

$$p_{20}=-\frac{1}{2}\rho b_1^2k_1^2\frac{\sinh^2 k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h}-\frac{1}{2}\rho b_2^2k_2^2\frac{\sinh^2 k_2(h+z)}{\sinh^2 k_2h} \quad \cdots\cdots(22\text{-}1)$$

$$p_{21}=\left\{2\rho k_1c_1B_{21}\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh 2k_1h}-\frac{1}{4}\rho b_1^2k_1^2\frac{1}{\sinh^2 k_1h}\right\}\cos 2k_1(x-c_1t) \quad \cdots\cdots(22\text{-}2)$$

$$p_{22}=\left\{2\rho k_2c_2B_{22}\frac{\cosh 2k_2(h+z)}{\sinh 2k_2h}-\frac{1}{4}\rho b_2{}^2k_2{}^2\frac{1}{\sinh^2 k_2h}\right\}\cos 2k_2(x-c_2t) \cdots\cdots (22\text{-}3)$$

$$p_{23}=\left\{\rho(c_1k_1+c_2k_2)B_{23}\frac{\cosh(k_1+k_2)(h+z)}{\sinh(k_1+k_2)h}-\frac{1}{2}\rho b_1b_2k_1k_2\frac{\cosh(k_1-k_2)(h+z)}{\sinh k_1h\sinh k_2h}\right\}\cos\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\} \cdots\cdots (22\text{-}4)$$

$$p_{24}=\left\{\rho(c_1k_1-c_2k_2)B_{24}\frac{\cosh(k_1-k_2)(h+z)}{\sinh(k_1-k_2)h}-\frac{1}{2}\rho b_1b_2k_1k_2\frac{\cosh(k_1+k_2)(h+z)}{\sinh k_1h\sinh k_2h}\right\}\cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\} \cdots\cdots (22\text{-}5)$$

このようにして2成分波の2次干渉では，要素波の特有の2次波のほかに，波数差および波数和の2次波が一般に生ずる。これはもちろん束縛波であるが，それがどのくらいの大きさになるか，また束縛波であるため，自由波と異なった波高と圧力との関係を持つが，1次の2成分波が互いに同方向に進むとき，互いに逆方向に進むとき，それがどのように現われるか，簡単な model で検討する。

式 (15) において $a_1=1\,\mathrm{m}$, $k_1=0.05\,\mathrm{m}^{-1}$, $h=30\,\mathrm{m}$ とし，また $a_2=1\,\mathrm{m}$, $k_2=0.035\sim0.065\,\mathrm{m}^{-1}$ とし，$c_1, c_2>0$ の場合，$c_1>0$, $c_2<0$ の場合とを考える。

$\zeta_2=a_{21}\cos 2k_1(x-c_1t)+a_{22}\cos 2k_2(x-c_2t)+a_{23}\cos\times\{(k_1+k_2)x-(c_1k_1+c_2k_2)t\}+a_{24}\cos\{(k_1-k_2)x-(c_1k_1-c_2k_2)t\}$ の係数 $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ および a_{23} と a_{24} とに関する波速，および式 (22-5) の p_{24} の cos の係数を表わしたもの（単位が m 単位をとっているため，この値を $g=9.8\,\mathrm{m\cdot sec^{-2}}$ で割れば m 単位の水頭となる）が **表—1** (c_1, $c_2>0$)，**表—2** ($c_1>0$, $c_2<0$) である。なお（ ）内の値は $h\to\infty$ とし，他の値は変化させないときのものである。

表—1 によれば a_{21}, a_{22} は特に変わったことはない。a_{23}は正の値をとり，だいたい $a_{21}+a_{22}$ に近い値で分布している（deep water では $a_1=a_2$ のとき，$a_{21}+a_{22}=a_{23}$ となることは，式 (13) より明らかである)。そしてこの束縛波の波速は2つの成分波の中間的な波速となっている。周波数スペクトル表示ではこの成分は a_{21}, a_{22} と同じく高周波側に現われる。a_{24} は負の値になる。その波数は $|k_1-k_2|$ できわめて小となりうるものであり，波速はだいたい群速度に近い値 ($k_2\to k_1$ では群速度) となる。これは1次波としての2成分波の合成波の振幅最大の付近で水位を下げ，振幅最小の付近で水位を上げるような長い波である。その大きさはこの model では $a_1=a_2=1\,\mathrm{m}$ に対し，だいたい 4 cm 内外の半振幅となっている。M.S. Longuet-Higgins および R.W. Stewart[3] はこれを surf beats* の説明の一部として指摘した。もちろん束縛波であり，a_1, a_2 の波が消失すれば消えるも

表—1 c_1, $c_2>0$

k_2	c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$p_{24(z=0)}$ の係数	$p_{24(z=-h)}$ の係数	$\frac{c_1k_1+c_2k_2}{k_1+k_2}$	$\frac{c_1k_1-c_2k_2}{k_1-k_2}$
0.035 (0.035)	14.79	0.03676 (0.025)	0.04374 (0.0175)	0.08028 (0.0425)	−0.04846 (−0.0075)	−0.8782	−0.4406	13.92	9.89
0.040 (0.040)	14.29	〃 (〃)	0.03935 (0.020)	0.07653 (0.045)	−0.04272 (−0.0050)	−0.8038	−0.4048	13.75	9.44
0.045 (0.045)	13.80	〃 (〃)	0.03729 (0.0225)	0.07444 (0.0475)	−0.03832 (−0.0025)	−0.7902	−0.3724	13.54	9.00
0.050 (0.050)	13.32	〃 (〃)	0.03676 (0.025)	0.07352 (0.050)	 (0)			13.32	8.65
0.055 (0.055)	12.86	〃 (〃)	0.03665 (0.0275)	0.07343 (0.0525)	−0.03322 (−0.0025)	−0.7975	−0.3228	13.07	8.26
0.060 (0.060)	12.44	〃 (〃)	0.03719 (0.030)	0.07404 (0.0550)	−0.03288 (−0.005)	−0.8226	−0.3114	12.84	8.04
0.065 (0.065)	12.03	〃 (〃)	0.03811 (0.0325)	0.07509 (0.0575)	−0.03188 (−0.0075)	−0.8400	−0.2894	12.59	7.73

表—2 $c_1>0$, $c_2<0$

k_2	c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$p_{24(z=0)}$ の係数	$p_{24(z=-h)}$ の係数	$\frac{c_1k_1+c_2k_2}{k_1+k_2}$	$\frac{c_1k_1-c_2k_2}{k_1-k_2}$
0.035 (0.035)	−14.79	0.03676 (0.025)	0.04374 (0.0175)	0.04418 (0.0425)	−0.003154 (−0.0075)	−0.3866	−0.6631	1.745	78.91
0.040 (0.040)	−14.29	〃 (〃)	0.03935 (0.020)	0.04583 (0.045)	−0.001392 (−0.0050)	−0.3987	−0.7456	1.048	123.76
0.045 (0.045)	−13.80	〃 (〃)	0.03729 (0.0225)	0.04690 (0.0475)	−0.000342 (−0.0025)	−0.4178	−0.8221	0.473	257.40
0.050 (0.050)	−13.32	〃 (〃)	0.03676 (0.025)	0.05024 (0.0500)	0.00 (0.00)	−0.4435	−0.8871	0.000	∞
0.055 (0.055)	−12.86	〃 (〃)	0.03665 (0.0275)	0.05273 (0.0525)	−0.000330 (−0.0025)	−0.4750	−0.9356	−0.393	−274.66
0.060 (0.060)	−12.44	〃 (〃)	0.03719 (0.030)	0.05539 (0.0550)	−0.001348 (0.005)	−0.5070	−0.9668	−0.730	−141.24
0.065 (0.065)	−12.03	〃 (〃)	0.03811 (0.0325)	0.05805 (0.0575)	−0.002945 (−0.0075)	−0.5563	−0.9765	−1.008	−96.53

* 自由な長い波による surf beats もあるであろう。

のである。また L.J. Tick[2] はこの成分が周波数スペクトルの低周波側に大きく現われるとしている。表—1 より明らかなとおり，$|a_{24}|$ は deep water の場合よりたしかに1桁大きくなっている。しかし $a_{21}{}^2+a_{22}{}^2+a_{23}{}^2$ と比較するとき $a_{24}{}^2$ は大分小さい。これは筆者の実験結果[5]と一致し，L.J. Tick[2] の説明とは多少くいちがう。また $p_{24(z=0)}$ を見れば，束縛波であるため，a_{24} よりも大きな約 8 cm の圧力の半振幅がある。なおこの計算では a_{24} およびその関連項については $k_2=0.05$ の値のとき $k_2\to k_1$ の極限を示すこととなる。

表—2 では a_{21}, a_{22} は **表—1** と同様である。a_{23} はその値が **表—1** よりもやや小となる。注目すべきは波速がきわめて小さくなることであり，$k_2=0.05$では波速が0となり，定常的な固定した波形を示す。この場合 $k_1=k_2$ であることは完全な重複波が成立しているわけである。$|a_{24}|$ の値は **表—1** にくらべはるかに小さく，一般にその絶対値は $h\to\infty$のときのそれより大分小さく，$k_2=0.05$ では0となる。そして $p_{24(z=0)}$，$p_{24(z=-h)}$ の係数はともに負に現われ，その絶対値は $z=-h$ の底のほうが大きい。いずれにしても表面波形の半振幅よりもはるかに大きな圧力変動が生ずることとなる。そしてその波速はきわめて大きく，$k_2=0.05$ では ∞ となる。すなわち変動は時間のみの関数となり（基本周波数の2倍周期）場所的には変化しない。この項が実は完全重複波の場合の特有の圧力変動として説明される時間にのみ関係する2倍周波数成分を示しているものであり，この効果が2つの波の波数が多少相違した場合には **表—2** の a_{24} およびその関連項として現われたのである。この a_{24} と p_{24} との大きさを **表—2** で比較するとき，典型的な束縛波であるということができよう。

以上の計算より，k_1, $k_2>0$ であり，あまり差がないとき，波数差 k_1-k_2 よりなる項が，同方向に進む波のときは，既述の群速度に近い速度の長い進行波として現われ，互いに逆方向に進む波のときは波形にはほとんど影響しないで，重複波の圧力の2倍周波数成分を生ぜしめる項として現われることがわかるであろう。

なお完全重複波の波形および圧力の表現はつぎのようになる。

$$\zeta_1=2\,a_1\cos k_1x\cos k_1c_1t \qquad\cdots(23)$$

$$p_1=2\,\rho\, b_1k_1c_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1h}\cos k_1x\cos k_1c_1t \qquad\cdots(24)$$

$$\zeta_{21}+\zeta_{22}=\left(\frac{3}{2}a_1{}^2k_1\coth^3 k_1h-\frac{1}{2}a_1{}^2k_1\coth k_1h\right)\times\cos 2\,k_1x\cos 2\,k_1c_1t \qquad\cdots(25\text{-}1)$$

$$\zeta_{23}=\frac{1}{2}a_1{}^2k_1(\coth k_1h+\tanh k_1h)\cos 2\,k_1x \qquad\cdots(25\text{-}2)$$

$$\zeta_{24}=0 \qquad\cdots(25\text{-}3)$$

$$p_{20}=-\rho\, b_1{}^2k_1{}^2\frac{\sinh^2 k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h} \qquad\cdots(26\text{-}1)$$

$$p_{21}+p_{22}=\rho\, b_1{}^2k_1{}^2\frac{1}{\sinh^2 k_1h}\left\{\frac{3}{2}\frac{\cosh 2\,k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h}-\frac{1}{2}\right\}\cos 2\,k_1x\cos 2\,k_1c_1t \qquad\cdots(26\text{-}2)$$

$$p_{23}=\frac{1}{2}\rho\, b_1{}^2k_1{}^2\frac{1}{\sinh^2 k_1h}\cos 2\,k_1x \qquad\cdots(26\text{-}3)$$

$$p_{24}=\left\{-\frac{1}{2}\rho\, b_1{}^2k_1{}^2(3+\coth^2 k_1h)+\frac{1}{2}\rho\, b_1{}^2k_1{}^2\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h}\right\}\cos 2\,k_1c_1t \qquad\cdots(26\text{-}4)$$

ただし a_1, b_1 および c_1 の関係は式 (16) による。

III. 水深有限のとき，3次元 (x,y,z) の2成分波の計算を行なう。

1次波は

$$\varphi_1=b_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1h}\sin(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)+b_2\frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2h}\sin(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t) \qquad\cdots(27)$$

$$\zeta_1=a_1\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)+a_2\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t) \qquad\cdots(28)$$

$$p_0=-\rho\, gz \qquad\cdots(29)$$

$$p_1=\rho\, b_1\sigma_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1h}\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)+\rho\, b_2\sigma_2\frac{\cosh k_2(h+z)}{\sinh k_2h}\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t) \qquad\cdots(30)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1{}^2=gk_1\tanh k_1h,\quad \sigma_2{}^2=gk_2\tanh k_2h\\ b_1k_1=a_1\sigma_1,\quad b_2k_2=a_2\sigma_2,\quad \sigma_1,\ \sigma_2>0\\ |\boldsymbol{k}_1|=k_1,\quad |\boldsymbol{k}_2|=k_2\\ \text{とする。}\end{array}\right\} \qquad\cdots(31)$$

これに対する2次波は計算の結果

$$\begin{aligned}\varphi_2=&B_{21}\frac{\cosh 2\,k_1(h+z)}{\sinh 2\,k_1h}\sin 2\,(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)\\&+B_{22}\frac{\cosh 2\,k_2(h+z)}{\sinh 2\,k_2h}\sin 2\,(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t)\\&+B_{23}\frac{\cosh|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|(h+z)}{\sinh|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|h}\times\sin\{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1+\sigma_2)t\}\\&+B_{24}\frac{\cosh|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|(h+z)}{\sinh|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|h}\times\sin\{(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1-\sigma_2)t\}+\text{const.}t\end{aligned} \qquad (32)$$

$$B_{21}=\frac{1}{2\,k_1g-4\,\sigma_1{}^2\coth 2\,k_1h}\times\frac{3}{2}b_1{}^2k_1{}^2\,\sigma_1(1-\coth^2 k_1h) \qquad\cdots(33\text{-}1)$$

$$B_{22}=\frac{1}{2\,k_2g-4\,\sigma_2{}^2\coth 2\,k_2h}\times\frac{3}{2}b_2{}^2k_2{}^2\,\sigma_2(1-\coth^2 k_2h) \qquad\cdots(33\text{-}2)$$

$$B_{23}=\frac{1}{|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|g-(\sigma_1+\sigma_2)^2\coth|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|h}\left[\frac{1}{2}b_1b_2(\sigma_1+\sigma_2)\{k_1k_2-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\coth k_1h\coth k_2h\}\right.$$
$$+\frac{1}{2}a_2b_1k_1^2g(\tanh k_1h-\coth k_1h)+\frac{1}{2}a_1b_2k_2^2g(\tanh k_2h-\coth k_2h)$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2(a_1b_2k_2+a_2b_1k_1)-\frac{1}{2}g\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2(a_1b_2\coth k_2h+a_2b_1\coth k_1h)\right]\cdots\cdots(33\text{-}3)$$

$$B_{24}=\frac{1}{|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|g-(\sigma_1-\sigma_2)^2\coth|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|h}\left[-\frac{1}{2}b_1b_2(\sigma_1-\sigma_2)\{k_1k_2+\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\coth k_1h\coth k_2h\}\right.$$
$$+\frac{1}{2}a_2b_1k_1^2g(\tanh k_1h-\coth k_1h)-\frac{1}{2}a_1b_2k_2^2g(\tanh k_2h-\coth k_2h)$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2(a_1b_2k_2-a_2b_1k_1)-\frac{1}{2}g\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2(a_1b_2\coth k_2h-a_2b_1\coth k_1h)\right]\cdots\cdots(33\text{-}4)$$

$$\text{const.}=\frac{1}{4}b_1^2k_1^2(1-\coth^2 k_1h)+\frac{1}{4}b_2^2k_2^2(1-\coth^2 k_2h)\cdots\cdots(33\text{-}5)$$

$\zeta_2=\zeta_{21}+\zeta_{22}+\zeta_{23}+\zeta_{24}$ とおいて

$$\zeta_{21}=\frac{1}{g}\left[-\frac{1}{4}b_1^2k_1^2(\coth^2 k_1h-1)+2\sigma_1B_{21}\coth 2k_1h+\frac{1}{2}b_1^2k_1^2\right]\cos 2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)\cdots\cdots(34\text{-}1)$$

$$\zeta_{22}=\frac{1}{g}\left[-\frac{1}{4}b_2^2k_2^2(\coth^2 k_2h-1)+2\sigma_2B_{22}\coth 2k_2h+\frac{1}{2}b_2^2k_2^2\right]\cos 2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t)\cdots\cdots(34\text{-}2)$$

$$\zeta_{23}=\frac{1}{g}\left[-\frac{1}{2}\{b_1b_2\,\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\coth k_1h\coth k_2h-b_1b_2k_1k_2\}+(\sigma_1+\sigma_2)B_{23}\coth|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|h\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(\sigma_1 b_1k_1a_2+\sigma_2 b_2k_2a_1)\right]\cos\{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1+\sigma_2)t\}\cdots\cdots(34\text{-}3)$$

$$\zeta_{24}=\frac{1}{g}\left[-\frac{1}{2}\{b_1b_2\,\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\coth k_1h\coth k_2h+b_1b_2k_1k_2\}+(\sigma_1-\sigma_2)B_{24}\coth|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|h\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(\sigma_1 b_1k_1a_2+\sigma_2 b_2k_2a_1)\right]\cos\{(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1-\sigma_2)t\}\cdots\cdots(34\text{-}4)$$

$p_2=p_{20}+p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{24}$ において

$$p_{20}=-\frac{1}{2}\rho\,b_1^2k_1^2\frac{\sinh^2 k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h}-\frac{1}{2}\rho\,b_2^2k_2^2\frac{\sinh^2 k_2(h+z)}{\sinh^2 k_2h}\cdots\cdots(35\text{-}1)$$

$$p_{21}=\left\{2\rho\sigma_1 B_{21}\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh 2k_1h}-\frac{1}{4}\rho\,b_1^2k_1^2\frac{1}{\sinh^2 k_1h}\right\}\cos 2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_1 t)\cdots\cdots(35\text{-}2)$$

$$p_{22}=\left\{2\rho\sigma_2 B_{22}\frac{\cosh 2k_2(h+z)}{\sinh 2k_2h}-\frac{1}{4}\rho\,b_2^2k_2^2\frac{1}{\sinh^2 k_2h}\right\}\cos 2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}-\sigma_2 t)\cdots\cdots(35\text{-}3)$$

$$p_{23}=\left[\rho(\sigma_1+\sigma_2)B_{23}\frac{\cosh|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|(h+z)}{\sinh|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|h}-\frac{1}{2}\rho\,b_1b_2\frac{1}{\sinh k_1h\sinh k_2h}\{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\cosh k_1(h+z)\cosh k_2(h+z)\right.$$
$$\left.-k_1k_2\sinh k_1(h+z)\sinh k_2(h+z)\}\right]\cos\{(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1+\sigma_2)t\}\cdots\cdots(35\text{-}4)$$

$$p_{24}=\left[\rho(\sigma_1-\sigma_2)B_{24}\frac{\cosh|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|(h+z)}{\sinh|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|h}-\frac{1}{2}\rho\,b_1b_2\frac{1}{\sinh k_1h\sinh k_2h}\{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2\cosh k_1(h+z)\cosh k_2(h+z)\right.$$
$$\left.+k_1k_2\sinh k_1(h+z)\sinh k_2(h+z)\}\right]\cos\{(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}-(\sigma_1-\sigma_2)t\}\cdots\cdots(35\text{-}5)$$

式 (32)～(35-5) を数値的に検討することは相当な計算労力を要するから，ここでは実用的に重要な3次元の重複波の場合を検討する。

この場合は

$$\left.\begin{aligned}&a_1=a_2\\&\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}=k_1\cos\theta\,x+k_1\sin\theta\,y\\&\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}=-k_1\cos\theta\,x+k_1\sin\theta\,y\\&\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2=-k_1^2\cos 2\theta\\&(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}=2k_1\sin\theta\,y\\&(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{x}=2k_1\cos\theta\,y\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)$$

の関係を用いればよい。

$$\zeta_1=2a_1\cos(k_1\cos\theta\,x)\cos(k_1\sin\theta\,y-\sigma_1 t)\cdots(37)$$

$$p_0=-\rho gz\cdots\cdots(38)$$

$$p_1=2\rho\,b_1\sigma_1\frac{\cosh k_1(h+z)}{\sinh k_1h}\cos(k_1\cos\theta\,x)\times\cos(k_1\sin\theta\,y-\sigma_1 t)\cdots\cdots(39)$$

$$\zeta_{21}+\zeta_{22}=\left\{\frac{3}{2}a_1^2k_1\coth^3 k_1h-\frac{1}{2}a_1^2k_1\coth k_1h\right\}\times\cos(2k_1\cos\theta\,x)\cos 2(k_1\sin\theta\,y-\sigma_1 t)\cdots(40\text{-}1)$$

$$\zeta_{23}=\frac{1}{g}\left[\frac{1}{2}b_1^2k_1^2\{\cos 2\theta\coth^2 k_1h+3\}+2\sigma_1B_{23}\times\coth(2k_1\sin\theta h)\right]\cos 2(k_1\sin\theta y-\sigma_1 t)\cdots(40\text{-}2)$$

表—3

θ	$k_1\cos\theta$	$k_1\sin\theta$	ζ_{23} の係数	ζ_{24} の係数	$p_{23(z=0)}$ の係数	$p_{24(z=0)}$ の係数	$p_{23(z=-h)}$ の係数	$p_{24(z=-h)}$ の係数
0°	0.05	0.00	−0.00000	0.05025	−0.4435	0.04891	−0.8871	0.04891
5°	0.04980	0.00435	−0.00072	0.04983	−0.4506	0.04480	−0.8599	0.04817
10°	0.04924	0.00868	−0.00276	0.04858	−0.4706	0.03259	−0.7857	0.04596
15°	0.04829	0.01294	−0.00536	0.04655	−0.4961	0.01265	−0.6791	0.04236
20°	0.04698	0.01710	−0.00768	0.04378	−0.5187	−0.01441	−0.5628	0.03747
30°	0.04330	0.02500	−0.00881	0.03644	−0.5299	−0.08643	−0.3526	0.02445
40°	0.03830	0.03213	−0.00290	0.02742	−0.4720	−0.1747	−0.2021	0.00849
45°	0.03535	0.03535	0.00299	0.02263	−0.4141	−0.2217	−0.1505	0.00000
50°	0.03213	0.03838	0.01120	0.01783	−0.3329	−0.2687	−0.1092	−0.00849
60°	0.02500	0.04330	0.03007	0.00881	−0.1488	−0.3571	−0.0592	−0.02445
70°	0.01710	0.04698	0.05096	0.00147	0.0558	−0.4291	−0.0325	−0.03747
80°	0.00868	0.04924	0.06658	−0.00332	0.2159	−0.4761	−0.0200	−0.04596
85°	0.00435	0.04980	0.07192	−0.00457	0.2613	−0.4883	−0.0174	−0.04817
90°	0.00	0.05	0.07351	−0.00499	0.2768	−0.4924	−0.0165	−0.04891
			$\zeta_{21}+\zeta_{22}$ の係数 0.07353		$p_{20(z=0)}=-0.4435$ $p_{21(z=0)}+p_{22(z=0)}$ の係数 0.2770		$p_{21(z=-h)}+p_{22(z=-h)}$ の係数 −0.01652	

$$\zeta_{24}=\frac{1}{2}a_1{}^2k_1\{\cos 2\theta\coth k_1h+\tanh k_1h\}\cos 2(k_1\cos\theta)x \quad\cdots\cdots(40\text{-}3)$$

$$p_{20}=-\rho\, b_1{}^2k_1{}^2\frac{\sinh^2 k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h} \quad\cdots\cdots(41\text{-}1)$$

$$p_{21}+p_{22}=\frac{\rho\, b_1{}^2k_1{}^2}{\sinh^2 k_1h}\left\{\frac{3}{2}\frac{\cosh 2k_1(h+z)}{\sinh^2 k_1h}-\frac{1}{2}\right\}\cos(2k_1\cos\theta\, x)\cos 2(k_1\sin\theta\, y-\sigma_1 t) \quad\cdots\cdots(41\text{-}2)$$

$$p_{23}=\left[2\rho\sigma_1 B_{23}\frac{\cosh(2k_1\sin\theta)(h+z)}{\sinh(2k_1\sin\theta\, h)}+\frac{1}{2}\rho\frac{b_1{}^2k_1{}^2}{\sinh^2 k_1h}\{\cos 2\theta\cosh^2 k_1(h+z)\right.$$
$$\left.+\sinh^2 k_1(h+z)\}\right]\cos 2(k_1\sin\theta\, y-\sigma_1 t) \quad\cdots\cdots(41\text{-}3)$$

$$p_{24}=\frac{1}{2}\frac{\rho\, b_1{}^2k_1{}^2}{\sinh^2 k_1h}\{\cos 2\theta\cosh^2 k_1(h+z)-\sinh^2 k_1(h+z)\}\cos(2k_1\cos\theta\, x) \quad\cdots\cdots(41\text{-}4)$$

ただし

$$B_{23}=\frac{b_1{}^2\sigma_1k_1{}^2}{2k_1\sin\theta\, g-4\sigma_1{}^2\coth(2k_1\sin\theta\, h)}\{3+(2\cos 2\theta-1)\coth^2 k_1h\} \quad\cdots\cdots(42)$$

なお $B_{24}=0$ となる。a_1, b_1, σ_1, k_1 の関係は式 (31) による。また記号 $_{23}$, $_{24}$ の関係がIIと反対になっているのはIIIでは波数ベクトルの成分に負の値を許しているからである。この解が $x=0$ の境界条件を満足することは容易に示される。

$\zeta_{21}+\zeta_{22}$, $p_{21}+p_{22}$ は入射波，反射波に特有の2次波が組み合わされたものであり，この場合 $\zeta_1=(\zeta_{11}+\zeta_{12})$ が short-crested wave を呈するにともない，やはりこの2次波も short-crested wave となっている。ζ_{23}, p_{23} は y 方向に（すなわち垂直壁面に沿って）進む long-crested wave を示している。$\theta=0$ で $\zeta_{23}=0$ となり，2倍周波数で時間的にのみ変化する圧力変動だけが残ることはいうまでもない。ζ_{24}, p_{24} は (−) x 方向すなわち壁体に垂直な方向の水位，水圧の時間的に不変な定常な正弦的変化を示している。その x 方向の波数は $\zeta_{21}+\zeta_{22}$ と一致している。ζ_{23}, ζ_{24} ともに波数は極限の場合を除き $2k_1$ より小である。このようにして完全重複波のときの時間のみの関数となる2倍周波数圧力変動は3次元の重複波の場合，壁体に沿って進む束縛進行波となって現われる。なお $\theta\to\pi/2$ の極限ではこの表現は y 方向に進行する同一の性質の2つの波を表わすが，実際問題では $\theta=\pi/2$ では k_1 進行波のみが存する。すなわち $\theta=\pi/2$ では実情と一致しない。

数値計算例により3次元重複波における2次干渉波の具体的大きさを求める。$a_1=1\,\mathrm{m}$, $k_1=0.05\,\mathrm{m}^{-1}$, $h=30\,\mathrm{m}$ とし，θ を $0\leqq\theta<\pi/2$ と変化させて，各項の係数の大きさの変化を **表—3** に示している（圧力の項は水頭になおすためには9.8で割らねばならないことは前と同様である）。

$\theta=0$ の近傍ではだいたい完全重複波に近い性質が示されるが，θ が大きくなるにつれ，いろいろ変わった性質が現われている。たとえば (i) p_{23} の係数は $z=-h$ では負の値のまま θ の増大とともに絶対値は減少してゆくが，$z=0$ では負の値で絶対値は θ の増大とともに一度増大し，さらに減少して θ が大きくなると正の値となる。(ii) ζ_{24}, $p_{24(z=0)}$, $p_{24(z=-h)}$ の係数を見れば，θ の増大とともにそれぞれ互いに正負の値が交錯し，波数の減小（波長の増大）にともなって複雑な分布を示している。こうしたことは自由波からは考えがたいことである。

なお **表—3** の作製において武村完爾君の協力を得た。

参考文献

1) Tick, L.J. : A non-linear random model of gravity

waves I, Jour. of Math. and Mech., viii, No. 5, 1959.

2) Tick, L.J. : Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Prentice Hall, 1963.

3) Longuet-Higgins, M.S. and R.W. Stewart : Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to 'surf beat', Jour. of Fluid Mech., Vol. 13, 1962.

4) 浜田徳一・加藤 始：流れの中の有限振幅波の計算，第 10 回海岸工学講演会講演集，土木学会，昭和 38.

5) 浜田徳一：沿岸波浪の工学的問題，沿岸海洋研究ノート，3巻1号，昭和 39.