

クノイド波に関する研究

岸 力*・佐 伯 浩**

1. クノイド波の限界

Korteweg & de Vries のクノイド波の理論によれば、クノイド波の波速および水分子の水平分速度はそれぞれ式 (1), (2) で与えられる (Wiegel [1960])。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{H}{hk^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \left[-\frac{5}{4} + \frac{3y_t}{2h} - \frac{y_t^2}{4h^2} + \left(\frac{3H}{2h} - \frac{y_t H}{2h^2} \right) cn^2(\cdot) - \frac{H^2}{4h^2} cn^4(\cdot) - \frac{8HK^2(k)}{L^2} \left(\frac{h}{3} - \frac{y_t^2}{2h} \right) \left(-k^2 sn^2(\cdot) \cdot cn^2(\cdot) + cn^2(\cdot) dn^2(\cdot) - sn^2(\cdot) dn^2(\cdot) \right) \right] \dots\dots\dots (2)$$

ただし $sn(\cdot)$ などは $sn[2K(k)(x/L - t/T), k]$ の略記である。

式 (1), (2) に用いた記号はつぎのとおりである。

c : 波速

u : 水分子の水平分速度

h : 静止水深

H : 波高

L : 波長

T : 周期

$K(k)$: 母数を k とする第1種完全ダ円積分

$E(k)$: 母数を k とする第2種完全ダ円積分

sn, cn, dn : Jacobi のダ円関数

y_t : 水底から波谷までの高さ

y : 水底から鉛直上向きに測った高さ

波頂の座標を $y = y_c$ と書くと、波頂の水分子に対しては式 (2) は式 (3) となる。

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \frac{y_c}{h} - \frac{1}{4} \left(\frac{y_c}{h} \right)^2 - \frac{8}{3} \frac{hHK^2(k)}{L^2} + 4 \frac{HK^2(k)}{L^2} \frac{y_c^2}{h} \dots\dots\dots (3)$$

クノイドの最高波を考えると、波頂で $u = c$ であるから、その条件として式 (1), (3) から式 (4) が得られる。

$$1 + \frac{H}{hk^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \frac{y_c}{h} - \frac{1}{4} \left(\frac{y_c}{h} \right)^2 - \frac{8}{3} \frac{hHK^2(k)}{L^2} + 4 \frac{HK^2(k)}{L^2} \frac{y_c^2}{h} \quad (4)$$

クノイド波の性質として式 (5) の関係がある。

$$K^2(k) = \frac{3}{16} \frac{L^2 H}{h^3 k^2} \dots\dots\dots (5)$$

クノイド波の一つの極限である孤立波を考えると、 $k^2 \rightarrow 1$ であるから波速は式 (6) になる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} \dots\dots\dots (6)$$

さらに孤立波では式 (7) の関係がある。

$$\frac{y_c}{h} = 1 + \frac{H}{h} \dots\dots\dots (7)$$

式 (5), (6) の関係を式 (4) に代入し、式 (7) を用いて整理すると式 (8) が得られる。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{H}{h} \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^4 = 1 \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) の解は

$$\frac{H}{h} = 0.689 \dots\dots\dots (9)$$

また式 (8) で $(H/h)^4$ の項を省略したときの解は

$$\frac{H}{h} = 0.749 \dots\dots\dots (10)$$

Keulegan [1940] は孤立波の限界として、 $(H/h)^3$ の項までとり、式 (11) を与えた。

$$\left(\frac{H}{h} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{H}{h} \right)^3 = \sqrt{1 + \frac{H}{h}} \dots\dots\dots (11)$$

この解は

$$\frac{H}{h} = 0.73 \dots\dots\dots (12)$$

式 (8) と Keulegan が示した式 (11) とを比較すると、両式の差は式 (6) に起因することがわかる。すなわち式 (6) の代わりに式 (13) を用いれば式 (8) は式 (11) になることが容易に確かめられる。

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{H}{h} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (13)$$

つぎに $k \neq 1$ である一般の場合を考える。 $k \neq 1$ であれば式 (7) の代わりに式 (14) が成立する。

$$\frac{y_c}{h} = \frac{16}{3} \frac{h^2}{L^2} K^2(k) \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) + 1 \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) を書き換えると式 (15) が得られる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \dots\dots\dots (15)$$

ただし η_0 : 静止水面から波頂までの高さ。

式 (14) を式 (4) に代入し、式 (15) を用いて整理すると式 (16) が得られる。式 (16) がクノイド波の最高波の条件である。

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部

** 北海道大学工学部

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \right] \left(\frac{H}{h} \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \right]^2 \left(\frac{H}{h} \right)^2 \\ & - \frac{8}{3} \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{h}{L} \right)^2 K^2(k) + 4 \left(\frac{H}{h} \right) \left(\frac{k}{L} \right)^2 K^2(k) \\ & \cdot \left[1 + \left\{ \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \frac{H}{h} \right\}^2 \right] \\ & = 1 + \frac{H}{hk^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

式(16)を簡単にするため、式(5)を変形して式(17)を作る。

$$\left(\frac{h}{L} \right)^2 = \left(\frac{H}{h} \right) \frac{3}{16(kK(k))^2} \dots\dots\dots (17)$$

式(17)を式(16)に代入し、簡単のため式(18)の記法を用いると式(19)が得られる。

$$\frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) = F(k) \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k^2} \left(\frac{H}{h} \right) + \frac{1}{4k^2} (1 - k^2 F^2(k)) \left(\frac{H}{h} \right)^2 \\ & + \frac{3}{2} \frac{F(k)}{k^2} \left(\frac{H}{h} \right)^3 + \frac{3}{4k^2} F^2(k) \left(\frac{H}{h} \right)^4 = 1 \\ & \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

式(19)において $k^2 \rightarrow 1$ とすれば $F(k) \rightarrow 1$ であるから、式(8)が得られる。

Keulegan はクノイド波の基本方程式の近似度を考慮して $(H/h)^3$ の項までをとり、クノイド波の限界を求めている。そこで本文でも式(19)の左辺第4項を省略してクノイド波の限界を計算する。

計算結果を図-1に示した。図には比較のため Munk [1949] による孤立波の砕波限界 $H=0.78h$; Bretschneider [1958], Danel [1952] および首藤 [1961] による最高波の曲線を記入してある。

図によれば、クノイド波の最高波は $(h/L) < 0.12$ の範囲では他の曲線とはほぼ一致している。しかし $0.12 < (h/L) < 0.25$ の範囲ではクノイド波の最高波は Bretsch-

neider, Danel および首藤らの曲線より大きい値を示す。またクノイド波では (H/L) の最大は深水波のとき生じないで

$$(h/L) = 0.238, \quad (H/L) = 0.143$$

が最大である。 (h/L) がこの値より大きくなると、 (H/L) は、図-1にも示されているとおり、かえって減少する。

Bretschneider, Danel および首藤の曲線は多少の違いはあるがいずれも最高波の実験値とはほぼ一致する曲線である。図-1の計算結果によると、クノイド波理論は浅水波領域の波の性質を表わすのに適しているといわれているが、最高波については必ずしも十分の精度をもっているとはいえない。ただし本計算に用いたのは、Korteweg & de Vries によるクノイド波理論であって、Laitone [1961] の新しい計算によれば多少修正すべき点があるのは周知のとおりである。Korteweg & de Vries の理論であれば、Masch & Wiegel [1961] によって計算表が作られており、実用上の見地からこの理論の適合性を調べてみたのである。筆者らは Laitone の理論に対して検討を進めている。

2. クノイド波の波頂高

クノイド波の理論によれば静水面から波頂までの高さ η_0 と波高 H との比は前出の式(15)で与えられる。

$$\frac{\eta_0}{H} = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \dots\dots\dots (15)$$

式(15)でわかるとおり、 (η_0/H) は k のみの関数である。

k と他の水理量との関係はつぎのように求められる。周期 T は式(20)で表わされる。

$$\left[T \sqrt{g/h} \right] = \left(\frac{16h}{3H} \right)^{1/2} \frac{kK(k)}{1 + (H/hk^2) \{ 1/2 - E(k)/K(k) \}} \dots\dots\dots (20)$$

式(20)において $T \sqrt{g/h}$ と (H/h) は (H/T^2) と (h/T^2) で表わされるから、 (H/T^2) と (h/T^2) の一組の値に対して k^2 の値が1個定まる。この計算には $T(g/h) - H/h - K(k)$ のグラフを利用すれば便利である(岸 [1964])。 $K(k)$ と (η_0/H) との関係を図-2に示す。与えられた (h/T^2) に対する (H/T^2) の限界値 (k^2 の最

図-1 “ H/L ” Versus “ h/L ” for Maximum Waves

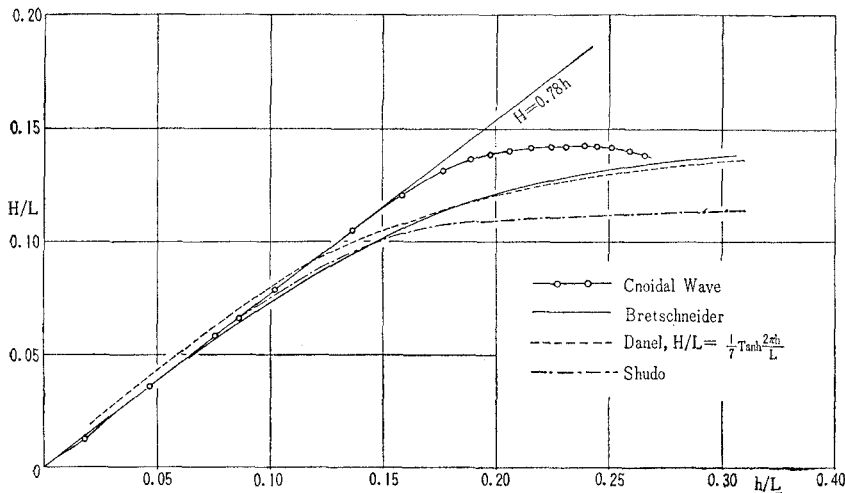


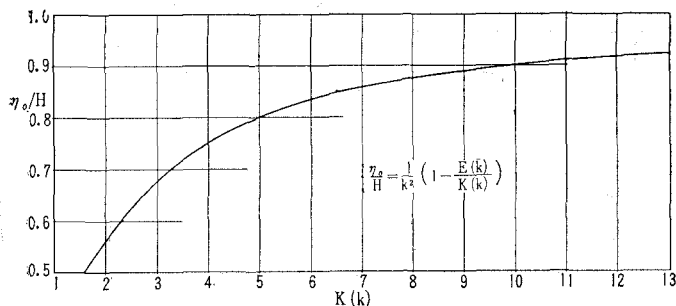
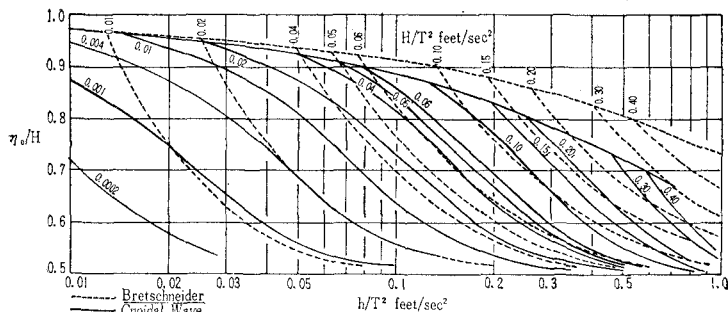
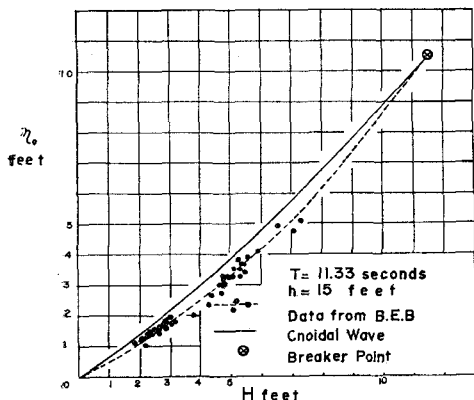
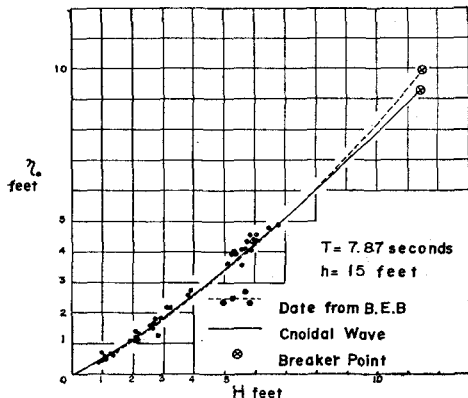
図-2 Relation between $K(k)$ and η_0/H 

図-3 Ratio of Crest Elevation Above Still Water to Wave Height

図-4 “ η_0 ” versus “ H ”図-5 “ η_0 ” versus “ H ”

大値)は Breaker Index から定めた。

(η_0/H) の計算結果を 図-3 に示した。

図-3 には Bretschneider の与えた設計曲線も比較のため記入してある。図によれば H/T^2 (ft/sec²) ≥ 0.1 の範囲ではクノイド波理論による計算値は設計曲線の値より小さくなる。 $H/T^2 \leq 0.1$ の範囲では、その逆に計算値は設計曲線より概して大きい。しかも、たとえば $H/T^2 = 0.02$ の曲線にみられるように、設計曲線と計算値とは

傾向がかなり違っていることは注目すべき点である。つぎに与えられた h/T^2 に対する η_0/H の最大値について計算値と設計曲線を比較すると計算値は設計曲線より小さい。特に h/T^2 が大きくなるとその差がいちじるしい。

そこで設計曲線を定めるのに用いた実測値をもととして設計曲線と計算値との差を考察する。図-4~6 は Bretschneider によって紹介された

B.E.B. の実験値を示したものである。図-4 は h/T^2 のもっとも小さな実測値の例で 図-3 では $h/T^2 = 0.117$ の場合に当たる。実測値は $\eta_0/H \leq 0.7$ の範囲にあるから、 H/T^2 にすれば $H/T^2 < 0.05$ の部分にかざられている。この実測値の範囲では、設計曲線のほうが計算値より実測値によく合っているように見える。しかし $H/T^2 > 0.05$ の部分とくに碎波限界の近くでは設計曲線と計算値との優劣を比較することはできない。さらに $h/T^2 > 0.1$ の範囲に対しては、計算値と実測値との差が特にいちじるしいが、この領域については実測資料がなく、設計曲線も単なる推定値にすぎない。この領域に対して実験資料を補足し、信頼度の高い設計曲線を確立することが重要である。

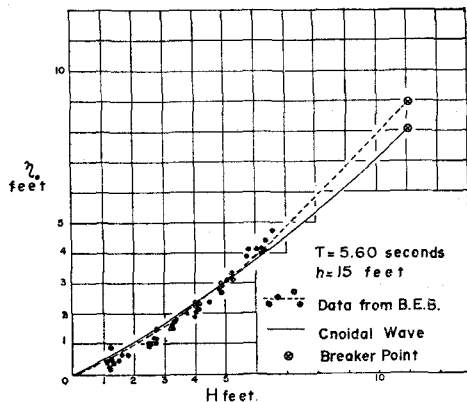
図-6 “ η_0 ” versus “ H ”

図-7 “ $K(k)$ ” versus “ η_0/H ” for Croidal Wave and Bretschneider's Design Curve

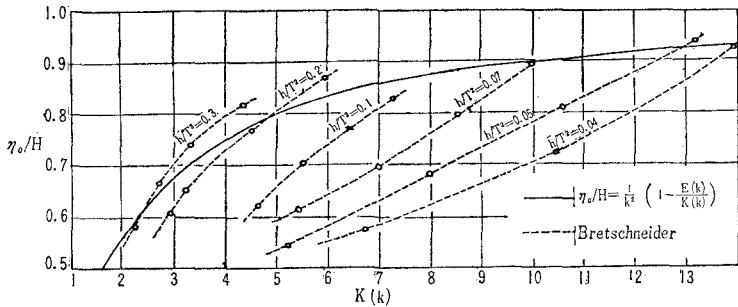
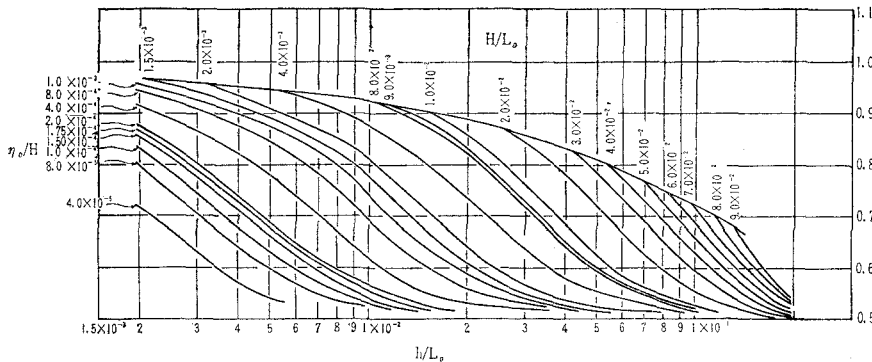


図-8 Ratio of Crest Elevation Above Still Water to Wave Height



つぎに図-5は図-3における $h/T^2=0.243$ に相当する実測値を示したものである。これは図-3においても設計曲線と計算値とが比較的良好に合っている部分である。ただ H/T^2 が大きい所で計算値と設計曲線とに差があるが、図-5に示されているように、この部分には実測値がないので両者の当否はいえない。

図-6は図-3における $h/T^2=0.478$ に相当する実測値で、これも実測値がある部分では計算値と設計曲線とはほとんど一致しているが、問題の砕波限界近くの状態は調べることができない。

ここで引用した実測値のかぎりでは、設計曲線と計算値の比較はむずかしい。そこで見方を変えて、設計曲線の数値を図-2に記入してクノイド波の計算値と比較した結果を図-7に示す。設計曲線は h/T^2 の小さな浅水波の領域で、クノイド波よりかなりflatな波形を与えていることになる。

図-3は設計曲線と比較するためft-sec単位で表わしてあり不便であるから、これを無次元化して図-8に示した。

3. Skjelbreia の理論による Stokes 波の限界と波形

クノイド波の理論は最高波の限界に関しては必ずしも実測値と一致しないことを1.で指摘した。特に水深が大きい領域ではクノイド波は小振幅波に帰着され精度が

高くない。水深が大きい領域では Stokes 波の理論が優れている。また波形に関しても2.でのべたとおり、 (η_0/H) の値はクノイド波の計算値と Bretschneider の設計曲線にはかなりの差があったが両者の当否を実測値だけで判断することは困難であった。本節では Stokes 波の理論による計算を示し、設計曲線との比較を行なった。Stokes 波の理論としては、

Skjelbreia [1960] の第5次近似解を用いた。

Skjelbreia の解によって最高波の限界を計算する。限界条件として波速 $\bar{c}$ と波頂流速 u とが等しく $\bar{c}=u$ 、また垂直分速度 $v=0$ を与えると式(21)が得られる。

$$c_0^2(1+\lambda^2 c_1+\lambda^4 c_2)=2g[(\lambda^2 c_3+\lambda^4 c_4)+\lambda+(\lambda^2 B_{22}+\lambda^4 B_{24})+(\lambda^2 B_{33}+\lambda^5 B_{35})+\lambda^4 B_{44}+\lambda^5 B_{55}] \quad (21)$$

ただし

$$c_1, c_2, c_3, c_4: \cosh(2\pi h/L), \sinh(2\pi h/L) \text{ の関数} \\ B_{22}, B_{24}, B_{33}, B_{35}, B_{44}, B_{55}: \cosh(2\pi h/L), \sinh(2\pi h/L) \text{ の関数} \\ \lambda: \text{パラメータ} \quad h: \text{静止水深} \quad L: \text{波長}$$

式(21)における c_0 は式(22)で表わされる。

$$c_0^2 = g \tanh \beta h \left\{ \beta = 2\pi/L \right\} \quad (22)$$

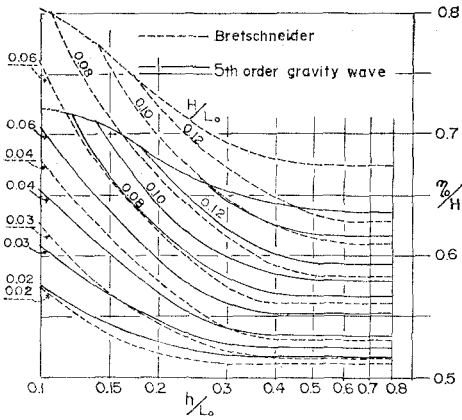
式(22)を式(21)に代入し整理すると式(23)が得られる。

$$\frac{\tanh \beta h}{2} = \lambda + \left(c_3 + B_{22} - \frac{\tanh \beta h}{2} c_1 \right) \lambda^2 + B_{33} \lambda^3 + \left(c_4 + B_{24} + B_{44} - \frac{\tanh \beta h}{2} c_2 \right) \lambda^4 + (B_{35} + B_{55}) \lambda^5 + \dots \quad (23)$$

式(23)において βh を与えれば λ を求めることができる。式(23)から得られる λ を用いれば、砕波限界における (H/h) , (h/L_0) , $(\beta \eta_0)$ などの値がそれぞれ式(24), (25)および式(26)から得られる。

$$H/h = \frac{2}{\beta h} \left\{ \lambda + B_{33} \lambda^3 + (B_{35} + B_{55}) \lambda^5 \right\} \quad (24)$$

$$h/L_0 = (h/L) \tanh \beta h \{ 1 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda^4 \} \quad (25)$$

図-9 “ η_0/H ” for Stokes Wave

$$\beta\eta_0 = \lambda + B_{22}\lambda^2 + B_{33}\lambda^3 + (B_{24} + B_{44})\lambda^4 + (B_{35} + B_{55})\lambda^5 \dots (26)$$

さらに式 (24) と式 (26) とから式 (27) が得られる。

$$\eta_0/H = \frac{\beta\eta_0}{2\pi(h/L)(H/h)} \dots (27)$$

計算結果を図-9 に示した。計算には Skjelbreia の計算表を用いた。図によれば、 η_0/H の最大値は Bretschneider の設計曲線より小さいが、クノイド波の値より大きい。また図-9 には最大波高以下の波高に対する η_0/H の値も記入してある。この値は式 (24)~(27) で λ を与えて直接計算したものである。最高波より波高の小さい波に対しても、Stokes 波の理論による η_0/H の値は設計曲線とクノイド波の計算値との中間にある。

図-9 では $h/L_0 < 0.1$ の計算値を示していない。それは式 (23) から λ を求める計算が $h/L < 0.1$ の範囲では物理的に不合理な結果を与えたからである。すなわち式 (23) において $h/L = 0.104$ のとき $\lambda = 1.645$, $h/L < 0.104$ では $\lambda < 0$ となった。 $|\lambda| > 1$, $\lambda < 0$ は明らかに不合理な結果と思われる。実際これらの λ の値を式 (24)~(27)

に代入した場合 $H/h > 1 \times 10^3$, または $\eta_0/H > 1.0$ となった。式 (23) は λ に関する 5 次式であるから一般に 5 根がある。前述の性質はそのうちの根の選び方によるものであり、他の根をとれば物理的に意味のある結果が得られるのではないかと疑問が生ずる。筆者らは式 (23) の計算に北大計算センター NEAC-2203 G を用い、5 根をすべて検討したのである。 $h/L < 0.1$ の範囲で式 (23) が成立しないことは、ただちに Stokes 波の理論の欠陥を意味するものではない。単に $u=c$ という最高波の条件が適用できないことを示すものである。Stokes 波の適用限界を調べることは別の問題であり、この点についても筆者らは考察を進めている。

参考文献

- 1) Bretschneider, C.L. [1958]: Selection of design wave for offshore structure; Proc. ASCE, V. 84 (WW 2).
- 2) Danel, Pierre [1952]: On the limiting clapotis, NBS. Cir. 521, Gravity Waves.
- 3) Keulegan, G.H. and Patterson, G.W. [1940]: Mathematical theory of irrotational translation waves; Journal of Res., NBS, V. 24.
- 4) Kishi, T. [1964]: 波動論; 土木学会水工学講習会テキスト, 64-5.
- 5) Laitone, E.V. [1960]: The second approximation to cnoidal and solitary waves; Journal of Fluid Mechanics, V. 9 (3).
- 6) Masch, D.F. and Wiegel, R.L. [1961]: Cnoidal waves—Table of Functions; Council on Wave Res., The Eng. Foundation, Univ. of Calif.
- 7) Munk, W.H. [1949]: The solitary wave theory and its application to surf problems; Ann. New York Acad. of Science, V. 51, Art. 3.
- 8) Shuto, N. [1961]: 有限振幅波について—高次級数解による進行波の碎波限界; 建設省土木研究所報告, 111-4.
- 9) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J.A. [1960]: Fifth order gravity wave theory; Proc. 7th Conf. on Coastal Eng. V. 1.