

流れの中の有限振幅波—追 補—

浜 田 徳 一*

1. この計算は参考文献^{1),2)}につき、その不十分な点を補い、また具体的性質に言及したものである。以下参考文献 1) を [I], 同 2) を [II] とする。

[II] の計算では一様流速分布の場合、三角形型流速分布の場合、いままでの普通の非回転の場合の計算と同様に、波形の 2 次近似の $K_2^{(0)} \approx 0$, すなわち平均水面と x 軸の間に 2 次量としての差異を許す解法を用いたが、この方法は筆者の用いた一般的解法による放物線型流速分布の場合の解との間で統一的な調整が困難であり、筆者の用いた解法では $K_2^{(0)} = 0$ として、圧力の 2 次近似 p_2 の定数項を調整し (これは境界条件としてももちろん可能である), 平均水面と x 軸とを完全に一致させることが望ましい。

他方非回転の運動に限定された計算においても、運動方程式の積分定数 $F(t)$ に 2 次近似の定数項を含め、ま

$$\begin{aligned} p = & -\rho gy + \rho \frac{(U_0 - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \cosh m_1(y+h) \cos m_1(x-ct) \\ & - \frac{\rho}{4} \frac{(U_0 - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \left(1 - \frac{3}{\sinh^2 m_1 h} \cosh 2m_1(y+h) \right) \cos 2m_1(x-ct) \\ & - \frac{\rho}{4} \frac{(U_0 - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \cosh 2m_1(y+h) + \frac{\rho}{4} \frac{(U_0 - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \cosh 2m_1 h \\ & - \frac{\rho}{2} (U_0 - c_0)^2 K_1^2 m_1^2 \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

三角形型流速分布のとき

$$\eta = K_1 \cos m_1(x-ct) + K_2 \cos 2m_1(x-ct) \dots \dots \dots (3)$$

(K_2 は [II] 式 (61) の $\cos 2m_1(x-ct)$ の係数)

$$\begin{aligned} p = & -\rho gy + \rho \left\{ (U_0 - c_0) \frac{(U_{00} - c_0)}{\sinh m_1 h} K_1 m_1 \cosh m_1(y+h) - \frac{(U_{00} - c_0)}{\sinh m_1 h} K_1 \frac{U_{00}}{h} \sinh m_1(y+h) \right\} \\ & \times \cos m_1(x-ct) + \rho \left[\frac{(U_0 - c_0) \cosh 2m_1(y+h)}{2(U_{00} - c_0) \sinh^2 m_1 h} K_1^2 \left\{ \frac{3}{2} (U_{00} - c_0)^2 m_1^2 \frac{1}{\sinh^2 m_1 h} \right. \right. \\ & - \frac{3}{2} m_1 (U_{00} - c_0) \frac{U_{00}}{h} \coth m_1 h + \frac{1}{2} \frac{U_{00}^2}{h^2} \left. \right\} - \frac{1}{4} \frac{(U_{00} - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \\ & - \frac{\sinh 2m_1(y+h) \cdot U_{00}/h}{4(U_{00} - c_0) m_1 \sinh^2 m_1 h} K_1^2 \left\{ \frac{3}{2} (U_{00} - c_0)^2 m_1^2 \frac{1}{\sinh^2 m_1 h} - \frac{3}{2} m_1 (U_{00} - c_0) \frac{U_{00}}{h} \coth m_1 h + \frac{1}{2} \frac{U_{00}^2}{h^2} \right\} \\ & \times \cos 2m_1(x-ct) - \frac{\rho}{4} \frac{(U_{00} - c_0)^2}{\sinh^2 m_1 h} K_1^2 m_1^2 \cosh 2m_1(y+h) + \frac{\rho}{4} \frac{(U_{00} - c_0)^2 K_1^2 m_1^2}{\sinh^2 m_1 h} \cosh 2m_1 h \\ & - \frac{1}{2} \rho (U_{00} - c_0)^2 K_1^2 m_1^2 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

放物線型流速分布のとき

$$\eta = K_1 \cos m_1(x-ct) + K_2 \cos 2m_1(x-ct) \dots \dots \dots (5)$$

(K_2 は [II] 式 (43) による)

$$\begin{aligned} p = & -\rho gy + \rho \{ (\varphi_{11y} + \varphi_{12y}) (U_0 - c_0) - (\varphi_{11} + \varphi_{12}) U_{0y} \} \cos m_1(x-ct) \\ & + \left[-\frac{\rho}{4} (\varphi_{11y} + \varphi_{12y})^2 - \rho (c_0 - U_0) \{ A_2^{(0-2)} \varphi_{21y}^{(0)} + B_2^{(0-2)} \varphi_{22y}^{(0)} + 2 D_y^{(2)} \} \right] \end{aligned}$$

たは速度ポテンシャル ϕ に $\text{const. } t$ の項を付加して $K_2^{(0)} = 0$ とし (すなわち圧力の 2 次近似 p_2 に $K_2^{(0)}$ の値を含ませてしまふ), 計算性を進めることが行なわれており (G.B. Whitham (1961) 以下³⁾, radiation stress の計算においてもこの考え方が用いられる。そしてそれを筆者の一般的解法に比較して考えると $K_2^{(0)} = 0$ とした解法が望ましいものであると考えられる。

$K_2^{(0)} = 0$ とし、平均水面を x 軸と一致させた場合、2 次近似までの波形および圧力の表示はつぎのようになる (各符号の意味は [II] と同じである)。

一様流速分布のとき

$$\eta = K_1 \cos m_1(x-ct) + K_2 \cos 2m_1(x-ct) \dots \dots \dots (1)$$

(K_2 は [II] 式 (51) による)

$$\begin{aligned}
 & -\rho \{A_2^{(0)} \varphi_{21}^{(0-2)} + B_2^{(0-2)} \varphi_{22}^{(0)} + 2 D^{(2)}\} \cdot U_{0y} + \frac{\rho}{4} (\varphi_{11} + \varphi_{12}) (\varphi_{11yy} + \varphi_{12yy}) \cos 2m_1(x-ct) \\
 & - \frac{\rho m_1^2}{2} (\varphi_{11} + \varphi_{12})^2 \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

計算に必要な量は $D^{(2)}(y)$ を除き、すべて [I], [II] したが、つぎのとおりである。
 に示されている。 $D^2(y)$ は紙数制限のため [II] に省略 $D^{(2)}(y) = D_3^{(2)}y^3 + D_4^{(2)}y^4 + D_5^{(2)}y^5 + \dots\dots\dots$ とおき

$$\begin{aligned}
 D_3^{(2)} &= -\frac{h^2}{24 U_{00}} F_{101} \\
 D_4^{(2)} &= -\frac{h^2}{48 U_{00}} F_{102} \\
 D_5^{(2)} &= -\left(\frac{1}{120} \frac{h^2}{U_{00}} m_1^2 - \frac{1}{240} \frac{h^2}{U_{00}} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) F_{101} - \frac{h^2}{80 U_{00}} F_{103} \\
 D_6^{(2)} &= -\left(\frac{m_1^2}{360} \frac{h^2}{U_{00}} - \frac{1}{720} \frac{h^2}{U_{00}} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) F_{102} - \frac{1}{120} \frac{h^2}{U_{00}} F_{104} \\
 D_7^{(2)} &= -\left(\frac{1}{1260} \frac{h^2}{U_{00}} m_1^4 - \frac{1}{1260} m_1^2 \frac{h^2}{U_{00}} \frac{1}{\beta_1 h^2} - \frac{1}{560} \frac{h^2}{U_{00}} \frac{1}{\beta_1^2 h^4}\right) F_{101} \\
 & \quad - \left(\frac{1}{840} m_1^2 \frac{h^2}{U_{00}} - \frac{1}{1680} \frac{h^2}{U_{00}} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) F_{103} - \frac{1}{168} \frac{h^2}{U_{00}} F_{105} \\
 D_8^{(2)} &= \left(-\frac{1}{5040} m_1^4 + \frac{1}{5040} \frac{m_1^2}{\beta_1 h^2} + \frac{1}{1440} \frac{1}{\beta_1^2 h^4}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{102} + \left(-\frac{m_1^2}{1680} + \frac{1}{3360} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{104} \\
 & \quad - \frac{1}{224} \frac{h^2}{U_{00}} F_{106} \\
 D_9^{(2)} &= \left(-\frac{1}{22680} m_1^6 + \frac{1}{15120} \frac{m_1^4}{\beta_1^2 h^4} + \frac{1}{3240} \frac{m_1^2}{\beta_1^2 h^4} + \frac{1}{1008} \frac{1}{\beta_1^3 h^6}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{101} \\
 & \quad + \left(-\frac{1}{15120} m_1^4 + \frac{1}{15120} \frac{m_1^2}{\beta_1 h^2} + \frac{1}{3024} \frac{1}{\beta_1^2 h^4}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{103} \\
 & \quad + \left(-\frac{1}{3024} m_1^2 + \frac{1}{6048} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{105} - \frac{1}{288} \frac{h^2}{U_{00}} F_{107} \\
 D_{10}^{(2)} &= \left(-\frac{1}{113400} m_1^6 + \frac{1}{75600} \frac{m_1^4}{\beta_1 h^2} + \frac{1}{11340} \frac{m_1^2}{\beta_1^2 h^4} + \frac{1}{2400} \frac{1}{\beta_1^3 h^6}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{102} \\
 & \quad + \left(-\frac{1}{37800} m_1^4 + \frac{1}{37800} \frac{m_1^2}{\beta_1 h^2} + \frac{1}{5600} \frac{1}{\beta_1^2 h^4}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{104} \\
 & \quad + \left(-\frac{1}{5040} m_1^2 + \frac{1}{10080} \frac{1}{\beta_1 h^2}\right) \frac{h^2}{U_{00}} F_{106} - \frac{1}{360} \frac{h^2}{U_{00}} F_{108}
 \end{aligned} \dots\dots (7)$$

ただし F_{10n} は [II] 式 (33) において $F_{10}(y) = F_{100} + F_{101}y + F_{102}y^2 + F_{103}y^3 + \dots\dots\dots$ とおいたものであり、

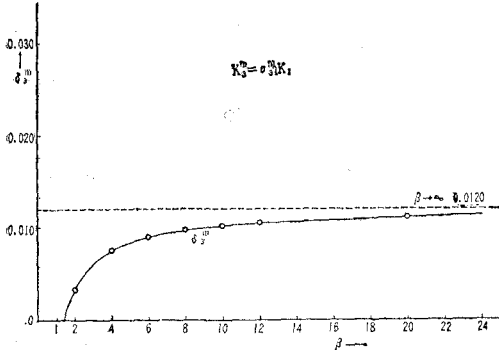
$$\begin{aligned}
 F_{100} &= 0 \\
 F_{101} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left(\frac{F_2^2}{h^2} - k \right) - \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left(2 - k \beta_1 h^2 + \frac{F_2^2}{h^2} \beta_1 h^2 \right) \right] \\
 F_{102} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{2 F_2}{h} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left(\frac{1}{\beta_1 h^2} - k \right) - \frac{2}{\beta_1^3 h^6} (-k \beta_1 h^2 + 3) \frac{F_2}{h} \right] \\
 F_{103} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left\{ \frac{2}{3} k^2 - \frac{2}{3} k \left(\frac{3}{\beta_1 h^2} + \frac{F_2^2}{h^2} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\beta_1 h^2} - 3 \frac{F_2^2}{h^2} \right) \frac{1}{\beta_1 h^2} \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left\{ \frac{2}{3} \beta_1 h^2 k^2 + \left(-4 - \frac{2}{3} \beta_1 h^2 \frac{F_2^2}{h^2} \right) k + 4 \frac{F_2^2}{h^2} + \frac{16}{3} \frac{1}{\beta_1 h^2} \right\} \right] \\
 F_{104} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{F_2}{h} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left(\frac{2}{3} k^2 - \frac{4}{\beta_1 h^2} k + \frac{5}{3} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left(2 \beta_1 h^2 k^2 - 20 k + 41 \frac{1}{\beta_1 h^2} \right) \frac{F_2}{h} \right] \\
 F_{105} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left\{ -\frac{2}{15} k^3 + \frac{2}{15} k^2 \left(\frac{10}{\beta_1 h^2} + \frac{F_2^2}{h^2} \right) - \frac{2}{15} \frac{1}{\beta_1 h^2} k \left(\frac{17}{\beta_1 h^2} + \frac{10 F_2^2}{h^2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{15} \left(\frac{13}{\beta_1 h^2} - \frac{18 F_2^2}{h^2} \right) \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \right\} - \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left\{ -\frac{2}{15} \beta_1 h^2 k^3 + \left(2 + \frac{2}{15} \beta_1 h^2 \frac{F_2^2}{h^2} \right) k^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{2}{\beta_1 h^2} \left(\frac{62}{15} + \beta_1 h^2 \frac{F_2^2}{h^2} \right) k + \frac{48}{5} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} + \frac{42}{5} \frac{1}{\beta_1 h^2} \frac{F_2^2}{h^2} \right\} \right] \\
 F_{106} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{F_2}{h} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left(-\frac{4}{45} k^3 + \frac{4}{3} \frac{1}{\beta_1 h^2} k^2 - \frac{46}{9} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} k + \frac{8}{15} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \right) + \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \frac{F_2}{h} \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\frac{4}{45} \beta_1 h^2 k^3 - \frac{28}{15} k^2 + \frac{118}{9} \frac{1}{\beta_1 h^2} k - \frac{352}{15} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \right) \right] \\
 F_{107} &= K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left\{ \frac{4}{315} k^4 - \frac{4}{315} \left(\frac{21}{\beta_1 h^2} + \frac{F_2^2}{h^2} \right) k^3 + \frac{2}{105} \frac{1}{\beta_1 h^2} \left(\frac{93}{\beta_1 h^2} + \frac{14 F_2^2}{h^2} \right) k^2 \right. \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{315} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left(\frac{333}{\beta_1 h^4} + \frac{281}{h^2} F_2^2 \right) k - \frac{1}{315} \left(\frac{922}{\beta_1 h^2} - \frac{762}{h^2} F_2^2 \right) \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \right\} + \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left\{ -\frac{4}{315} \beta_1 h^2 k^4 \right.
 \end{aligned} \dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta_1 h^2 \left\{ -\frac{16}{45} \frac{1}{\beta_1 h^2} - \frac{4}{315} \frac{F_2^2}{h^2} \right\} k^3 - \left\{ \frac{132}{35} \frac{1}{\beta_1 h^2} + \frac{16}{45} \frac{F_2^2}{h^2} \right\} k^2 + \frac{1}{315} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left\{ 4292 + 1192 \beta_1 h^2 \frac{F_2^2}{h^2} \right\} k \\
 & - \frac{4662}{315} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} - \frac{1472}{105} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \frac{F_2^2}{h^2} \left\} \right\} \\
 F_{108} = & K_1^2 (U_{00} - c_0)^2 \left[\frac{F_2}{h} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} \left\{ \frac{2}{315} k^4 - \frac{8}{45} \frac{1}{\beta_1 h^2} k^3 + \frac{82}{45} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} k^2 - \frac{256}{45} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} k \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{33}{35} \frac{1}{\beta_1^4 h^8} \right\} + \frac{F_2}{h} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \left\{ -\frac{2}{315} \beta_1 h^2 k^4 + \frac{8}{35} k^3 - \frac{154}{45} \frac{1}{\beta_1 h^2} k^2 + \frac{2224}{105} \frac{1}{\beta_1^2 h^4} k - \frac{177}{5} \frac{1}{\beta_1^3 h^6} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } k = \frac{2}{\beta_1 h^2} - m_1^2$$

非回転波において、 $K_2^{(c)}=0$ の計算と $K_2^{(c)} \neq 0$ の計算とでは、波形の 3 次近似 $\eta_3 = K_3^{(1)} \cos m_1(x-ct) + K_3^{(2)} \cos 3m_1(x-ct)$ において、 $K_3^{(1)}$ の値に多少の変化が生ずる。たとえば三角形型流速分布のとき [II] 図—4 の $K_3^{(1)}$ は 図—1 のように書きなおされ、これに対応する一様流速分布のときの $\delta_3^{(1)} = 0.0100$ ([II] 図—4 E.V. Laitone⁴⁾ の表示式による) は 0.0120 と変更される。

図—1



2. [I] の末尾に放物線型流速分布の流れのときの波の存在による底の境界層について記したが、これは垂直方向速度を無視した簡単なものであった。以下記す計算はこれを改良し、かつ底にかかるせん断力につき考察を行なったものである。

一般流 U_0 に関する動粘性係数を ν_1 とし、波の運動におけるそれを ν_2 とする。ともに一定であると考えから、 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ となつて、それが分子動粘性係数と一致するとき、この解法は正しい解を与えるが、その他の場合にも近似的に用いることができる。放物線型流速分布は

$$U_0 = U_{00} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) = \frac{g \sin \theta}{2\nu_1} h^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad \cdots (9)$$

ただし θ は $\cos \theta \rightarrow 1$ とおきうる程度の量である。

[I] 式 (16)' によれば非粘性の波の解法では、底付近で波につき $(\zeta)_{y=h} \rightarrow 0$ であるから、底の粘性境界層がうすい場合、非回転波の場合と同様の計算方法を用いることにする。

よって (b) を bottom, (com) を complement を意味するものとして、

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_1^{(b)}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_1^{(b)}}{\partial x} + \nu_1^{(b)} \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \nu_2 \frac{\partial^2 u_1^{(b)}}{\partial y^2} \quad \cdots \cdots \cdots (10)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial y} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_1^{(b)} &= u_1 + u_1^{(\text{com})} \\
 v_1^{(b)} &= v_1 + v_1^{(\text{com})} \\
 \psi_1^{(b)} &= \psi_1 + \psi_1^{(\text{com})}
 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

とおき、 u_1, v_1, ψ_1 は [II], [I] の 1 次近似と一致するものとする。

$$\text{もちろん } u_1^{(\text{com})} = -\frac{\partial \psi_1^{(\text{com})}}{\partial y}, \quad v_1^{(\text{com})} = \frac{\partial \psi_1^{(\text{com})}}{\partial x}$$

である。式 (11) は $\psi_1^{(b)}$ を用い満足され、式 (10) は

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial t \partial y} - U_0 \frac{\partial^2 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_1^{(\text{com})}}{\partial x} \frac{\partial U_0}{\partial y} \\
 & = -\nu_2 \frac{\partial^3 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial y^3} \quad \cdots \cdots \cdots (13)
 \end{aligned}$$

境界条件は

$$u_1^{(b)} = 0, \quad v_1^{(b)} = 0 \quad \text{at } y = -h \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

$$\psi_1^{(\text{com})} \rightarrow \infty \quad \text{at } y + h \gg 0 \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$\frac{g \sin \theta}{2\nu_1} = D, y + h = \eta$ として式 (13) は

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial t \partial \eta} + D \eta (2h - \eta) \frac{\partial^2 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial x \partial \eta} \\
 & + \frac{\partial \psi_1^{(\text{com})}}{\partial x} 2D(\eta - h) = \nu_2 \frac{\partial^3 \psi_1^{(\text{com})}}{\partial \eta^3} \quad \cdots \cdots \cdots (16)
 \end{aligned}$$

$\psi_1^{(\text{com})} = G(\eta) e^{im(x-ct)}, \frac{\eta}{h} = \eta_1, G = U_{00} h g$ を用いれば、式 (16) は

$$\begin{aligned}
 & (-imc) \frac{dg}{d\eta_1} + \eta_1 U_{00} (2 - \eta_1) im \frac{dg}{d\eta_1} \\
 & + img 2U_{00} (\eta_1 - 1) = \frac{\nu_2}{h^2} \frac{d^3 g}{d\eta_1^3} \quad \cdots \cdots \cdots (17)
 \end{aligned}$$

$\frac{c}{U_{00}} = c_1, \eta_1 = \epsilon \xi$ (ϵ を小さい量とし、 ξ は 1 の位数とする) により式 (17) は

$$\begin{aligned}
 & -c_1 \frac{dg}{d\xi} + \epsilon \xi (2 - \epsilon \xi) \frac{dg}{d\xi} + g \cdot 2\epsilon (\epsilon \xi - 1) \\
 & = \frac{\nu_2}{im U_{00} h^2 \epsilon^2} \frac{d^3 g}{d\xi^3} \quad \cdots \cdots \cdots (18)
 \end{aligned}$$

$\frac{\nu_2}{m U_{00} h^2} = \kappa, \epsilon = \kappa^{1/2}$ とおく。したがって $mh \rightarrow 0$ の極限ではこの近似法は用い得ない。式 (18) は

$$\begin{aligned}
 & -c_1 \frac{dg}{d\xi} + \epsilon \xi (2 - \epsilon \xi) \frac{dg}{d\xi} + g \cdot 2\epsilon (\epsilon \xi - 1) \\
 & = -i \frac{d^3 g}{d\xi^3} \quad \cdots \cdots \cdots (19)
 \end{aligned}$$

$g = g_0 + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \cdots$ により微小量 ϵ でせつ動する。

$$\frac{d^3 g_0}{d\xi^3} + c_1 i \frac{dg_0}{d\xi} = 0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{d^3 g_1}{d\xi^3} + c_1 i \frac{dg_1}{d\xi} - 2\xi i \frac{dg_0}{d\xi} + 2ig_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\frac{d^3 g_2}{d\xi^3} + c_1 i \frac{dg_2}{d\xi} - 2\xi i \frac{dg_1}{d\xi} + i\xi^2 \frac{dg_0}{d\xi} - 2\xi ig_0 + 2ig_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

境界条件は

$$-U_{00}h \frac{\partial g_0}{\partial y} \Big|_{y=-h} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} \Big|_{y=-h} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$-U_{00}h \frac{\partial g_1}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$-U_{00}h \frac{\partial g_2}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$g_0 \Big|_{y=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$g_1 \Big|_{y=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$g_2 \Big|_{y=-h} = 0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

この展開の特徴は2次近似まででは底付近の一般流の流速分布を直線と考えてよいことである。底付近の速度分布のもつ曲率の影響は3次近似(式(22))から入ってくる。以下 $c_1 < 0$ (実), すなわち流れに逆行する波として計算してゆく。

これを解くと

$$g_0 = \frac{F_1}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} (e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}\xi} + 1) \dots\dots\dots(29)$$

$$F_1 = \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$$

$$g_1 = -\frac{9}{2} \frac{F_1}{ic_1^2} + 2 \frac{F_1}{c_1} \frac{1}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} \xi$$

$$\begin{aligned} \psi_1^{(\text{com})} = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} \left\{ e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h) \right) \right. \\ & - \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right) \Big\} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \frac{U_{02}}{ch} \left\{ \frac{\nu_2}{cm} \frac{9}{2} \sin m(x-ct) \right. \\ & + 2 \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} (y+h) \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\nu_2}{cm} \frac{9}{2} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \sin m(x-ct) \\ & - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) + \frac{5}{2} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} (y+h) e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) + \frac{1}{2} (y+h)^2 e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right\} \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1^{(\text{com})} = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \\ & - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \frac{U_{00}}{ch} \left[2 \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{-\nu_2}{cm} \right)^{1/2} \frac{9}{2\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \right. \\ & \times \left\{ \sin \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) + \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right\} \\ & + \frac{5}{2} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \\ & - \frac{5}{2} (y+h) e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \\ & \left. + (y+h) e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2}(y+h)} \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{9}{2} \frac{F_1}{ic_1^2} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}\xi} + \frac{5}{2} \frac{F_1}{c_1} \frac{e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}\xi}}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} \xi \\ & - \frac{1}{2} \frac{F_1}{c_1} \xi^2 e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}\xi} \quad \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

式(30)の g_1 には定数項のほか ξ に linear な項が含まれている。この項の振舞は check しておく必要がある。

$$\begin{aligned} g_0 & \sim \frac{F_1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}}, \\ g_1 & \sim -\frac{9}{2} \frac{F_1}{ic_1^2} + 2 \frac{F_1}{c_1} \frac{1}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} \xi \end{aligned}$$

とすると、これに関連した g_2 の項を含めて、

$$\begin{aligned} & \{g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots\} \text{ concerned terms} \\ & \sim \frac{F_1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} + \varepsilon \left\{ -\frac{9}{2} \frac{F_1}{ic_1^2} \right. \\ & \left. + 2 \frac{F_1}{c_1} \frac{1}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} \xi \right\} \\ & + \varepsilon^2 \left\{ -\frac{F_1}{c_1} \frac{1}{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}(-c_1)^{1/2}} \xi^2 - \frac{F_1}{c_1^2} \frac{1}{(-c_1)^{1/2}} 9 \xi \right. \\ & \left. + \text{const.} \right\} + \dots\dots \end{aligned}$$

となり、 $\varepsilon \xi = \eta_1$ より式(30)は高次のせつ動項においても不合理を生じないことがわかる。

計算を行なうと、 $\psi_1^{(\text{com})}$, $u_1^{(\text{com})}$, $v_1^{(\text{com})}$ はつぎのようになる。ただし φ_1 は $\psi_1 = \varphi_1 e^{im(x-ct)}$ により定められる。

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (y+h)^2 \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h)} \left\{ \sin \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right. \\
& \left. - \cos \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right\} \dots\dots\dots (32) \\
v_1^{(\text{com})} = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} \left\{ -me^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h)} \sin \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \right. \\
& + m \sin \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right) \left. + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \frac{U_{00}}{ch} \left\{ \frac{\nu_2}{c} \frac{9}{2} \cos m(x-ct) \right. \right. \\
& - 2 \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} (y+h) m \sin \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\nu_2}{c} \frac{9}{2} e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h)} \times \cos \left(m(x-ct) \right. \\
& - \left. \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) - \frac{5}{2} m \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} (y+h) e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h)} \sin \left(m(x-ct) - \frac{\pi}{4} \right. \\
& - \left. \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) - \frac{1}{2} m (y+h)^2 e^{-\left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h)} \sin \left(m(x-ct) - \left(\frac{-mc}{2\nu_2} \right)^{1/2} (y+h) \right) \left. \right\} \dots\dots\dots (33)
\end{aligned}$$

式 (32), (33) を見れば境界層上端において, U_{00} に比例する振動項が $u_1^{(\text{com})}$, $v_1^{(\text{com})}$ に残る。これは一般流が存在するために現われた特性と考えられる。

以上により境界層方程式の 1 次近似解を得たから, これに viscous mass transport の効果を入れて底にかかるせん断力を考えて見よう。計算様式は M.S. Longuet-Higgins⁹⁾ にしたがう。

境界層上端の Reynolds stress は $y = -h + \delta$ で

$$\begin{aligned}
\tau &= -\rho (U_{00} + u_1 + u_1^{(\text{com})}) (v_1 + v_1^{(\text{com})}) \\
&= -\rho (u_1 + u_1^{(\text{com})}) v_1^{(\text{com})}
\end{aligned}$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}
\tau &\approx -\rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} m \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&+ \rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \frac{U_{00}}{ch} \frac{\nu_2}{c} \frac{9}{4} \\
&+ \rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \frac{U_{00}}{ch} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} \delta m \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\dots\dots\dots (34)
\end{aligned}$$

δ は波による境界層厚を示し, $\left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2}$ の位数であり, $-\frac{\nu_2}{c} \sim \delta^2 m$ であるから, 式 (34) の各項の相対的大きさは, 第 1 項 δm , 第 2 項 $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h} \delta m$, 第 3 項 $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h} \delta m$ となっている。

よって底にかかるせん断力のうち, 式 (9) の一般流によるものを除き, 波によるものを表わすと

$$\begin{aligned}
\tau_b &= \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \left(\frac{-mc}{\nu_2} \right)^{1/2} (-1) \cos \left(m(x-ct) \right. \\
&+ \left. \frac{\pi}{4} \right) - \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h} \frac{U_{00}}{ch} \frac{1}{2} \cos m(x-ct) \\
&- \rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} m \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&+ \rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \frac{U_{00}}{ch} \frac{\nu_2}{c} \frac{9}{4} \\
&+ \rho \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}^2 \frac{U_{00}}{ch} \left(-\frac{\nu_2}{mc} \right)^{1/2} \delta m \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

式 (35) の第 1 項と第 2 項とは式 (32) より求められ

たものであり, 相対的大きさは第 1 項 $\frac{1}{\delta}$, 第 2 項 $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h} \frac{1}{\delta}$ となり, 第 3~5 項におけると同様, 波に対する流れの interaction の項は底のせん断力においては $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h}$ の相対的大きさで表われることになる*。

式 (35) は通常の場合, 第 1~3 項で表わせば十分であり, そのうち第 2 項が流れの interaction の項, 第 3 項が viscous mass transport による項となる。そしてこの計算の一般流に対し波が逆方向に進む場合, 流れの interaction の項は第 1 項とは $\pi/4$ の位相差があるが, τ_b の絶対値の最大付近ではその大きさを減ずるように作用している。そしてその大きさは第 1 項に対し $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h}$ の位数である。

付記: 放物線型流速分布では $\left(\frac{dU_0}{dy} \right)_{y=-h} = \frac{2U_{00}}{h}$ であるから, $\frac{U_{00}}{c} \frac{\delta}{h}$ はこの場合, 底の波による境界層上端の一般流の流速と, 波の波速との比 (絶対値として考える) を示していることになる。式 (20), (21), (22) のせつ動の特性から考えると, たとえば一般流が底付近で対数則速度分布にしたがうとすれば, 波による境界層上端における流速と波の波速との比 (絶対値) は上述の計算の場合より相当大きくなり, 式 (35) 第 2 項に相当するものの具体的大きさは, 同じ平均流速のとき放物線型流速分布の場合よりも増加しそうである。

なお 図-1 の作製において加藤始君の協力を得た。

参 考 文 献

- 1) 浜田徳一・加藤 始: 流れをさかのぼる波についての 1 計算, 第 8 回海岸工学講習会講演集, 土木学会, 昭和 36.
- 2) 浜田徳一・加藤 始: 流れの中の有限振幅波の計算, 第 10 回海岸工学講演講習会集, 土木学会, 昭和 38.
- 3) Whitham, G.B.: Mass, momentum and energy flux

* 基本的には $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{y=-h}$ が一般流の影響を受けていることはいうまでもない。

in water waves, Journal of Fluid Mech., Vol. 12, 1962.

- 4) Laitone, E.V. : Limiting conditions for cnoidal and Stokes waves, Journal of Geophysical Res., Vol. 67, No. 4, 1962.
- 5) Longuet-Higgins, M.S. : Themechanics of the boundary layer near the bottom in a progressive wave, Proc. of 6th Conf. of Coastal Eng., 1958.

〔II〕 についての正誤表の一部訂正

ページ	行	誤	正
5	左 16	coth mh +	cosh $m_1 h$ +
を			
5	左 16	coth mh +	coth $m_1 h$ +