

# 長方形および扇形の港の副振動について

— フーリエ変換を用いた一解法 —

合 田 良 実\*

## 1. 港内副振動の問題点

港湾の設計および管理の上で注意すべき問題の一つに“副振動”または“サージング”がある。たとえば第二次大戦中には多数の商船が希望峯回りのコースを取って南アフリカのケープタウンの港に停泊地を求めたが、これらの商船のかなりがこの港に時折り現われる数分周期の長周期振動のために、もやい綱を切られて岸壁から逸走したり、揺れのたびに岸壁にぶつけられたりした<sup>1)</sup>。こうした港内の副振動による船舶ならびに接岸施設の被害は、このケープタウン港ばかりでなくアメリカ西岸のロスアンゼルス港<sup>2)</sup>、地中海のアルジェ港<sup>3)</sup>、東インドのマダラス港<sup>4)</sup>など世界各地の港で報告されている。わが国でも長崎港が振幅の大きな副振動に見舞われることで知られているが、幸いにして他の主要港湾ではあまりいちじるしい被害を聞かないようである。しかし船だまりや小規模の漁港などでは、時化の際の風浪によって誘発される副振動に悩まされているケースがあるのではないかと思われる。

こうした船舶や接岸施設の損傷をもたらす副振動の原因についてはいろいろな説があるが、直接には港口から侵入する長周期のうねりによって港内の水面が共振を起こすためと考えられる。さらには、こうして発生した副振動と、岸壁にけい留された船舶との間に第二次の共振が起こって被害を大きくすることも多い。しかし第一の問題は港内水面の共振現象で、特に問題となる港の共振スペクトルを求めることが必要になる。湖のように閉じた水面の場合は、その湖に固有な周期にしか共鳴しないが、港のように海に港口を開いている場合は、港口からの侵入波が常に港内に強制振動を誘発することになる。こうした強制振動の振幅は、来襲波の振幅ばかりでなくその周期にも関係し、特定の周期の近傍では来襲波の振幅の数倍にも増幅されることがある。特に振幅の増幅率が極大となる周期を“共振周期”と呼んでおく。共振周期から離れた所では増幅率も小さいのが普通である。一つの港の共振特性は、振幅の増幅率を縦軸に、来襲波の周期または周波数または港長と波長との比などを横軸に取ってプロットした曲線によって表わすことができる。こうした曲線をここでは“共振スペクトル”と呼んでお

く。

港の共振スペクトルの特徴は、それが振幅増幅率の極大値を結ぶ連続曲線となることで、これは不連続な孤立した共振周期でのピーク群で表われる湖の共振スペクトルと根本的に異なる点である。共振点における振幅増幅率の極大値も港の場合は有限の値にとどまり、湖のように無限大とはならない。これは港内の副振動が発達するとともに港口から海に向かって発散される“かく乱波”も増大するため、このかく乱波の持ち出すエネルギーが入射波のエネルギーとつり合った所で港内副振動の大きさが定まる。摩擦その他によるエネルギー損失があれば増幅率はこれよりも低くなる。

こうした港内の副振動の特性はまず Miles と Munk<sup>5)</sup>によって明らかにされたが、両者の理論は共振周期の近傍のスペクトルのみを扱うもので、特に港の幅が来襲波の波長にくらべてきわめて小さい場合に限られている。また高次共振点における増幅率などについてもやや疑問の点がある<sup>6)</sup>。港内副振動の解法で問題となるのは、港外へ発散されるかく乱波の取り扱いである。Miles と Munk は Hankel 関数を用いたが、フーリエ変換の方法を用いると比較的簡単にこのかく乱波の解を求めることができる。この結果、港内振動の解が求められる場合にはその港の完全な共振スペクトルを求めることも可能となる。以下に示すのは長方形と扇形状（円形ならびに三角状をふくむ）の港の共振スペクトルの解である。

## 2. 港外かく乱波の計算

計算を進めるにあたってつぎのような条件を仮定する。

- 水の粘性および圧縮性は無視できる。
- 海岸線は直線状に左右無限遠方まで延びている。
- 入射波は一定周期の微小振幅波で、海岸線に向かって直角に進んで来る。
- 海岸線および港の境界線では完全反射が起こる。
- 水深はいたる所一定である。
- 港口の幅は比較的小さく、港口における出入流はほぼ一様である。

以上の仮定によって速度ポテンシャル $\phi$ の存在は明らかであるから

\* 正員 M. S. 運輸省港湾技術研究所

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし座標原点は港口中央で、 $x$ 軸は海岸線に一致、 $y$ 軸は港外を正、 $z$ 軸は静水面から鉛直上方を正とする。この速度ポテンシャルをつぎのような形に仮定すると

$$\phi = \frac{1}{i\sigma} f(x, y) Z(z) e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (2)$$

(ただし  $\sigma = 2\pi/T$ ,  $T$  = 波の周期), 関数  $Z(z)$  は式(1)と底面における鉛直速度0の条件から双曲余弦関数の形に定まる。また静水面から測った水面変化  $\eta$  は次式で与えられる。

$$\eta = f(x, y) e^{i\sigma t} \dots\dots\dots (3)$$

すなわち  $f(x, y)$  は点  $(x, y)$  における振幅を表わし、これは式(3)を式(1)に代入して得られる次式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \dots\dots\dots (4)$$

の解として求められる。ただし  $k = 2\pi/L$  で  $L$  は波長である。

この波高分布関数  $f(x, y)$  に対する境界条件は、固定境界面で法線速度が0、および港口から無限に離れた所での水面形が海岸線に平行な完全重複波となることの二つである。したがって

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad |x| > d, \quad y = 0 \dots\dots\dots (5) \\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad y \leq 0 \quad (\text{港内境界線に沿って}) \dots\dots\dots (6) \end{array} \right.$$

$$f(x, y) = a \cos ky \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (7)$$

ただし  $a$  は重複波の振幅でこれは入射波の振幅の2倍である。また  $d$  は港口の半幅である。さらに、問題を港内と港外の二領域に分けて考えるため、港口においてつぎの二つの条件、すなわち法線速度ならびに水位変化が連続の条件を与える。そうすると

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial f_s}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial f_h}{\partial y} \right)_{y=0} \equiv kce^{i\omega} \dots\dots\dots (8) \\ |x| \leq d \end{array} \right.$$

$$\eta_s(x, 0) = \eta_h(x, 0) \dots\dots\dots (9)$$

ここで添字  $s$  は港外、 $h$  は港内を示す。 $c$  は水粒子の速度を示す未知定数で、仮定  $f$  によって  $x$  には関係しない。また  $\omega$  は港口振動流と港外完全重複波との間の位相差である。以上で港内および港外の二領域の境界条件は完全である。

つぎに港外における  $f_s(x, y)$  の解を考えると、まず基本方程式の式(4)が線型であり、また式(7)で示される完全重複波は式(5)を満足する所から、新たな未知関数  $f_r(x, y)$  を導入して

$$f_s(x, y) = a \cos ky + f_r(x, y) \dots\dots\dots (10)$$

と表わすことができる。この未知関数  $f_r(x, y)$  は港口から発散されるかく乱波の波高分布を与えるもので、基本方程式は式(4)、境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_r}{\partial y} = \begin{cases} kce^{i\omega} & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \quad y = 0 \dots\dots\dots (11) \\ f_r(x, y) = 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty \dots\dots\dots (12) \end{array} \right.$$

で表わされる。 $f_r(x, y)$  は半無限領域で定義されているから、フーリエ変換  $F(u, y)$

$$F(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_r(x, y) dx$$

を使うと式(4)が

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (k^2 - u^2)F = 0$$

と書き直される。この一般解は

$$F(u, y) = C_1(u) e^{\sqrt{u^2 - k^2} y} + C_2(u) e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y}$$

で、ここに  $C_1(u)$ ,  $C_2(u)$  は  $u$  を変数とする積分定数である。これらの積分定数は、 $|u| > k$  に関しては式(12)の条件から  $C_1 = 0$  が導かれ、 $|u| < k$  についても第一項が入射波を表わすことになるので  $C_1 = 0$  とおくことができ、残る  $C_2(u)$  が式(11)から求められる。この結果を  $f_r(x, y)$  にもどすと、

$$f_r(x, y) = \frac{2kce^{i\omega}}{\pi} \left\{ \int_0^k \frac{\sin ud}{u\sqrt{k^2 - u^2}} \cos ux e^{-i\sqrt{k^2 - u^2} y} du - \int_k^\infty \frac{\sin ud}{u\sqrt{u^2 - k^2}} \cos ux e^{-\sqrt{u^2 - k^2} y} du \right\} \dots\dots\dots (13)$$

と  $f_r(x, y)$  が求められる。

以上によって港外の水面形は未知定数  $c$  と位相差  $\omega$  の関数として求められた。この  $c$  と  $\omega$  を定めるには港口における水面変化を知る必要がある。ここでは後に述べる理由から、 $f_r(x, y)$  の港口に沿っての平均値を求めておく。

$$\overline{f_r(x, 0)} = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d f_r(x, 0) dx = ce^{i\omega} [i\psi_1 - \psi_2] \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$\psi_1 = \psi_1(kd) = \frac{2}{\pi} \int_0^{kd} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{(kd)^2 - \alpha^2}} d\alpha \dots\dots\dots (15)$$

$$\psi_2 = \psi_2(kd) = \frac{2}{\pi} \int_{kd}^\infty \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - (kd)^2}} d\alpha \dots\dots\dots (16)$$

この式(15), (16)で与えられる  $\psi_1, \psi_2$  は  $kd$  の関数で数値積分の結果では表-1の値を取り、また  $kd \ll 1$  の範囲ではつぎの式で近似される<sup>6)</sup>。

$$\psi_1(kd) = kd + O(k^3 d^3) \dots\dots\dots (15)'$$

$$\psi_2(kd) = \frac{2}{\pi} kd \left[ \frac{3}{2} - \gamma + \log_0 kd \right] + O(k^3 d^2) \dots\dots\dots (16)'$$

ただし  $\gamma$  はオイラーの定数で  $0.5722 \dots$  である。

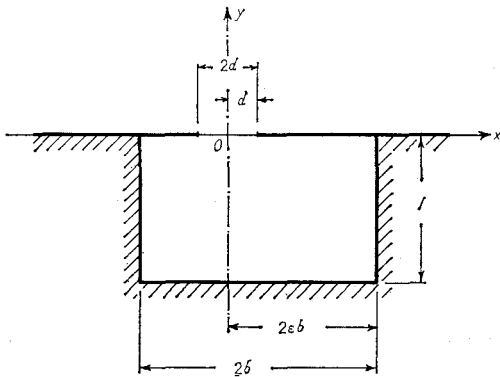
### 3. 長方形港における副振動

長形状の港は一般に 図-1 のように、幅  $2b$ 、奥行

表-1

$kd$	$\psi_1(kd)$	$\psi_2(kd)$
0.05	0.0500	0.1247
0.10	0.0998	0.2053
0.15	0.1494	0.2679
0.20	0.1987	0.3199
0.25	0.2474	0.3633
0.30	0.2955	0.3997
0.35	0.3429	0.4297
0.40	0.3895	0.4550
0.45	0.4351	0.4756
0.50	0.4797	0.4921
0.55	0.5231	0.5047
0.60	0.5653	0.5140
0.65	0.6061	0.5200
0.70	0.6456	0.5232
0.75	0.6835	0.5237
0.80	0.7199	0.5217
0.85	0.7547	0.5175
0.90	0.7879	0.5113
0.95	0.8193	0.5032
1.00	0.8490	0.4935
1.10	0.9032	0.4696
1.20	0.9501	0.4411
1.30	0.9899	0.4091
1.40	1.0226	0.3749
1.50	1.0485	0.3394
1.60	1.0679	0.3036

図-1 長方形港図



l, 港口幅 2d, および港口の相対位置 ε でその形を表わすことができる。この港に対する  $f_h(x, y)$  の境界条件は,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_h}{\partial y} = \begin{cases} kce^{i\omega} & \dots |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} & y=0 \dots\dots(17) \\ \frac{\partial f_h}{\partial y} = 0 & -2(1-\varepsilon)b \leq x \leq 2\varepsilon b, y=-l \quad (18) \\ \frac{\partial f_h}{\partial x} = 0 & x=-2(1-\varepsilon)b \text{ および } 2\varepsilon b \dots(19) \\ & -l \leq y \leq 0 \end{cases}$$

である。このように、 $f_h(x, y)$  は港内境界線上でその法線微分が完全に指定されているから、 $f_h(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  の変数分離の形を仮定することにより、式(4)と、式(18)、(19)とから

$$f_h(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \left[ \frac{n\pi}{2b} (x - 2\varepsilon b) \right] \times \cosh [\beta_n k (y + l)]$$

を得る。これを式(17)に代入すれば、フーリエ級数の公式から  $A_n$  が一義的に定まって、 $f_h(x, y)$  がつぎのように求められる。

$$f_h(x, y) = -\frac{cd e^{i\omega}}{b \sin kl} [\cos k(y+l) - S(x, y)] \dots\dots(20)$$

ただし

$$S(x, y) = -\frac{4b \sin kl}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \varepsilon n\pi}{n\beta_n \sinh \beta_n kl} \times \cos \frac{n\pi}{2b} (x - 2\varepsilon b) \cosh \beta_n k (y + l) \right\} \dots(21)$$

$$\beta_n = \sqrt{\left( \frac{n\pi}{kb} \right)^2 - 1} \dots\dots(22)$$

この式(20)は港内の任意の点の振幅を与えるものであるが、そのためには未知数の  $c$  と  $\omega$  を求めなければならない。これは港内外の水面上昇  $\eta$  が港口において一致する条件の式(9)から定められる。しかし、港口におけるすべての点で  $\eta$  を一致させることはむずかしいので、港口に沿っての平均水位変化  $\bar{\eta}(x, 0)$  で式(9)を近似させる。海側の平均水位変化は式(3)、(10)、および(14)とから

$$\bar{\eta}_s(x, 0) = a e^{i\sigma t} + c [i\psi_1 - \psi_2] e^{i(\sigma t + \omega)} \dots\dots(23)$$

で与えられる。港内側の平均水位変化は式(3)と式(20)とから

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_h(x, 0) &= \frac{e^{i(\sigma t + \omega)}}{2d} \int_{-d}^d f_h(x, 0) dx \\ &= -\frac{cd e^{i(\sigma t + \omega)}}{b} [\cot kl - S_1] \dots\dots(24) \end{aligned}$$

ただし

$$S_1 = 8 \left( \frac{b}{\pi d} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \varepsilon n\pi}{n^2 \beta_n \tanh \beta_n kl} \right)^2 \dots\dots(25)$$

で与えられる。この式(23)、(24)を式(9)に代入すると、

$$\begin{aligned} a e^{i\sigma t} + c e^{i(\sigma t + \omega)} [i\psi_1 - \psi_2] \\ = -\frac{cb}{d} e^{i(\sigma t + \omega)} [\cot kl - S_1] \end{aligned}$$

の条件式が得られるが、この式は複素変数に関する方程式なので、その実数部と虚数部を分離すれば  $c$  と  $\omega$  に関する連立方程式が導かれる。したがってそれを解いて

$$c = \sqrt{\frac{a}{\left[ \frac{d}{b} (\cot kl - S_1) - \psi_2 \right]^2 + \psi_1^2}} \dots\dots(26)$$

$$\omega = -\tan^{-1} \frac{\psi_1}{\frac{d}{b} (\cot kl - S_1) - \psi_2} \dots\dots(27)$$

と、未知数  $c$  と  $\omega$  が一義的に決定される。

この式(26)と式(27)を今までに求めた水位変化の式に代入すれば、長方形港の港内副振動と港外の海面状況が完全に求められることになる。しかし港内副振動の問題で最も興味のあるのは、その振幅増幅率である。港内振幅の代表値として、陸側の隅角点 ( $x=2sb, y=-l$ ) の振幅を用いて振幅増幅率  $M$  を定義すると、これは式(3)、(22)、および(27)とから

$$M = \frac{|1 - S_2|}{\sqrt{\left[ \cos kl - \left( S_1 + \frac{b}{d} \phi_2 \right) \sin kl \right]^2 + \left( \frac{b}{d} \phi_1 \sin kl \right)^2}} \dots\dots\dots(28)$$

で与えられる。ただしここに

$$S_2 = \frac{4b}{\pi d} \sin kl \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi d}{2b} \cos \varepsilon n\pi}{n \beta_n \sinh \beta_n kl} \dots\dots(29)$$

この式(28)による振幅増幅率の計算は、二つの無限級数  $S_1$  と  $S_2$ 、および二つの積分関数  $\phi_1$  と  $\phi_2$  がふくまれていることのために、一般には電子計算機の使用が必要である。

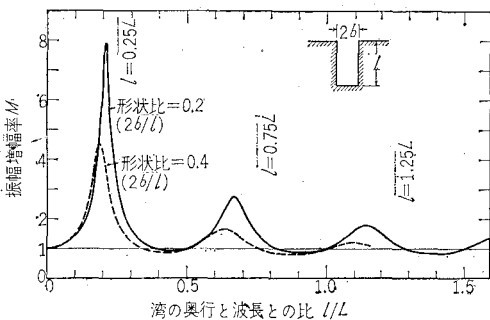
4. 長方形港の副振動の二、三の特性

まず最も簡単な例として、港口が完全に開いた場合、または長方形湾の場合を考える。式(25)、(29)に  $\varepsilon=1/2$ 、 $d=b$  を代入すれば明かなように、無限級数  $S_1$  と  $S_2$  はともに0となる。したがって式(28)は

$$M = \frac{1}{\sqrt{(\cos kl - \phi_2 \sin kl)^2 + \phi_1^2 \sin^2 kl}} \dots\dots(30)$$

と簡略化される。この振幅増幅率を、形状比  $2b/l$  が0.2と0.4の細長い湾の場合について計算すると、その共振スペクトルが図-2のように求められる。この図で

図-2 細長い長方形湾の共振スペクトル



明かなように、振幅の増幅率は第一共振点で最大で、第二共振点の増幅率はその約1/2、第三共振点ではさらに小さな値となる。また湾の幅が広いと共振点の増幅率が小さくなる。

共振周期を見ると、細長い長方形湾は通常良く、湾長

が波長の1/4倍、3/4倍、……の時、または

$$\frac{l}{L} = \frac{2m+1}{4}, \quad m=0, 1, 2, \dots\dots\dots(31)$$

の時に共振する''といわれるが、図に見るように共振を起こすのはこれよりも波長が幾分長い時である。この差は、湾が広い方が大きく、また高次の共振点に移るほど大きくなる。細長い長方形湾の共振特性は、式(15)'、(16)'を使って式(30)から近似的につぎのように表わすことができる。

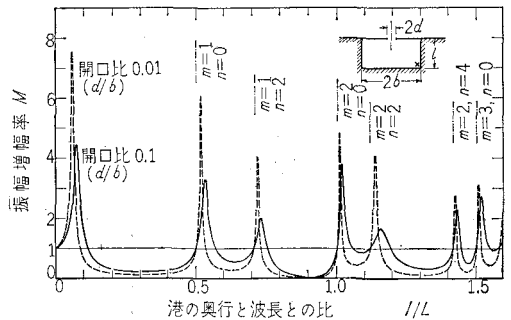
$$\left(\frac{l}{L}\right)_o \approx \frac{2m+1}{4} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{b}{L} \left( \frac{3}{2} - \gamma - \log_e \frac{2\pi b}{L} \right) \dots\dots(32)$$

$$M_o \approx \frac{1}{kb} \approx \frac{4}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{l}{2b} \dots\dots\dots(33)$$

ただし添字  $o$  は共振点の値を指す。この式(32)は、Honda, その他<sup>7)</sup>の結果と同一である。

幅の広い長方形港の計算例は図-3に示すとおりで、形状比  $2b/l$  が2の時には、湾の奥行が波長の1.59倍以下の範囲で7個の共振点が見出される。これらの共振点は完全閉塞の長方形湖の共振点<sup>8)</sup>

図-3 幅の広い長方形港(2b/l=2)の共振スペクトル



$$\frac{l}{L} = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{(2b/l)^2}} \quad m, n=0, 1, 2, \dots\dots(34)$$

で近似されるが、式(34)の値の所では増幅率が1であって、増幅率が極大となるのは式(34)で与えられる値よりも波長がやや短い波の時である。図-3には、港口が港の幅の10%と1%の時の共振スペクトルが示されているが、港口がせばまるにつれて共振点のピークが鋭くなり、長方形湖のような不連続スペクトルの形に近づくのが認められる。ここで注意すべきは、港口がせばまるにつれて共振点の増幅率が高まることで、これは Miles と Munk が''港湾のパラドックス''として指摘したものである。ただ実際には、底面摩擦や港口付近の渦によるエネルギー損失があり、また港内副振動を誘発する長周期波も一定周期の規則波ではなく、むしろ連続スペクトルを持った不規則波と見なされる。このため実際の港では港口をせばめた方が港内副振動を静めるのに効果があると考えられる。しかし港の設計にあたっては、ある程度以上のエネルギー損失がなければ港口縮小が逆効果

となることに留意すべきである。また模型実験では摩擦の効果が実際よりも強調されるから、その結果を現地に適用するにはこの点を注意する必要がある。

図-3は港口が港の中央にある対称形の場合であるが、港口が港の中央から離れた位置にある非対称形の港についても多数の数値計算が行なわれ、これらの結果はMITのHydrodynamics Laboratoryにおける実験値と良い一致を示している<sup>9)</sup>。

### 5. 扇形港における副振動

つぎに図-4で示されるような扇形の港を考えると、開口角 $2\alpha$ が十分に小さければ、円弧状の港口を直線で近似させることができる。したがって長方形港と同じように、式(8)と式(9)を使って港内と港外を分離できる。扇形港の場合には、港内に関して原点を頂点 $P$ に取った極座標 $(r, \theta)$ を用いるのが便利である。そうすると波高分布関数の基本方程式(4)はつぎのように書き直される。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + k^2 f = 0 \dots\dots\dots (35)$$

また港内の境界条件は、

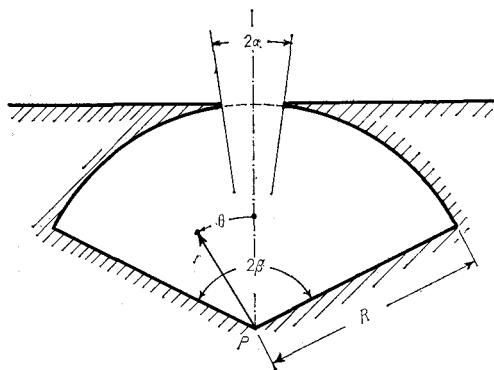
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = \begin{cases} kce^{i\omega t} & r=R \quad |\theta| \leq \alpha \\ 0 & r=R \quad \alpha < |\theta| \leq \beta \end{cases} \dots\dots (36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 & 0 < r \leq R \quad \theta = \pm\beta \dots\dots\dots (37) \end{cases}$$

で表わされる。ただし $\alpha \ll 1$ と仮定する。

式(35)を解くため、波高分布関数 $f(r, \theta)$ を $f(r, \theta) = G(r) \cdot H(\theta)$ と変数分離の形に仮定すると、 $H(\theta)$ が式(37)の条件から

図-4 扇形港



$$H(\theta) = \cos \frac{n\pi\theta}{\beta}$$

と定まり、 $G(r)$ は次数 $p = n\pi/\beta$ のベッセルの微分方程式の解として

$$G(r) = C_n J_p(kr) + D_n Y_p(kr)$$

と求められる。ここで $J_p, Y_p$ は次数 $p$ の第一種および

第二種の円筒関数である。この $Y_p$ は原点で負の無限大となるが、共振点はさておきそれ以外の周期に対しては $P$ 点の水位振幅は有限であるから、積分定数は0でなければならない。これは半頂角 $\beta$ が $\pi$ となった円形港の場合を考えると明らかである。この結果、波高分布関数が

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_p(kr) \cos \frac{n\pi\theta}{\beta} \dots\dots\dots (38)$$

と表わされ、これを式(36)に代入して $C_n$ を定めると、港内副振動の水位変化 $\eta_h$ がつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \eta_h(r, \theta) = & c e^{i(\sigma t + \omega)} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \frac{J_0(kr)}{J_0'(kR)} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{J_p(kr)}{J_p'(kR)} \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} \cos \frac{n\pi\theta}{\beta} \right\} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ただし $p = n\pi/\beta$ である。

港口に沿っての平均水位変化は、 $r=R$ で式(39)を積分して

$$\overline{\eta_h(R, \theta)} = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \eta_h(R, \theta) d\theta = \frac{c\alpha}{\beta} K e^{i(\sigma t + \omega)} \dots\dots\dots (40)$$

と求められる。ただし、

$$\begin{aligned} K = & \frac{J_0(kR)}{J_0'(kR)} + 2 \left( \frac{\beta}{\alpha\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p(kR)}{J_p'(kR)} \\ & \times \left( \frac{\sin \frac{n\pi\alpha}{\beta}}{n} \right)^2 \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

である。式(40)は $r=R$ の円弧に沿っての平均値であるが、開口角 $\alpha$ が十分に小さければ原座標の $x$ 軸上の平均値と見なすことができる。したがって式(40)と式(20)を式(9)に代入し、長方形港の場合と同じように未知数の $c$ と $\omega$ をつぎのように求めることができる。すなわち

$$c = \frac{a}{\sqrt{\psi_1^2 + \left( \psi_2 + \frac{\alpha}{\beta} K \right)^2}} \dots\dots\dots (42)$$

$$\omega = \tan^{-1} \frac{\psi_1}{\psi_2 + \frac{\alpha}{\beta} K} \dots\dots\dots (43)$$

港内の水位変化はこの式(42), (43)を式(39)に代入することにより、港外の水位変化は同じく式(13)に代入し式(10), (3)と組み合わせることによって計算できる。

なお以上の計算では半頂角 $\beta$ に何の制限も設けていない。したがって $\beta = \pi$ とおけば、これは円形港のケースを表わし、 $\beta = \alpha \ll 1$ と取れば、これは頂角の小さな三角港のケースを示すことになる。

### 6. 三角港の副振動の二、三の特性

頂角 $2\beta$ が開口角 $2\alpha$ に等しい三角港の場合には、 $\sin(n\pi\alpha/\beta)$ が常に0となるので式(39)にふくまれている無限級数の項が脱落する。したがって副振動の水位変化は

$$\eta_h = \frac{a J_0(kR) e^{i(\sigma t + \omega)}}{J_1(kR) \sqrt{\psi_1(\alpha kR)^2 + \psi_2(\alpha kR)^2}} \cdot \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} \dots (44)$$

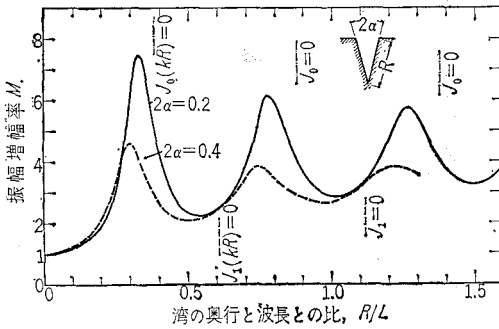
で表わされる。 $J_0(x)$  の最大値は、 $x=0$  における  $J_0(0)=1$  であるから、三角状の港内における副振動は  $p$  点で振幅最大である。したがってこの点の振幅で増幅率を定義すると、これはつぎのようになる。

$$M = \frac{1}{\sqrt{[\psi_1(\alpha kR) J_1(kR)]^2 + [\psi_2(\alpha kR) J_1(kR)]^2} - J_0(kR)^2} \dots (45)$$

この式(45)の振幅増幅率でまず明らかなのは、増幅率が決して無限大とならないことである。幅の次第にせまくなる水路の進行波では、波高が水路幅の  $1/2$  乗に逆比例するとされている。したがって三角港のように幅が  $0$  となる場合には波高が無限大となるようにも考えられる。しかしこれは進行波に対する近似解であり、三角港のように一端が閉じて重複波を形成する場合には適用されず、波高無限大と見るのは誤りである。

式(45)による振幅増幅率の計算は、表-1の  $\psi_1$  と  $\psi_2$  の値を使って比較的簡単に行なうことができる。図-5は、開口角  $2\alpha=0.2$  と  $0.4$  (角度では  $11.4^\circ$  と  $22.8^\circ$ ) の場合の計算結果である。まず図-2の長方形湾と同じように、幅が広いと共振点の増幅率が小さくなるのが認

図-5 三角港の共振スペクトル



められる。また共振点の次数が増すにつれて極大値と極小値の幅が減少するのも長方形湾のケースと同様である。しかし三角港の場合には、入射波の波長が短くなるにつれて増幅率の極小値が増大するのが大きな特徴である。

図中に短い一点鎖線で示したのは  $J_0(kR)=0$ 、破線は  $J_1(kR)=0$  の点である。 $J_1=0$  の点では、式(45)で明らかなように、 $M=1/J_0$  と増幅率が開口角に無関係となる。 $J_0(kR)$  の極大値の絶対値は  $kR$  が増大するに

つれて減少するから、波長が短くなるにつれて  $J_1=0$  における振幅増幅率が上昇することにある。また共振点に関しては、 $J_0(kR)=0$  が長方形湾の場合の式(32)に相当するのが認められる。この両者は港口における振幅が  $0$  の条件を示すもので、ともに湾の幅または開口角が小さい時に良い近似値を与えるが、幅が増すにつれ、または共振点の次数が増すにつれて、波長のより長い方へ共振点が移ること示している。

7. 結 語

長方形湾および扇形港の港内に誘発される副振動は、以上に明らかなように数値計算によってその完全な共振スペクトルを求めることができる。ただし完全開口のケースをのぞいては、数値計算に電子計算機が必要と考えられる。

なお本研究のうち、長方形港に関する部分は、MITの Hydrodynamics Laboratory で Ippen 教授の指導の下に行なわれ、A. S. C. E. に投稿中のものの一部である。発表を許可された同教授ならびに MIT 当局に謝意を表する次第である。また表-1および図-2, 3は、MIT 計算センターの IBM 7090 を用いて計算したものである。

参 考 文 献

- 1) Wilson, B. W. : Model Study of Surge Action in a Port, The A. and M. College of Texas, Department of Oceanography and Meteorology, Tech. Report No. 24-(57), December, 1960.
- 2) Carr, J. H. : Long Period Waves or Surges in Harbors, Transactions, A. S. C. E., Vol. 188, pp. 588-616, 1953.
- 3) Larras, M. : XIXth International Navigation Congress, Section II, Communication I, London pp. 63-74, 1957.
- 4) Joglekar, P. V. and Kulkarni, P. K. : XIXth International Navigation Congress, Section II, Communication I, London, pp. 95-117, 1957.
- 5) Miles, J. and Munk, W. : "Harbor Paradox", Proc. A. S. C. E. No. WW 3, August, 1961.
- 6) Ippen, A. T. and Goda, Y. : Wave Induced Oscillations in Harbors: Solution of a Rectangular Harbor Connected to the Open Sea, Massachusetts Institute of Technology, Hydrodynamics Laboratory, Report No. 59, July, 1963.
- 7) Honda, K., Terada, T., and Ishitani, D. : On the Secondary Undulations of Oceanic Tides, Philosophical Magazine, Vol. 15, pp. 88-126, 1908.
- 8) Lamb, H. : Hydrodynamics (6th Edition) Dover, New York, 1932.