流水の中の有限振幅波の計算

浜田徳一*・加藤 始**

1. 1961年筆者は放物線型流速分布をした流れの中の進行波につき，比較的こまかく性質を調べたが[1] その後 B. Benjamin[2] は任意の流速分布の流れのある時の孤立波につき計算し，また M.S. Longuet-Higgins および R.W. Stewart[3),4] は radiation stress による不等流の流れと波との間のエネルギー受授について計算した。今回の計算は，流れの流速分布が一様でない場合について，その中を進行する有限振幅波の計算をせつ動法により行なったものである。

問題は2次元非粘性とし，無せつ動の場合の自由表面を x 軸とする。y 軸を垂直上向きにとり，$y=-h$ に水平な固定床を考える。$U_0(y)(>0)$ を一般流とし，u, v, η, p などの記号の意味は通常用いられるものと同様である。

運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u+U_0)\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}(u+U_0)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(u+U_0)\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \cdots\cdots(2)$$

連続方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

表面条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+(u+U_0)\frac{\partial \eta}{\partial x}=v \qquad at\ y=\eta \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+(u+U_0)\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}=0 \quad at\ y=\eta \quad \cdots(5)$$

底の境界条件は

$$v=0 \qquad at\ y=-h \quad \cdots\cdots(6)$$

流関数 ψ を考え，今の場合 $\psi=\psi(x-ct, y)$ とする（以下計算例では $c<0$ の場合を主として取り扱ったが，$c>0$ の場合も $c=U_0$ をのぞけば，同様に取扱い得る）。

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \cdots\cdots(7)$$

である。式(1)～(7)を用い，使用方程式および境界条件はつぎのようにおくことができる。

$$\left(c+\frac{\partial \psi}{\partial y}-U_0\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(U_0-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\left(-c-\frac{\partial \psi}{\partial y}-U_0\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\left(c+\frac{\partial \psi}{\partial y}+U_0\right)\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}-\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}\right)=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\left(-c-\frac{\partial \psi}{\partial y}+U_0\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad at\ y=\eta \quad \cdots(11)$$

$$(-c+U_0)\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(c+\frac{\partial \psi}{\partial y}-U_0\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}+\rho\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(U_0-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)-\rho\frac{\partial \psi}{\partial x}g-\rho\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(-c-\frac{\partial \psi}{\partial y}+U_0\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}-\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=0$$

$$at\ y=\eta \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \qquad at\ y=-h \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi&=\alpha\psi_1+\alpha^2\psi_2+\alpha^3\psi_3+\cdots\cdots \\ \eta&=\alpha\eta_1+\alpha^2\eta_2+\alpha^3\eta_3+\cdots\cdots \\ c&=c_0+\alpha c_1+\alpha^2 c_2+\alpha^3 c_3+\cdots\cdots \\ p&=-\rho g y+\alpha p_1+\alpha^2 p_2+\alpha^3 p_3+\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

を用い式(8)～(13)につき α についてのせつ動を行なう。この際式(11)，(12)の $y=\eta$ での条件は $y=0$ を中心として展開し，$y=0$ におけるせつ動表面条件とする。

式(8)は $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ につきそれぞれ

$$c_0\psi_{1xy}-U_0\psi_{1xy}+\psi_{1x}U_{0y}=-\frac{p_{1x}}{\rho} \quad \cdots\cdots(15.1)$$

$$c_1\psi_{1xy}+\psi_{1y}\psi_{1xy}+c_0\psi_{2xy}-U_0\psi_{2xy}+\psi_{2x}U_{0y}-\psi_{1x}\ \psi_{1yy}=-\frac{p_{2x}}{\rho} \quad \cdots\cdots(15.2)$$

$$c_2\psi_{1xy}+\psi_{2y}\psi_{1xy}+c_1\psi_{2xy}+\psi_{1y}\psi_{2xy}+c_0\psi_{3xy}-U_0\psi_{3xy}+\psi_{3x}U_{0y}-\psi_{2x}\psi_{1yy}-\psi_{1x}\psi_{2yy}=-\frac{p_{3x}}{\rho} \quad \cdots\cdots(15.3)$$

式(9)は同様にして

$$(U_0-c_0)\psi_{1xx}=-\frac{p_{1y}}{\rho} \quad \cdots\cdots(16.1)$$

$$-c_1\psi_{1xx}+(U_0-c_0)\psi_{2xx}-\psi_{1y}\psi_{1xx}+\psi_{1x}\psi_{1xy}=-\frac{p_{2y}}{\rho} \quad \cdots\cdots(16.2)$$

$$-c_2\psi_{1xx}-c_1\psi_{2xx}+(U_0-c_0)\psi_{3xx}-\psi_{1y}\psi_{2xx}-\psi_{2y}\psi_{1xx}+\psi_{1x}\psi_{2xy}+\psi_{2x}\psi_{1xy}=-\frac{p_{3y}}{\rho} \quad \cdots(16.3)$$

* 正員 工博 運輸省港湾技術研究所
** 正員 同 上

式(10)は

$$c_0\phi_{1xyy}-U_0\phi_{1xyy}+c_0\phi_{1xxx}-U_0\phi_{1xxx}+U_{0yy}\phi_{1x}=0 \quad\cdots\cdots(17.1)$$

$$c_1\phi_{1xyy}+\phi_{1y}\phi_{1xyy}+c_0\phi_{2xyy}-U_0\phi_{2xyy}+c_1\phi_{1xxx}+\phi_{1y}\phi_{1xxx}+c_0\phi_{2xxx}-U_0\phi_{2xxx}-\phi_{1yyy}\phi_{1x}-\phi_{1xxy}\phi_{1x}+U_{0yy}\phi_{2x}=0 \quad\cdots\cdots(17.2)$$

$$c_2\phi_{1xyy}+\phi_{2y}\phi_{1xyy}+c_1\phi_{2xyy}+\phi_{1y}\phi_{2xyy}+c_0\phi_{3xyy}-U_0\phi_{3xyy}+c_2\phi_{1xxx}+\phi_{2y}\phi_{1xxx}+c_1\phi_{2xxx}+\phi_{1y}\phi_{2xxx}+c_0\phi_{3xxx}-U_0\phi_{3xxx}-\phi_{2yyy}\phi_{1x}-\phi_{2xxy}\phi_{1x}-\phi_{1yyy}\phi_{2x}-\phi_{1xxy}\phi_{2x}+U_{0yy}\phi_{3x}=0 \quad\cdots\cdots(17.3)$$

式(11)は

$$-c_0\eta_{1x}+U_0(0)\eta_{1x}=\phi_{1x}(0) \quad at\ y=0\cdots(18.1)$$

$$-c_1\eta_{1x}-\phi_{1y}(0)\eta_{1x}+U_{0y}(0)\eta_1\eta_{1x}-c_0\eta_{2x}+U_0(0)\eta_{2x}=\phi_{1xy}(0)\eta_1+\phi_{2x}(0) \quad at\ y=0 \quad\cdots\cdots(18.2)$$

$$-c_2\eta_{1x}-\phi_{1yy}(0)\eta_1\eta_{1x}-\phi_{2y}(0)\eta_{1x}+U_{0y}(0)\eta_{1x}\eta_2+\frac{U_{0yy}(0)}{2}\eta_1^2\eta_{1x}-c_1\eta_{2x}-\phi_{1y}(0)\eta_{2x}+U_{0y}(0)\eta_1\eta_{2x}-c_0\eta_{3x}+U_0(0)\eta_{3x}=\phi_{1xy}(0)\eta_2+\frac{\phi_{1xyy}(0)}{2}\eta_1^2+\phi_{2xy}(0)\eta_1+\phi_{3x}(0) \quad at\ y=0\cdots\cdots(18.3)$$

式(12)は

$$-c_0p_{1x}(0)+U_0(0)p_{1x}(0)-\rho g\phi_{1x}(0)=0 \quad at\ y=0\cdots\cdots(19.1)$$

$$-c_1p_{1x}(0)-c_0p_{1xy}(0)\eta_1-c_0p_{2x}(0)+U_{0y}(0)p_{1x}(0)\eta_1+U_0(0)p_{1xy}(0)\eta_1+U_0(0)p_{2x}(0)+\rho c_0\phi_{1y}(0)\phi_{1xy}(0)-\rho U_0(0)\phi_{1y}(0)\phi_{1xy}(0)+\rho U_{0y}(0)\phi_{1y}(0)\phi_{1x}(0)-\rho\phi_{1xy}(0)\eta_1 g-\rho\phi_{2x}(0)g+\rho c_0\phi_{1x}(0)\phi_{1xx}(0)-\rho U_0(0)\phi_{1x}(0)\phi_{1xx}(0)=0 \quad at\ y=0\cdots(19.2)$$

$$\begin{aligned}&-c_2p_{1x}(0)-c_1p_{1xy}(0)\eta_1-c_0p_{1xy}(0)\eta_2-\frac{c_0}{2}p_{1xyy}(0)\eta_1^2-c_1p_{2x}(0)-c_0p_{2xy}(0)\eta_1\\&-c_0p_{3x}(0)+U_{0y}(0)p_{1x}(0)\eta_2+\frac{U_{0yy}(0)}{2}p_{1x}(0)\eta_1^2\\&+U_{0y}(0)p_{1xy}(0)\eta_1^2+U_0(0)p_{1xy}(0)\eta_2+U_0(0)\\&\frac{p_{1xyy}(0)}{2}\eta^2{}_1+U_{0y}(0)p_{2x}(0)\eta_1+U_0(0)p_{2xy}(0)\eta_1\\&+U_0(0)p_{3x}(0)+\rho c_0\phi_{1yy}(0)\phi_{1xy}(0)\eta_1\\&+\rho c_0\phi_{2y}(0)\phi_{1xy}(0)+\rho\phi_{1y}(0)c_1\phi_{1xy}(0)\\&+\rho\phi_{1y}^2(0)\phi_{1xy}(0)-\rho U_0(0)\phi_{1yy}(0)\phi_{1xy}(0)\eta_1\\&-\rho U_0(0)\phi_{2y}(0)\phi_{1xy}(0)\\&-\rho U_{0y}(0)\phi_{1y}(0)\eta_1\phi_{1xy}(0)+\rho c_0\phi_{1y}(0)\phi_{1xyy}(0)\eta_1\\&-\rho U_0(0)\phi_{1y}(0)\phi_{1xyy}(0)\eta_1+\rho c_0\phi_{1y}(0)\phi_{2xy}(0)\\&-\rho U_0(0)\phi_{1y}(0)\phi_{2xy}(0)\\&+\rho U_{0y}(0)\phi_{1yy}(0)\phi_{1x}(0)\eta_1\\&+\rho U_{0y}(0)\phi_{2y}(0)\phi_{1x}(0)+\rho U_{0y}(0)\phi_{1y}(0)\phi_{1xy}(0)\eta_1\\&+\rho U_{0y}(0)\phi_{1y}(0)\phi_{2x}(0)\\&+\rho\phi_{1y}(0)\phi_{1x}(0)U_{0yy}(0)\eta_1-\rho\phi_{1y}(0)\phi_{1x}(0)\phi_{1yy}(0)\\&-\rho\phi_{1xy}(0)\eta_2 g-\rho\frac{\phi_{1xyy}(0)}{2}\eta_1^2 g-\rho\phi_{2xy}(0)\eta_1 g\\&-\rho\phi_{3x}(0)g+\rho c_0\phi_{1xy}(0)\phi_{1xx}(0)\eta_1\\&+\rho c_0\phi_{2x}(0)\phi_{1xx}(0)+\rho c_0\phi_{1x}(0)\phi_{1xxy}(0)\eta_1\\&+\rho c_0\phi_{1x}(0)\phi_{2xx}(0)+\rho c_1\phi_{1x}(0)\phi_{1xx}(0)\\&+\rho\phi_{1x}(0)\phi_{1y}(0)\phi_{1xx}(0)\\&-\rho U_0(0)\phi_{1xy}(0)\phi_{1xx}(0)\eta_1\\&-\rho U_0(0)\phi_{2x}(0)\phi_{1xx}(0)\\&-\rho U_0(0)\phi_{1x}(0)\phi_{1xxy}(0)\eta_1\\&-\rho U_0(0)\phi_{1x}(0)\phi_{2xx}(0)\\&-\rho U_{0y}(0)\phi_{1x}(0)\phi_{1xx}(0)\eta_1-\rho\phi^2{}_{1x}(0)\phi_{1xy}(0)=0\\&\qquad at\ y=0\cdots\cdots(19.3)\end{aligned}$$

式(13)は

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=0 \qquad at\ y=-h\cdots\cdots(20.1)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=0 \qquad at\ y=-h\cdots\cdots(20.2)$$

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial x}=0 \qquad at\ y=-h\cdots\cdots(20.3)$$

2. 放物線型流速分布の場合の第2次近似を計算する。第1近似は参考文献[1]に示されている。以下同文献を〔I〕とする。式(17.2)は $\Delta^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とすれば

$$\frac{(c_1+\phi_{1y})}{c_0-U_0}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta^2\phi_1)-\frac{\phi_{1x}}{c_0-U_0}\frac{\partial}{\partial y}(\triangle^2\phi_1)+\Delta^2\phi_{2x}+\frac{U_{0yy}}{c_0-U_0}\phi_{2x}=0 \quad\cdots\cdots(21)$$

式(21)の同次方程式は

$$\Delta^2\phi^{(0)}{}_{2x}+\frac{U_{0yy}}{c_0-U_0}\phi^{(0)}{}_{2x}=0 \quad\cdots\cdots(22)$$

$\phi_2{}^{(0)}$ は x につき週期的な解を持つものとして，

$$\phi_2{}^{(0)}=\varphi_2{}^{(0)}(y)e^{im_2(x-ct)} \quad\cdots\cdots(23)$$

とおけば式(22)より

$$\varphi_{2yy}{}^{(0)}+\left(\frac{U_{0yy}}{c_0-U_0}-m_2{}^2\right)\varphi_2{}^{(0)}=0 \quad\cdots\cdots(24)$$

今の場合，一般流の流速分布は

$$U_0=U_{00}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)\cdots\cdots(25)$$

であるから

$$\beta_1=1-\frac{c_0}{U_{00}},\quad \beta_1h^2=h_1{}^2 \cdots\cdots(26)$$

を用い，式(24)は

$$\varphi^{(0)}{}_{2yy}+\left(\frac{2}{h_1{}^2-y^2}-m_2{}^2\right)\varphi_2{}^{(0)}=0 \quad\cdots\cdots(27)$$

$|\beta_1|>1$ の場合を考え，一般解を

$$\varphi_2{}^{(0)}=A_2{}^{(0)}\varphi_{21}{}^{(0)}+B_2{}^{(0)}\varphi_{22}{}^{(0)}\cdots\cdots(28)$$

とおけば，〔I〕—(13)，(13)′ より

$$\varphi_{21}{}^{(0)}=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\beta_1 h^2}-m_2{}^2\right)y^2+\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{2}{\beta_1 h^2}-m_2{}^2\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{\beta_1{}^2h^4}\right\}y^4+\cdots\right] \quad\cdots\cdots(29)$$

$$\varphi_{22}{}^{(0)}=\left[y-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\beta_1 h^2}-m_2{}^2\right)y^3+\left\{\frac{1}{120}\left(\frac{2}{\beta_1 h^2}-m_2{}^2\right)^2-\frac{1}{10}\frac{1}{\beta_1{}^2h^4}\right\}y^5+\cdots\right]\cdots\cdots(30)$$

m_2 は第2次近似 η_2，ψ_2 の改善を意味する。ついで式(21)の特解を求める。$\nabla^2\psi_1=\zeta_1$ であるから，この特解は第一近似のもつ渦度が第2近似に与える影響をあらわしている(〔I〕—(16)参照)。

式(21)を整理すれば

$$\frac{h^2}{U_{00}}c_1 im_1 F_4(y)\left(e^{im_1(x-ct)}-e^{-im_1(x-ct)}\right)+\frac{h^2 im_1}{2U_{00}}F_{10}(y)\left(e^{i2m_1(x-ct)}-e^{-i2m_1(x-ct)}\right)+\Delta^2\psi_{2x}+\frac{U_{0yy}}{c_0-U_0}\psi_{2x}=0\cdots\cdots(31)$$

ただし m_1 は第1近似 η_1，ψ_1 の波数であり，$F_4(y)$，$F_{10}(y)$ は

$$\frac{\varphi_{11}+\varphi_{12}}{(y^2-\beta_1 h^2)^2}=F_4(y) \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\frac{(\varphi_{11y}+\varphi_{12y})(\varphi_{11}+\varphi_{12})}{(y^2-\beta_1 h^2)^2}+\frac{(\varphi_{11}+\varphi_{12})\left[(\varphi_{11y}+\varphi_{12y})(\beta_1 h^2-y^2)+2y(\varphi_{11}+\varphi_{12})\right]}{(y^2-\beta_1 h^2)^3}=F_{10}(y)\cdots\cdots(33)$$

で与えられ。

φ_{11}，φ_{12} は［I］—(12) を $\varphi_1=\varphi_{11}+\varphi_{12}$ と書き直したものであり。また［I］—(9) は $\eta_1=K_1 e^{im_1(x-ct)}$ となっている。流れのはやい場合の計算値の精度を保つためには，y の多項式 $F_4(y)$，$F_{10}(y)$ は y^8 の項まで正しく出す必要がある。式(31)の特解としては左辺第1項に関するもの，第2項に関するものの2つが得られ，いま，それを

$$\psi_2{}^{(1)}=D^{(1)}(y)\left\{e^{im_1(x-ct)}+e^{-im_1(x-ct)}\right\} \quad(34)$$

$$\psi_2{}^{(2)}=D^{(2)}(y)\left\{e^{i2m_1(x-ct)}+e^{-i2m_1(x-ct)}\right\} \quad(35)$$

とおけば，$D^{(1)}$ は y^2 の項から始まる y の多項式であるが，$\frac{h^2}{U_{00}}c_1$ という共通の係数を持ち，後に述べるように $c_1=0$ であるから不必要となる。式(35)の $D^{(2)}(y)$ は y^3 の項から始まる y の多項式であり，その係数は $F_{10}(y)$ の係数と関係づけられ，したがって〔I〕—(13)″ に示される F_2 に関係する。簡単に示す事ができないためここには省略する。

このようにして式(21)の一般解は

$$\psi_2=\psi_2{}^{(0)}+\psi_2{}^{(1)}+\psi_2{}^{(2)}=\left\{A_2{}^{(0)}\varphi_{21}{}^{(0)}+B_2{}^{(0)}\varphi_{22}{}^{(0)}\right\}\frac{e^{im_2(x-ct)}+e^{-im_2(x-ct)}}{2}+D^{(1)}(y)\left(e^{im_1(x-ct)}+e^{-im_1(x-ct)}\right)+D^{(2)}(y)\left(e^{i2m_1(x-ct)}+e^{-i2m_1(x-ct)}\right)\cdots\cdots(36)$$

となる。式(36)の積分常数および m_2，c_1 の決定には表面の力学的条件式(19—2)および底の境界条件(20—2)を用いる。このとき $y=0$ における p_{2x} は(15—2)より

$$p_{2x}{}^{(0)}=-\rho c_1\psi_{1xy}{}^{(0)}-\rho\psi_{1y}{}^{(0)}\psi_{1xy}{}^{(0)}-\rho c_0\psi_{2xy}{}^{(0)}+\rho U_{00}\psi_{2xy}{}^{(0)}-\rho\psi_{2x}{}^{(0)}U_{0y}{}^{(0)}+\rho\psi_{1x}{}^{(0)}\psi_{1yy}{}^{(0)}\cdots\cdots(37)$$

で与えられる。計算の結果は $m_2=m_1$，$m_2=2m_1$ の2つの解が得られ，$m_2=m_1$ については

$$A_2{}^{(0-1)}=\frac{-2C_1K_1\frac{F_2}{h}(U_{00}-c_0)^2\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}{(U_{00}-c_0)^2\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}\;\frac{-2gD^{(1)}(-h)}{+g\varphi_{22}{}^{(0-1)}(-h)}\;\frac{\varphi_{22}{}^{(0-1)}(-h)}{\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}-\frac{2D^{(1)}(-h)}{\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}\cdots\cdots(38)$$

$$B_2{}^{(0-1)}=\frac{2C_1K_1\frac{F_2}{h}(U_{00}-c_0)^2\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}{(U_{00}-c_0)^2\varphi_{21}{}^{(0-1)}(-h)}\;\frac{-2gD^{(1)}(-h)}{+g\varphi_{22}{}^{(0-1)}(-h)}\cdots\cdots(39)$$

既述のように $D^{(1)}$ は $\frac{h^2}{U_{00}}c_1$ を共通の係数とするから，$A_2{}^{(0-1)}$，$B_2{}^{(0-1)}$ はそれぞれ c_1 を係数とする。すなわち c_1 の値は定まらない。ゆえに $c_1=0$ とおくことができる。このようにしてこの渦度を持つ波においても，波の要素間の干渉による波速変化は第2次近次ではまだ現われないことがわかる。

$m_2=2m_1$ については

$$A_2{}^{(0-2)}=\frac{1}{4\left\{g+(U_{00}-c_0)^2\frac{\varphi_{21}{}^{(0-2)}(-h)}{\varphi_{22}{}^{(0-2)}(-h)}\right\}}\cdot\left[3K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3m_1{}^2-K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3\frac{4}{\beta_1h^2}-K_1{}^2(U_{00}-c_0)^2U_{0yy}{}^{(0)}-2K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3\frac{F^2{}_2}{h^2}-8(U_{00}-c_0)^2\frac{D^{(2)}(-h)}{\varphi_{22}{}^{(0-2)}(-h)}-gK_1{}^2(U_{00}-c_0)\frac{F_2}{h}\right]\cdots\cdots(40)$$

$$B_2{}^{(0-2)}=\frac{-1}{4\left\{g+(U_{00}-c_0)^2\frac{\varphi_{21}{}^{(0-2)}(-h)}{\varphi_{22}{}^{(0-2)}(-h)}\right\}}\left[3K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3m_1{}^2-K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3\frac{4}{\beta_1h^2}-K_1{}^2(U_{00}-c_0)^2U_{0yy}{}^{(0)}-2K_1{}^2(U_{00}-c_0)^3\frac{F_2}{h^2}-8(U_{00}-c_0)^2\frac{D^{(2)}(-h)}{\varphi_{22}{}^{(0-2)}(-h)}-gK_1{}^2(U_{00}-c_0)\frac{F_2}{h}\right]\frac{\rho_{21}{}^{(0-2)}(-h)}{\rho_{22}{}^{(0-2)}(-h)}-2\frac{D^{(2)}(-h)}{h\rho_{22}{}^{(0-2)}(-)}\cdots\cdots(41)$$

このようにして式(36)は決定せられる。

つぎに

$$\eta_2=K_2^{(-2)}\frac{e^{i2m_1(x-ct)}+e^{-i2m_1(x-ct)}}{2}+K_2^{(c)} \quad \cdots\cdots(42)$$

とおけば*，(18−2) により

$$K_2^{(-2)}=\frac{\frac{1}{2}K_1^2(U_{00}-C_0)\frac{F_2}{h}+A_2^{(0-2)}}{U_{00}-C_0} \quad \cdots\cdots(43)$$

となり，波高の2倍周波数成分が決定せられる。$K_2^{(c)}$ の値を非回転波の場合と同様に決定することは困難である。これは圧力の2次近似 p_2 の常数項の決定に関係し，後述するように流れが一様分布のとき（流れも非回転），3角形型流速分布のとき（流れは渦度を持つが波は非回転）の場合には非回転の場合の運動方程式の積分から導かれる解にならって p_2 の常数項を決定し，$K_2^{(c)}$ を求めることができるが，現在の問題ではそれが困難である。

この波も質量輸送を行なう。2次近似の程度におけるその量は

$$M_T=\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{\eta_1}(U_0-\phi_{1y})\,dydt-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{0}U_0dydt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^{\eta_1}U_0dydt-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-y}^{\eta_1}\phi_{1y}\,dydt \quad \cdots(44)$$

第1項は $U_0=U_{00}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)$ を代入すると0となり

$$M_T=-\frac{1}{T}\int_0^T|\varphi_1|_{-h}^{\eta_1}dt=-\frac{1}{T}\int_0^T\{\varphi_{11}(\eta_1)+\varphi_{12}(\eta_1)\}\cos m_1(x-ct)dt \quad \cdots\cdots(45)$$

［I］−(13), (14) による $\varphi_{11}(\eta_1)$，$\varphi_{12}(\eta_1)$ を代入し

$$M_T=K_1(U_{00}-C_0)\frac{F_2}{h}\left[-\frac{K_1}{2}+\frac{1}{16}\left(\frac{2}{\beta_1h^2}-m_1^2\right)K_1^3+\cdots\cdots\right] \quad \cdots\cdots(46)$$

3.　一様流速分布および三角形型流速分布の場合について同様の計算を行なうことができる。

一様流速分布の場合は $\Delta^2\phi_1=0$，$\Delta^2\phi_2=0$，………であり，1次近似は

$$\eta_1=K_1\cos m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(47)$$

$$\phi_1=\frac{(U_U-C_0)^2K_1}{\sinh m_1h}\sinh m_1(y+h)\cos m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(48)$$

$$p_1=\rho\frac{(U_U-C_0)^{2k1}}{\sinh m_1h}m_1\cosh m_1(y+h)\cos m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(49)$$

$$(U_U-c_0)^2=\frac{g}{m_1}\tanh m_1h \quad \cdots\cdots(50)$$

2次近似は

$\eta_2=K_2\cos 2m_1(x-ct)+K^{(c)}$ において

$$K_2=\frac{1}{2}\frac{\cosh m_1h}{\sinh m_1h}K_1^2m_1\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{\sinh^2 m_1h}\right) \quad \cdots\cdots(51)$$

$$\phi_2=\frac{3}{8}(U_U-C_0)K_1^2m_1\frac{\sinh 2m_1(y+h)}{\sinh^4 m_1h}\cdot\cos 2m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(52)$$

p_2 の決定には (15−2)，(16−2) を用いる。まず (15−2) により x につき周期的な項を決定し，つぎに (16−2) により y のみの関数および常数項を求め，ついで $U_U=0$ のときの非回転理論による計算値と比較して常数項を決定する。よって

$$p_2=-\frac{\rho}{4}\frac{(U_U-C_0)^2}{\sinh^2 m_1h}k_1^2m_1^2\left(1-3\frac{1}{\sinh^2m_1h}\cosh 2m_1(y+h)\right)\cos 2m_1(x-ct)-\frac{\rho}{4}\frac{(U_U-C_0)^2K_1^2m_1^2}{\sinh^2m_1h}\cosh 2m_1(y+h) \quad \cdots\cdots(53)$$

$K^{(c)}$ の導出は $p=p_0+p_1+p_2$ において無せつ動項に $y=K_1\cos m_1(x-ct)+K_2\cos 2m_1(x-ct)+K^{(c)}$，第1せつ動項に $y=K_1\cos m_1(x-ct)$，第2せつ動項に $y=0$ を代入し，第2せつ動の位数で計算をとどめれば，p は2次近似としての表面の $p(=0)$ となる。よって，その時間的平均値から $K^{(c)}$ は算出され

$$K^{(c)}=-\frac{1}{2}K_1^2m_1\frac{1}{\sinh 2m_1h} \quad \cdots\cdots(54)$$

この結果は $U_U=0$ の時非回転の計算でE. V. Laitone[6] の求めたものと一致する。

質量輸送は2次近似において

$$M_T=-\frac{(U_U-C_0)}{\sinh m_1h}K_1^2m_1\cosh m_1h\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{16}K_1^2m_1^2+\cdots\right] \quad \cdots\cdots(55)$$

この場合も $c_1=0$ のため，2次近似まででは (50) により c は決定される。

三角形型流速分布のときはいままでと同じく $U_0\geqq0$ として

$$U_0(y)=\frac{U_{00}}{h}(y+h) \quad \cdots\cdots(56)$$

とおく。この場合 $U_{0yy}=0$ のため，一般流は禍度を持っているが波は渦度を持たないものとなる。1次近似は

$$\eta_1=K_1\cos m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(57)$$

$$\phi_1=\frac{(U_{00}-c_0)K_1}{\sinh m_1h}\sinh m_1(y+h)\cos m_1(x-ct) \quad \cdots\cdots(58)$$

$$p_1=\left\{\rho(U_0-c_0)\frac{(U_{00}-c_0)K_1m_1}{\sinh m_1h}\cosh m_1(y+h)-\rho\frac{(U_{00}-c_0)}{\sinh m_1h}K_1\frac{U_{00}}{h}\sinh m_1(y+h)\right\}$$

---

* $C_1=0$ より η_2 における基本周波数成分は消失する

$$\times\cos m_1(x-ct) \quad\cdots\cdots(59)$$

$$(c_0-U_{00})^2 m_1\cosh m_1h+$$

$$(C_0-U_{00})\frac{U_{00}}{h}\mathrm{shih}\, m_1h-g=0 m_1h\sinh\cdots(60)$$

2次近似は

$$\eta_2=\left\{\frac{K_1^2}{2}m_1\coth m_1h+\frac{B_2}{U_{00}-c_0}\sinh 2m_1h\right.$$

$$\left.-\frac{U_{0y}(0)K_1^2}{4(U_{00}-c_0)}\right\}\cos 2m_1(x-ct)+K^{(c)}\cdots(61)$$

$$\psi_2=B_2\sinh 2m_1(y+h)\cos 2m_1(x-ct) \quad (62)$$

ただし，B_2 は

$$B_2=\frac{K_1^2}{4(U_{00}-c_0)m_1\sinh^2 m_1h}\left\{\frac{3}{2}(U_{00}-c_0)^2\right.$$

$$\cdot m_1^2\frac{1}{\sinh^2 m_1h}-\frac{3}{2}m_1(U_{00}-c_0)U_{0y}(0)$$

$$\left.\cdot\coth m_1h+\frac{1}{2}U^2_{0y}(0)\right\} \quad\cdots\cdots(63)$$

p_2，$K^{(c)}$ は一様流速分布のときと同様にして決定せられ，

$$p_2=\rho\left[\frac{(U_0-c_0)\cosh 2m_1(y+h)}{2(U_{00}-c_0)\sinh^2 m_1h}K_1^2\left\{\frac{3}{2}(U_{00}\right.\right.$$

$$-c_0)^2m_1^2\frac{1}{\sinh 2m_1h}-\frac{3}{2}m_1(U_{00}$$

$$\left.-c_0)\frac{U_{00}}{h}\coth m,\ h+\frac{1}{2}\frac{U_{00}^2}{h^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{(U_{00}-c_0)^2}{\sinh^2 m_1h}K_1^2m_1^2$$

$$-\frac{\sinh 2m_1(y+h)\cdot\frac{U_{00}}{h}K_1^2}{4(U_{00}-c_0)m_1\sinh^2 m_1h}\left\{\frac{3}{2}(U_{00}\right.$$

$$-c_0)^2m_1^2\frac{1}{\sinh^2 m_1h}-\frac{3}{2}m_1(U_{00}-c_0)\frac{U_{00}}{h}$$

$$\left.\left.\cdot\coth m_1h+\frac{1}{2}\frac{U_{00}^2}{h^2}\right\}\right]\cos 2m_1(x-ct)$$

$$-\frac{\rho}{4}\frac{(U_{00}-c_0)^2}{\sinh^2 m_1h}K_1^2m_1^2\cosh 2m_1(y+h)$$

$$\cdots\cdots(64)$$

$$K^{(c)}=-\frac{1}{4}\frac{(U_{00}-c_0)K_1^2m_1^2}{\left\{(U_{00}-c_0)m_1\cosh m_1h-\frac{U_{00}}{h}\sinh m_1h\right\}\sinh m_1h}\quad\cdots\cdots(65)$$

2次近似における質量輸送は

$$M_T=\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{\eta_1}(U_0-\psi_{1y})dydt$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^0 U_0dydt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{\eta_1}(U_0dydt$$

$$=\frac{U_{00}}{h}\frac{K_1^2}{4},\ \text{また}\ \frac{1}{T}\int_0^T\int_{-h}^{\eta_1}(-\psi_{1y})dydt=$$

$$-\frac{(U_{00}-c_0)}{\sinh m_1h}K_1^2m_1\cosh m_1h\cdot\left\{\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}K_1^2m_1^2+\cdots\cdots\right\}$$

ゆえに

$$M_T=\frac{U_{00}}{h}\frac{K_1^2}{4}+\frac{c_0-U_{00}}{\sinh m_1h}K_1^2\frac{m_1}{2}\cosh m_1h \quad\cdots\cdots(66)$$

(60)を用いると

$$M_T=\pm\frac{K_1^2}{4\sinh m_1h}\sqrt{\frac{U_{00}^2}{h^2}\sinh^2 m_1h+4m_1g\sinh m_1h\cosh m_1h}\cdots\cdots(67)$$

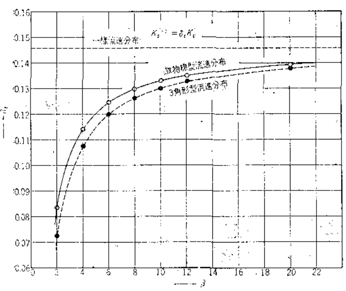
つぎに3次近似の問題であるが，一様流速分布の場合は非回転理論による3次近似の計算値と一致することは明かである。3角形型流速分布の場合については (15－3)，(16－3)，(17－3)，(18－3)，(19－3)，(20－3) により計算する。計算は結果を簡単に示すことができないから，ここには省略し，**4.** に数値計算例のみを示すこととする。 3次近似においては $c_2(\neq 0)$ の値が決定せられ，また $\eta_3=K_3^{(1)}\cos m_1(x-ct)+K_3^{(2)}\cos 3m_1(x-ct)$ となつて $K_3^{(1)}$，$K_3^{(2)}$ が決定される。この場合 $c_2\neq 0$ であることは，流れのない場合と同じく3次近似におけ波の干渉の重要性を示すものといえよう[8)*]。

4. 数値計算例により $K_2^{(-2)}(=\delta_t K_1)$ がどのような分布を示すかを調べる。parameter としては $\beta=1-\frac{c_0}{U_{00}}$ (放物線型および3角形型流速分布の場合 $-U_{00}$ は波のない場合の表面流速) $\beta=1-\frac{c_0}{U_U}$ (一様流速分布の場合) を用い，$s=\frac{h}{L}=0.2$，$\frac{K_1}{L}=\frac{1}{40}$ の場合につき計算した。結果を**図—1,2** に示す。**図—1** は逆流の場合であり，**図—2** は順流の場合である。平均流速から考えると β は各曲線につきおのおのことなった意味を持つことはいうまでもない。これによれば一様流速分布の流れでは波形の2次近似成分の1次近似成分に対する比は，流れのない場合と一致しているが，三角形型流速分布では流れが逆流の時2次近似成分が減少し，順流のときには増加している。そして流れがはやくなるとこの傾向はきめて顕著となる。放物線型流速分布については，逆流の場合のみ計算したが，三角形型流速分の場合と全く同様の傾向を示しおそらく順流の場合も同様の傾向を示すものと考えられる。 全曲線が $\beta=\pm\infty$ で一致することはいうまでもない。

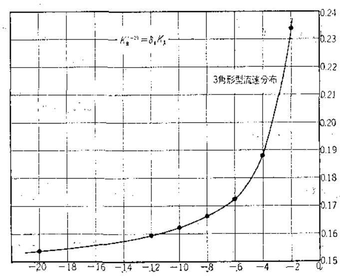
ここに注意すべき事実は，1次近似の ψ_1 の形においては式 (48)，(58) より見られるとおり，一様流速分布と三角形型流速分布とでは同形であり，1次近似の波の

* この解法は定常状態に関するものであり， O. M. Phillips の ものは初期値問題に関するものである。

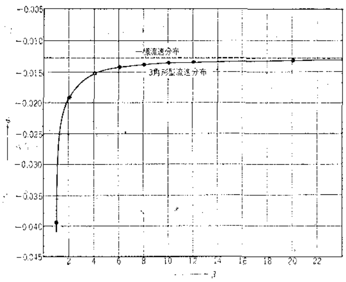
図—1



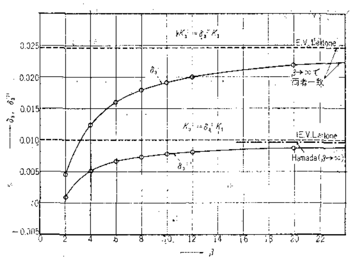
図—2



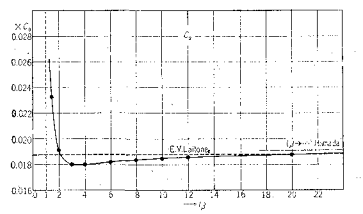
図—3



図—4



図—5



表面水平流速と底の水平流速との比は，同じく cosh m_1 ($\geqq 1$) で表わされる。これに対し放物線型速分布では［I］—図—1 その他の説明に示したように，流れのはやい場合には逆流時波による底の水平流速が表面水平流速よりも大きいものが現われるという大きな差異がある。ところが，いまの場合，振幅の2次近似では放物線型流速分布と3角形型流速分布とが相似た傾向を示し，一様流速分布の場合とはっきりと区別される。

$K^{(c)}(=\sigma K_1)$ については既述のように一様流速分布，3角形型流速分布の場合のみが算出されている。$s=h/L$ K_1/L を前と同じくして β に対する σ の値を求めると，逆流の場合 **図—3** のようである。すなわち逆流々速が小さいときには両者あまり差がないが，流速が大きくなると大きな差が現われる。 そして δ_t の場合とは逆に3角形型流速分布のほうが σ の絶対値は大きくなる。

3角形型流速分布の場合については，3次近似の $K_3^{(1)}$，$K_3^{(2)}$ ($\eta_3=K_3^{(1)}\cos m_1(x-ct)+K_3^{(2)}\cos 3m_1(x-ct)$) が算出された。数値計算では $s=h/L$，K_1/L の値は前と同じくし，$K_3^{(1)}=\delta_3^{(1)}K_1$，$K_3^{(2)}=\delta_3^{(2)}K_1$ で表わすと，逆流の場合につき **図—4** のようである。一様流速分布の場合は流れのない場合と一致することは明らかであるから，比較のため E. V. Laitone[6] の表示式から出算した。$\delta_3^{(2)}$ は $\beta=\infty$ で Laitone の表示式によるものと完全に一致したが，$\delta_3^{(1)}$ については **図—4** に示されるように $\beta=\infty$ できわめてわずかの差を生じた。$\delta_3^{(2)}$，$\delta_3^{(1)}$ ともに2次近似における δ_t と同様，逆流々速が増加すると減少してゆく。

つぎに3角形型流速分布の場合の c_2 を同じ数値例について算出した。結果を **図—5** に示す。

参考文献

1) 浜田徳一・加藤始：流水をさかのぼる波についての一計算，第8回海岸工学講演集，土木学会 昭和36年
2) Benjamin T. B. : The solitary wave on a stream with an asbitrary distribution of vorticity, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 12, 1961.
3) Longuet-Higgins M. S. andStewart, R. W. : Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 8, 1960.
4) Longuet-Higgins M. S. and Stewart, R. W. : The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, 1961.