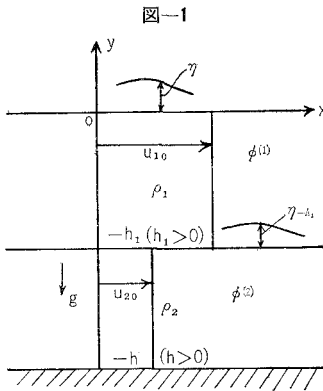


2 層 流 と 波

浜 田 徳 一・加 藤 始**

1. この計算は密度の異なる2層の流れを通過する表面波および内部波の性質についてのものであり、計算はすべて線型化が許容される範囲内で行なわれ、いわゆる Kelvin-Helmholtz 不安定およびジャンプの問題に対して若干の言及がなされている。こうした現象は河口その他の沿岸水域において、表層水、底層水に塩分濃度の急変があるときなどに存在しうるものと考えられる。

今、図-1 のごとく x 軸を静水面において水平に、 y 軸を鉛直上向きにとる。表層水の密度を ρ_1 、流速を u_{10} 、底層水の密度を ρ_2 、流速を u_{20} とし、水底を $y = -h$ 、表層、底層水の静止状態での界面を $y = -h_1$ とする。



このような問題を解くとき、 $-u_{20}$

を水平に系全体に加え、表層流速 $u_{10} - u_{20}$ 、底層流速 0 の場合の解を求め、この解に一樣流 u_{20} を加えるのが普通通行なわれる方法であるが、この計算では以下与えられた条件のままで計算する。

表面波形を

$$\eta = R \{ A_0 e^{im(x-ct)} \} \quad \dots\dots\dots (1)$$

(R は実部を示すものとする)

として、表面の運動条件は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial y} \quad (y=0 \text{ にて}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

表面の力学的条件は

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} - g \eta \right) = 0 \quad (y=0 \text{ にて}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)} &= -u_{10}x + \phi_1^{(1)} \\ u_1 &= -\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} = u_{10} - \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} \\ v_1 &= -\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

2 流体の界面においては、波形を

$$\eta_{-h_1} = R \{ A_{-h_1} e^{im(x-c^{(1)}t)} \} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式 (2) に相当するものは上下両流体につき、それぞれ

$$\frac{\partial \eta_{-h_1}}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial \eta_{-h_1}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial y} \quad (y=-h_1 \text{ にて}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial \eta_{-h_1}}{\partial t} + u_{20} \frac{\partial \eta_{-h_1}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y} \quad (y=-h_1 \text{ にて}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式 (3) に相当するものは

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial t} + \rho_1 u_{10} \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial x} - \rho_1 g (-h_1 + \eta_{-h_1}) &= \rho_2 \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial t} \\ &+ \rho_2 u_{20} \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial x} - \rho_1 g (-h_1) - \rho_2 g \eta_{-h_1} \end{aligned} \quad (y=-h_1 \text{ にて}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(2)} &= -u_{20}x + \phi_1^{(2)} \\ u_2 &= -\frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial x} = u_{20} - \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial x} \\ v_2 &= -\frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$\nabla^2 \phi_1^{(1)} = \nabla^2 \phi_1^{(2)} = 0$ ($\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) を満足する $\phi_1^{(1)}$,

$\phi_1^{(2)}$ のうち、底条件 $\frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial y} = 0$ ($y = -h$ にて) を満たし、式 (1), (5) の波形に対応するものは

$$\phi_1^{(2)} = C_1^{(2)} \cosh m(h+y) e^{im(x-c^{(1)}t)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\phi_1^{(1)} = \{ A^{(1)} e^{my} + B^{(1)} e^{-my} \} e^{im(x-c^{(1)}t)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおくことができる。

表面条件より $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ を求めれば

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)} &= \left\{ \frac{A_0 \{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{im(u_{10} - c^{(1)})} \cosh my \right. \\ &\quad \left. + i A_0 (u_{10} - c^{(1)}) e^{-my} \right\} \cdot e^{im(x-c^{(1)}t)} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$y = -h_1$ の界面の条件より

$$\phi_1^{(2)} = \frac{-i A_{-h_1} (u_{20} - c^{(1)})}{\sinh m(h-h_1)} \cosh m(h+y) \cdot e^{im(x-c^{(1)}t)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

および

$$A_{-h_1} = A_0 \left\{ e^{mh_1} - \frac{\{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{m(u_{10} - c^{(1)})^2} \sinh mh_1 \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

したがって、式 (1), (5) の η , η_{-h_1} 同位相か、 π だけ位相を変えることになる。

$c^{(1)}$ の決定は式 (8) による。式 (8) の形のままで示せば

$$\begin{aligned} &-imc^{(1)} \rho_1 \left[\frac{\{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{im(u_{10} - c^{(1)})} \cosh mh_1 + i(u_{10} - c^{(1)}) e^{mh_1} \right] \\ &+ \rho_1 u_{10} im \left[\frac{\{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{im(u_{10} - c^{(1)})} \cosh mh_1 + i(u_{10} - c^{(1)}) e^{mh_1} \right] \\ &- \rho_1 g \left[\frac{\{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{m(u_{10} - c^{(1)})^2} \sinh mh_1 + e^{mh_1} \right] \\ &= \left\{ -mc^{(1)} \rho_2 \frac{u_{20} - c^{(1)}}{\sinh m(h-h_1)} \cosh m(h-h_1) \right. \\ &\quad \left. + \rho_2 u_{20} m \frac{u_{20} - c^{(1)}}{\sinh m(h-h_1)} \cosh m(h-h_1) - \rho_2 g \right\} \\ &\times \left[\frac{\{ g + m(u_{10} - c^{(1)})^2 \}}{m(u_{10} - c^{(1)})^2} \sinh mh_1 + e^{mh_1} \right] \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

* 正員 工博 運輸省港湾技術研究所

** 正員 運輸省港湾局調査設計室

これを整理しては

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho_1 \sinh mh_1 + \rho_2 \frac{\cosh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right\} c^{(1)4} - 2 \left\{ 2 \rho_1 u_{10} \sinh mh_1 \right. \\ & + \rho_2 (u_{10} + u_{20}) \frac{\cosh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \left. \right\} c^{(1)3} + \left[6 \rho_1 u_{10}^2 \sinh mh_1 \right. \\ & + \rho_2 \{ (u_{10} + 2u_{20})^2 - 3u_{20}^2 \} \frac{\cosh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \\ & - \frac{\rho_2 g}{m} \left\{ \cosh mh_1 + \frac{\sinh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right\} \left. \right] c^{(1)2} \\ & - 2 \left[2 \rho_1 u_{10}^3 \sinh mh_1 + \rho_2 u_{10} u_{20} (u_{10} + u_{20}) \frac{\cosh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right. \\ & - \frac{\rho_2 g}{m} \left\{ u_{10} \cosh mh_1 + u_{20} \frac{\sinh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right\} \left. \right] c^{(1)} \\ & + \left[\rho_1 u_{10}^4 \sinh mh_1 + \rho_2 u_{10}^2 u_{20}^2 \frac{\cosh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right. \\ & - \frac{\rho_2 g}{m} \left\{ u_{10}^2 \cosh mh_1 + u_{20}^2 \frac{\sinh mh_1}{\tanh m(h-h_1)} \right\} \\ & - \left. \left(\frac{g}{m} \right)^2 (\rho_1 - \rho_2) \sinh mh_1 \right] = 0 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

今 $\sinh mh_1 = a$, $\cosh mh_1 = b$, $\tanh m(h-h_1) = c$ とおき

$$\xi = c^{(1)} - \frac{2 \rho_1 u_{10} a + \rho_2 (u_{10} + u_{20}) \frac{b}{c}}{2 \left(\rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \right)} \dots\dots\dots (17)$$

とすれば、式(16)はつぎのように変形せられる。

$$A_{11} \xi^4 + A_{12} \xi^3 + A_{13} \xi^2 + A_{14} \xi + A_{10} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

ただし

$$\begin{aligned} A_{14} &= \rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \\ A_{12} &= \left\{ 2 \left(\rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \right) \right\}^{-1} \left\{ \rho_2 (u_{10} - u_{20})^2 \frac{b}{c} \left(2 \rho_1 a - \rho_2 \frac{b}{c} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\rho_2 g}{m} \left(\rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \right) \left(b + \frac{a}{c} \right) \right\} \\ A_{11} &= - \left(\rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \right)^{-2} \left\{ \rho_1 \rho_2 (u_{10} - u_{20})^2 a \left(\frac{b}{c} \right)^2 + 2 \frac{\rho_1^2 g}{m} a^2 \frac{a}{c} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\rho_1 \rho_2 g a}{m} \left(b - 3 \frac{a}{c} \right) \frac{b}{c} - \frac{\rho_2^2}{m} g \left(b - \frac{a}{c} \right) \frac{b^2}{c^2} \right\} \rho_2 (u_{10} - u_{20}) \\ A_{10} &= \left\{ 256 \left(\rho_1 a + \rho_2 \frac{b}{c} \right)^3 \right\}^{-1} \left[16 \rho_2^4 (u_{10} - u_{20})^4 \left(\frac{b}{c} \right)^4 \right. \\ & \quad + 64 \rho_1 \rho_2^3 (u_{10} - u_{20})^4 a \left(\frac{b}{c} \right)^3 - 64 \rho_2^4 \frac{g}{m} (u_{10} - u_{20})^2 \\ & \quad \times \left(b + \frac{a}{c} \right) \frac{b^3}{c^3} - 64 \rho_1 \rho_2^3 (u_{10} - u_{20})^2 \left(b + 5 \frac{a}{c} \right) a \left(\frac{b}{c} \right)^2 \\ & \quad \left. - 512 \rho_1^2 \rho_2^2 \frac{g}{m} (u_{10} - u_{20})^2 a^2 \frac{b}{c} \frac{a}{c} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -256 \rho_1^3 \rho_2 \frac{g}{m} (u_{10} - u_{20})^2 \frac{a}{c} a^3 \\ & -256 \left(\frac{g}{m} \right)^2 (\rho_1 - \rho_2) \left\{ \rho_2^2 a \left(\frac{b}{c} \right)^3 + 3 \rho_1 \rho_2^2 a^2 \left(\frac{b}{c} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + 3 \rho_1^2 \rho_2 a^3 \frac{b}{c} + \rho_1^3 a^4 \right\} \end{aligned}$$

式(18),したがって、また式(16)を u_{10}, u_{20} が0でない一般の場合について論じ $c^{(1)}$ の特性を見出すことは困難であるが、式(18)を見れば既述のように $|u_{10} - u_{20}|$ にのみ関係することがわかる。以下個々の場合について式(18)を用いて Ferrari の解法により数値計算によって $c^{(1)}$ の値を検討する。

2. 今きわめてありうる場合として、河口の例をとり $h=10$ m, $h_1=4$ m, $\rho_1=1.000$, $\rho_2=1.020$ とする。表層流速を -1 m/sec から -4 m/sec まで、底層流速を逆流があるものとして、 $+0.3$ m/sec から $+1.2$ m/sec に変化させるとき、そこに現われる重力波の波長を 40, 60, 80, 100 および 120 m とすると、その external wave としての波速 $c_e^{(1)}$, internal wave としての波速 $c_i^{(1)}$ は式(17), (18)を用いて、それぞれ表-1 ようになる。表中ハッチの部分は Kelvin-Helmholtz 不安定が成立し、実数解が得られないことを示している。このようにして表面波は互いに逆方向に流れる2層流を安定に通過するが、内部波は不安定なものが生ずること、また、わずかの表面流速で内部波は遡上し得なくなることが示される。

おそらくこのようにして得られた表面波速は実情に近いものであり、式(12), (13) および式(14)に求められた $c_e^{(1)}$ を代入することにより、一応の波の性質を知ることができるわけであるが、内部波については疑問がある。それは内部波の性質は界面付近の流れの性質に強く影響されるからである。今このことを検討してみよう。この場合上述の計算方法をさらに複雑にすることはあまりに繁雑であり、また後述するように一般にはその必要も少ないと思われるから、図-2 の場合について $y=h_1$ にて $v_1=0$ とする。すなわち、水表面で垂直方向の流速を0と考える。

表-1 $C_e^{(1)}$, $C_i^{(1)}$

波 速 長	$u_{10} = -1$ m/sec $u_{20} = +0.3$ m/sec				$u_{10} = -2$ m/sec $u_{20} = +0.6$ m/sec			$u_{10} = -4$ m/sec $u_{20} = +1.2$ m/sec		
	$C_e^{(1)}$ (m/sec)	ξ_e	$C_i^{(1)}$	ξ_i	$C_e^{(1)}$	ξ_e	$C_i^{(1)}, \xi_i$	$C_e^{(1)}$	ξ_e	$C_i^{(1)}, \xi_i$
40 m	+6.956 8 -8.227 2	+7.493 2 -7.690 8			+6.403 2 -8.959 2	+7.476 0 -7.886 4		+5.354 2 -10.569 3	+7.499 8 -8.443 7	
60	+8.107 6 -9.053 9	+8.573 2 -8.588 3	-0.330 6 -0.565 5	+0.135 0 -0.119 9	+7.748 3 -9.660 0	+8.679 4 -8.728 9		+7.155 5 -11.109 6	+9.017 7 -9.247 4	
80	+8.697 3 -9.465 3	+9.122 6 -9.040 0	-0.285 0 -0.647 9	+0.140 0 -0.222 6	+8.445 4 -10.002 3	+9.296 0 -9.151 7		+8.105 2 -11.353 5	+9.806 3 -9.652 4	
100	+9.023 1 -9.689 3	+9.425 1 -9.287 3	-0.265 1 -0.676 7	+0.136 9 -0.274 7	+8.835 6 -10.190 1	+9.639 5 -9.386 2		+8.649 0 -11.495 3	+10.257 0 -9.887 4	
120	+9.217 9 -9.822 1	+9.605 6 -9.434 4	-0.259 3 -0.687 4	+0.128 4 -0.299 7	+9.065 3 -10.296 1	+9.840 7 -9.520 7		+8.958 0 -11.558 0	+10.509 0 -10.007 0	

図-2

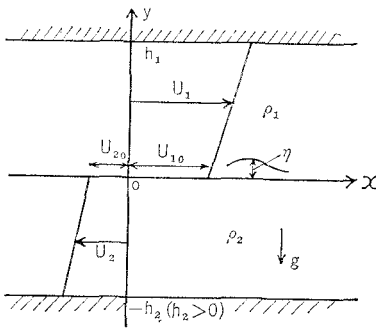


図-2 においては両流体の流速分布として直線分布、 $U_1 = U_{10} + \alpha y$, $U_2 = U_{20} + \beta y$ を仮定するとき、界面における線型のかく乱によって生ずる表層流の流関数 ψ_1 、底層流の流関数 ψ_2 は、それぞれつぎようになる。

$$\psi_1 = \frac{A_1(c^{(2)} - U_{10})}{\sinh mh_1} \sinh m(y - h_1) e^{im(x - c^{(2)}t)} \quad \dots\dots(19)$$

$$\psi_2 = \frac{A_2(U_{20} - c^{(2)})}{\sinh mh_2} \sinh m(y + h_2) e^{im(x - c^{(2)}t)} \quad \dots\dots(20)$$

ただし両流体の界面で $\eta = R\{A_1 e^{im(x - c^{(2)}t)}\}$ とする。このとき $c^{(2)}$ は界面の条件から決定せられ

$$c^{(2)} = \frac{2\rho_1 m U_{10} \coth mh_1 + 2\rho_2 m U_{20} \coth mh_2 - \rho_2 \beta + \rho_1 \alpha \pm \sqrt{\dots\dots}}{2(\rho_1 m \coth mh_1 + \rho_2 m \coth mh_2)} \quad \dots\dots(21)$$

ただし根号の中は

$$(\rho_1 \alpha - \rho_2 \beta)^2 + 4\rho_1 \rho_2 \beta m \coth mh_1 \cdot (U_{20} - U_{10}) + 4\rho_1 \rho_2 \alpha m \coth mh_2 \cdot (U_{20} - U_{10}) - 4\rho_1 \rho_2 m^2 \coth mh_1 \cdot \coth mh_2 \cdot (U_{10} - U_{20})^2 + 4(\rho_1 m \coth mh_1 + \rho_2 m \coth mh_2)(\rho_2 - \rho_1)g$$

式 (21) において $\alpha = \beta = 0$, $U_{10} = u_{10}$, $U_{20} = u_{20}$ とおけば、これは式 (1)~(18) において表面条件を単純化した場合の内部波の解に相当する。この解は厳密解にくらべてどのような値を示すか、数値例で比較してみよう。表-1 の $u_{10} = -1$ m/sec, $u_{20} = +0.3$ m/sec の場合に対する $c_i^{(2)}$ は表-2 のようになる。

表-2

波 長	40 m	60m	80m	100m	120m
$C_i^{(2)}$ m/sec	-0.32009 -0.58689	-0.27508 -0.64851	-0.25768 -0.67416	-0.24884 -0.68771	

この値を 表-1 の $c_i^{(1)}$ と比較すると、その一致はきわめて良好である。これは、われわれが取り扱う問題では、内部波については通常の場合、表面条件を単純化して、表面における水位変動を無視することが許容されるのを示唆する。

式 (21) の根号中は $U_{20} - U_{10} = 0$ のとき、 α, β の値に無関係に正となり、換言すれば上下両層のおのおのの平均流速の大きさのいかにかわからず、どのような波長の内波も安定であることを示している (もちろん $\rho_2 > \rho_1$ とし、波の波長は表面張力の影響を無視してよい程度に

長いものとしている)。これは界面の Kelvin-Helmholtz 不安定が界面における $|U_{20} - U_{10}| \neq 0$ によって生ずることを示す一例であり、式 (1)~(18) の計算により現われた内波の不安定はただちに承認できず、安定な場合の波速についても検討を必要とする。

3. 1. の取り扱いにおいて波が停止し、かつ波長が十分長い。すなわち $c^{(1)} = 0$ かつ $mh_1 \ll 1$, $m(h - h_1) \ll 1$ の場合を考える。式 (16) より

$$\rho_1 u_{10}^4 m h_1 + \left\{ \rho_2 u_{20}^2 \frac{1}{m(h - h_1)} - \frac{\rho_2 g}{m} \right\} u_{10}^2 - \frac{\rho_2 g}{m} \frac{h_1}{h - h_1} u_{20}^2 - \left(\frac{g}{m} \right)^2 (\rho_1 - \rho_2) m h_1 = 0 \quad \dots\dots(22)$$

したがって u_{10} と u_{20} との関係は $m, h, h - h_1, \rho_2 - \rho_1$ の大きさにより複雑に変化することが予想せられる。以下簡単な場合を示すと

(1) もし $u_{10} = 0$ であれば

$$u_{20}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g(h - h_1) \quad \dots\dots(23)$$

また式 (14) より

$$m(u_{10} - c^{(1)})^2 (A_0 - A_{-h_1}) = A_0 g m h_1 \quad \dots\dots(24)$$

$c^{(1)} = 0$, $u_{10} = 0$ では A_{-h_1} の値のいかにかわからず、 $A_0 = 0$ となる。式 (23) は参考文献³⁾式 (11) において $h_2 - h_1$ が微量な場合の近似式であると考えられ式 (24) より表面変形につき $A_0 = 0$ が厳密に成立することも、ジャンプの場合の性質と一致している。

(2) $u_{20} = 0$ の場合はつぎの2種となる。

$$\textcircled{1} \quad u_{10}^2 = \frac{\rho_2 g}{\rho_1 m^2 h_1} - \frac{g(\rho_2 - \rho_1) h_1}{\rho_2} \quad \dots\dots(25)$$

$$\frac{A_{-h_1}}{A_0} = 1 - m^2 h_1^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 1 \quad \dots\dots(26)$$

この停止波列による $A_{-h_1}/A_0 \approx 1$ であり、式 (25) は mh_1 をふくむため、これを弱い外部ジャンプに対応するものと考えすることはできない。表層流のため波長の表面波列が停止している状態を示している。

$$\textcircled{2} \quad u_{10}^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1) h_1}{\rho_2} \quad \dots\dots(27)$$

$$\frac{A_0}{A_{-h_1}} = - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \quad \dots\dots(28)$$

A_0, A_{-h_1} は符号相反し、かつ、その振幅比は ρ_2/ρ_1 となる。式 (27) は m をふくまないため、これを弱い内部ジャンプの場合に対応するものとすれば $u_{10} \neq 0$, $u_{20} = 0$ での弱いジャンプでは表面形状の変化が考慮されねばならぬこととなる。

参 考 文 献

- 1) Lamb: Hydrodynamics, (1932).
- 2) Miles, J.W.,: On the generation of surface waves by shear flows, Part 3, Kelvin-Helmholtz instability, Journal of Fluid Mechanics. Vol. 6, Part 4 (1959).
- 3) 浜田徳一: 内部ジャンプについて, 第5回海岸工学講演会講演集, 土木学会 (昭和 33 年).