

2次元渦動層における表面波

浜 田 徳 一*

1. 数式の取り扱い

最近 Phillips, O.M. は表面波と乱れとの関係につき2つの論文を発表した。一つは渦動場における表面波の分散を、また一つは表面波により生ずる乱れの表面波に対する影響を論じたものであるが、これらによってもこの問題についてはいまだ一般論的な取り扱いはなく、個々の問題の特性として乱れと波との干渉の検討を行なうべきことを示唆する。ここに述べるものは2次元の表面波の問題において、ある種の渦動場を考え、その場合の表面条件を比較的厳密に取り扱うとき、どのような結果が得られるかという問題である。流体は非粘性とし、表面波については線型化が許されるが、渦動については線型化は許されないものとする。suffix 1 は渦動に関する量、suffix 2 は表面波に関する量を示し、 u_0 は水平な一様定常流とする。

x 軸を静水面において水平に**、 y 軸を鉛直上向きにとる。運動方程式は

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \frac{\partial}{\partial y} (u_1 + u_2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + (u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial}{\partial x} (v_1 + v_2) + (v_1 + v_2) \frac{\partial}{\partial y} (v_1 + v_2) = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1), (2) を u_2, v_2 につき線型化すれば

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (u_0 + u_1) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (v_1 + v_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} + (u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial v_1}{\partial x} + (u_0 + u_1) \frac{\partial v_2}{\partial x} + (v_1 + v_2) \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (4)$$

連続方程式は非圧縮の条件より

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで表面において渦動の受ける境界条件として

$$v_1 = 0 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

したがって、また $\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (7)$

をおく。このようにおけば表面の粒子運動の条件は

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_1 + v_2 \quad \text{at } y=\eta \quad \dots\dots\dots (8)$$

を表面波に関し線型化して

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (u_0 + u_1) \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_2 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、表面の力学的条件は

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x} + u_2 \frac{\partial p}{\partial x} + v_1 \frac{\partial p}{\partial y} + v_2 \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y=\eta \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(3) $\times u_2$ を求め、 u_2, v_2 につき線型化すれば

$$u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_0 + u_1) u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} u_2 \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(4) $\times v_2$ を求め、 u_2, v_2 につき線型化すれば

$$v_2 \frac{\partial v_1}{\partial t} + (u_0 + u_1) v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} = -v_2 g - \frac{1}{\rho} v_2 \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11), (12) を用い、式(10) は

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x} + v_1 \frac{\partial p}{\partial y} - \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \rho(u_0 + u_1) u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho v_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \rho v_2 \frac{\partial v_1}{\partial t} - \rho(u_0 + u_1) v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \rho v_1 v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \rho v_2 g = 0 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(6), (7) の条件を用い

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p}{\partial x} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \rho(u_0 + u_1) u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \rho v_2 g = 0 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

流関数 ψ_1, ψ_2 を、つぎのように定義する。

$$u_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (15)$$

連続方程式(5)は式(15)により明らかに満足される。

渦動運動の渦度は

$$\zeta_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

表面波の渦度は

$$\zeta_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで $\psi_2=0$ のとき、すなわち表面波が存在しないときは、

$$\frac{D\zeta_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right\} + \left(u_0 - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \times \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right\} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

が非粘性の条件のもとでは明らかに成立する。

ψ_2 が存在し、 x, y, t の関数であるとき、 $\psi_1 + \psi_2$ からなる運動に現われる ψ_1 につき式(18)を求めることはできないが、この計算では式(18)がこの場合にも成

*正員 工博 運輸省港湾技術研究所

**表面波についての非線型性を許すときは、その第2次近似以上の項をふくむ解では多少の変化を生ずる。

立するものと仮定する。すなわち、与えられた渦動の渦度は定常であり、表面波によって影響を受けないものとする。式(18)を仮定するとき、式(3)、(4)より p を消去し、式(15)の ψ_1, ψ_2 を用いれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \left(u_0 - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad \dots(19)$$

いま、基本表面波を考え、その周期、波長、および流速をそれぞれ T_2, L_2, C_2 ($L_2 = C_2 T_2$) とする。また ψ_1 の長さを代表する量として L_1 とする。これらを用いて無次元量をつぎのように設定する。すなわち

$$\psi_1 = C_2 L_1 \psi_1', \quad \psi_2 = C_2 L_2 \psi_2', \quad \eta = L_2 \eta', \quad p = L_2 \rho g p',$$

$$t = T_2 t', \quad x = L_2 x', \quad y = L_2 y' \quad \text{および} \quad u_0 = C_2 u_0' \quad \text{である。}$$

これを用いて ψ_2 に関する渦度方程式(19)および表面条件式(9)、(14)を無次元形式で表わすと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial y'^2} \right) + \left(u_0' - \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \right) \\ & \times \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial y'^2} \right) + \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial x'^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \psi_2'}{\partial y'^2} \right) - \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y'^2} \right) \frac{\partial \psi_2'}{\partial y'} \\ & + \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y'^2} \right) \frac{\partial \psi_2'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \left(u_0' - \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \right) \frac{\partial \eta'}{\partial x'} = \frac{\partial \psi_2'}{\partial x'} \quad (y'=0 \text{にて}) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & g \frac{\partial p'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial p'}{\partial x'} g - \frac{L_1}{L_2} g \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial p'}{\partial x'} - \frac{L_1}{L_2} \frac{C_2}{T_2} \frac{\partial \psi_2'}{\partial y'} \\ & \times \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y' \partial t'} - \frac{C_2}{T_2} \left(u_0' - \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \right) \frac{\partial \psi_2'}{\partial y'} \frac{L_1}{L_2} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} \\ & - \frac{\partial \psi_2'}{\partial x'} g = 0 \quad (y'=0 \text{にて}) \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ここで $\frac{L_1}{L_2} = \alpha, \frac{C_2}{T_2} = \beta$ とおけば、 $\frac{\beta}{g} = r$ は明らかに1の位数である。 α は任意にとることができるが、この問題では渦動の長さの尺度は基本表面波のそれにくらべてかなり小さいものとする。したがって $\alpha \ll 1$ となり、 α についてのせつ動を用いて式(20)、(21)、(22)を展開する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \psi_2' &= \psi_{20}' + \alpha \psi_{21}' + \alpha^2 \psi_{22}' + \alpha^3 \psi_{23}' + \dots\dots\dots \\ \eta' &= \eta_0' + \alpha \eta_1' + \alpha^2 \eta_2' + \alpha^3 \eta_3' + \dots\dots\dots \\ p' &= p_0' + \alpha p_1' + \alpha^2 p_2' + \alpha^3 p_3' + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad \dots(23)$$

を式(20)、(21)、(22)に代入し、 α の同じべきの項を比較すれば、式(20)より

$$\frac{\partial}{\partial t'} D^2 \psi_{20}' + u_0' \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{20}' = 0 \quad \dots\dots\dots(24-1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} D^2 \psi_{21}' + u_0' \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{21}' - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{20}' \\ & + \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} D^2 \psi_{20}' - \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} \\ & + \frac{\partial}{\partial y'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(24-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} D^2 \psi_{22}' + u_0' \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{22}' - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{21}' \\ & + \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y'} D^2 \psi_{21}' - \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial y'} \\ & + \frac{\partial}{\partial y'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(24-3) \end{aligned}$$

ただし、 $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$ とする。

式(21)より表面条件として

$$\frac{\partial \eta_0'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial \eta_0'}{\partial x'} = \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial x'} \quad \dots\dots\dots(25-1)$$

$$\frac{\partial \eta_1'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial \eta_1'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial \eta_0'}{\partial x'} = \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial x'} \quad \dots\dots\dots(25-2)$$

$$\frac{\partial \eta_2'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial \eta_2'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial \eta_1'}{\partial x'} = \frac{\partial \psi_{22}'}{\partial x'} \quad \dots\dots\dots(25-3)$$

式(22)より同じく表面条件として

$$\frac{\partial p_0'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial p_0'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(26-1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_1'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial p_1'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial p_0'}{\partial x'} - r \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y' \partial t'} \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} \\ & - r u_0' \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(26-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_2'}{\partial t'} + u_0' \frac{\partial p_2'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial p_1'}{\partial x'} - r \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y' \partial t'} \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial y'} \\ & - r u_0' \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} + r \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} - \frac{\partial \psi_{22}'}{\partial x'} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(26-3)$$

以上の諸式のほかに式(23)による p' の決定のためには、 x -方向または y -方向の運動方程式を必要とする。ここでは x -方向の運動方程式を用いることとし、上と同じく α についてのせつ動を用いて

$$-\frac{\partial^2 \psi_{20}'}{\partial t' \partial y'} - u_0' \frac{\partial^2 \psi_{20}'}{\partial x' \partial y'} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_0'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(27-1)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial t' \partial y'} - \frac{\partial^2 \psi_{21}'}{\partial t' \partial y'} - u_0' \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} \\ & - u_0' \frac{\partial^2 \psi_{21}'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_{20}'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y'^2} \\ & - \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi_{20}'}{\partial y'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_1'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(27-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 \psi_{22}'}{\partial t' \partial y'} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial x' \partial y'} - u_0' \\ & \times \frac{\partial^2 \psi_{22}'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial \psi_1'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi_{21}'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y'^2} - \frac{\partial \psi_{21}'}{\partial x'} \\ & \times \frac{\partial^2 \psi_1'}{\partial y'^2} - \frac{\partial \psi_1'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi_{21}'}{\partial y'^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(27-3) \end{aligned}$$

以下、式(24)、(25)、(26)、(27)を用いて第2次近似まで求めることとする。

2. 1次近似および2次近似

(1) 1次近似

$\psi_{20}', \eta_0', p_0'$ をつぎのようにおく。

$$\psi_{20}' = \varphi_{20}'(y') e^{i 2 \pi (\omega' t' - x')} \quad \dots\dots\dots(28-1)$$

$$\eta_0' = A_0' e^{i 2 \pi (\omega' t' - x')} \quad \dots\dots\dots(28-2)$$

$$p_0' = D_0'(y') e^{i 2 \pi (\omega' t' - x')} - y' \quad \dots\dots\dots(28-3)$$

式(28-1)より

$$D^2 \psi_{20}' = \left\{ -4 \pi^2 \varphi_{20}'(y') + \frac{\partial^2 \varphi_{20}'(y')}{\partial y'^2} \right\} e^{i 2 \pi (\omega' t' - x')}$$

これを式 (24-1) に代入して

$$\left\{ -4\pi^2\varphi_{20}'(y') + \frac{\partial^2\varphi_{20}'(y')}{\partial y'^2} \right\} (u_0' - 1) = 0$$

一般に $u_0' - 1 \neq 0$ は満足されるから

$$\frac{\partial^2\varphi_{20}'(y')}{\partial y'^2} - 4\pi^2\varphi_{20}'(y') = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

ここで $y' \rightarrow -\infty$ で $\varphi_{20}' \rightarrow 0$ の物理的条件を考えれば式 (29) より

$$\varphi_{20}'(y') = B_{20}' e^{2\pi y'} \quad \dots\dots\dots(30)$$

式 (29) より $D^2\varphi_{20}' = 0$, すなわち φ_{20}' による運動は非回転である。

つぎに式 (28-2) および式 (30) を表面条件式 (25-1) に代入すれば

$$B_{20}' = A_0'(u_0' - 1) \quad \dots\dots\dots(31)$$

式 (28-3) の $D_0'(y')$ は式 (27-1) を用いて決定することができる。すなわち

$$D_0'(y') = 2\pi r A_0'(u_0' - 1)^2 e^{2\pi y'} \quad \dots\dots\dots(32)$$

r の値は表面の力学条件式 (26-1) により決定せられる。

$$r = \frac{1}{2\pi(u_0' - 1)^2} \quad \dots\dots\dots(33)$$

これらを用いて式 (28-1), (28-2), (28-3) を書き直せば, つぎのように簡単になる。

$$\varphi_{20}' = A_0'(u_0' - 1) e^{2\pi y' + i 2\pi(x' - t')} \quad \dots\dots\dots(34-1)$$

$$\eta_0' = A_0' e^{i 2\pi(x' - t')} \quad \dots\dots\dots(34-2)$$

$$p_0' = A_0' e^{2\pi y' + i 2\pi(x' - t')} - y' \quad \dots\dots\dots(34-3)$$

もちろん, これらの実部のみを使用する。

(2) 2次近似

ここで, われわれは表面で $v_1 = 0$ を満足し, かつ式 (18) を満足する ψ_1 を極力簡単に計算しやすい形で与えなければならない。いまそのような ψ_1 を ψ_{10} とし, その代表成分をつぎのようにおく。

$$\psi_{10} = -\frac{u_{100}}{k_1} \cos k_3(x - u_0 t) \sin k_3 y \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$\text{ただし } k_1 = \frac{2\pi}{L_1}, \quad k_3 = \frac{2\pi}{L_3} \text{ とし, } \frac{L_1}{L_2} = \alpha, \quad \frac{L_3}{L_2} = \alpha'$$

とする。したがって

$$u_{10} = \frac{u_{100}}{k_1} k_3 \cos k_3(x - u_0 t) \cos k_3 y$$

$$v_{10} = \frac{u_{100}}{k_1} k_3 \sin k_3(x - u_0 t) \sin k_3 y$$

$$\zeta_{10} = \frac{\partial v_{10}}{\partial x} - \frac{\partial u_{10}}{\partial y} = \frac{2u_{100}}{k_1} k_3^2 \cos k_3(x - u_0 t) \sin k_3 y$$

この ψ_{10} は条件式 (18) を満足する。

ψ_{10} を変形して

$$\psi_{10} = -\frac{C_2 L_1 u_{100}'}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{L_3}(x' - t') \sin \frac{2\pi}{L_2} y'$$

したがって無次元形式は

$$\begin{aligned} \psi_{10}' &= -\frac{u_{100}'}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\alpha'}(x' - t') \sin \frac{2\pi}{\alpha'} y' \\ &= -\frac{u_{100}'}{2\pi} \cos k'(x' - t') \sin k' y', \quad \text{ただし } \frac{2\pi}{\alpha'} = k' \end{aligned}$$

このような ψ_{10}' の一般的表現を求めると

$$\psi_{10}' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{8\pi i} (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} e^{ik'(x'+y')}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{8\pi i} (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} e^{ik'(x'-y')} \dots\dots(36)$$

この場合, 実数値定常過程の考えを用いており $du_{100}'(k')$ は $du_{100}'(k') = \overline{du_{100}'(-k')}$ (bar は共軛値を示す) を満足する無相関増分であるが, ψ_{10}' に課せられた表面条件から, その位相角は x -方向の過程にのみ関係するものとしている。この ψ_{10}' はスペクトルを持っているが, そのスペクトルムの形は 1. に与えられたせつ動の取り扱いと矛盾しないものとする。

式 (36) から

$$\begin{aligned} u_{10}' &= -\frac{\partial \psi_{10}'}{\partial y'} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{8\pi} k' (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'+y')} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{8\pi} k' (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'-y')} \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{10}' &= \frac{\partial \psi_{10}'}{\partial x'} = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{du_{100}'(k')}{8\pi} k' (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'+y')} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{8\pi} k' (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'-y')} \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{10}' &= D^2 \psi_{10}' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{4\pi i} k'^2 (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'+y')} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_{100}'(k')}{4\pi i} k'^2 (\text{sgn } k') e^{-ik'u_0't'} \\ &\quad \times e^{ik'(x'-y')} \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

他方, 式 (34-1), (34-2), (34-3) から (ただし $2\pi = k_0'$ ($k_0' > 0$)) とする)

$$\begin{aligned} \psi_{20}' &= \frac{A_0'(u_0' - 1)}{2} e^{k_0' y'} \{ e^{ik_0'(x' - t')} + e^{-ik_0'(x' - t')} \} \\ &\quad \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

$$\eta_0' = \frac{A_0'}{2} \{ e^{ik_0'(x' - t')} + e^{-ik_0'(x' - t')} \} \quad \dots\dots\dots(41)$$

$$p_0' = \frac{A_0'}{2} e^{k_0' y'} \{ e^{ik_0'(x' - t')} + e^{-ik_0'(x' - t')} \} - y' \quad \dots\dots\dots(42)$$

渦度方程式としては式 (24-2) を用い, かつ $D^2\psi_{20}' = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} D^2 \psi_{21}' + u_0' \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_{21}' - \frac{\partial}{\partial x'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial y'} \\ + \frac{\partial}{\partial y'} D^2 \psi_1' \frac{\partial \psi_{20}'}{\partial x'} = 0 \quad \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

式 (39), (40) に示される $D^2\psi_1'$, ψ_{20}' を式 (43) に代入し, $D^2\psi_{21}' (= \zeta_{21}')$ を求めると

$$\begin{aligned} \zeta_{21}' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} A_0' du_{100}'(k')}{8\pi} (\text{sgn } k') k'^3 \left[e^{i\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right)} \right. \\ &\quad \times e^{(k_0' + ik')y'} e^{i(k_0' + k')x'} e^{-i(k_0' + k'u_0')t'} + e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + 2n\pi\right)} \\ &\quad \times e^{(k_0' + ik')y'} e^{-i(k_0' - k')x'} e^{-i(k_0' - k'u_0')t'} + e^{i\left(\frac{3}{4}\pi - 2n\pi\right)} \\ &\quad \times e^{(k_0' - ik')y'} e^{i(k_0' + k')x'} e^{-i(k_0' + k'u_0')t'} + e^{i\left(\frac{5}{4}\pi + 2n\pi\right)} \\ &\quad \times e^{(k_0' - ik')y'} e^{-i(k_0' - k')x'} e^{-i(k_0' - k'u_0')t'} \left. \right] \dots\dots\dots(44) \end{aligned}$$

同次方程式 $D^2\psi_{21}' = 0$ の解は, つぎの形におくことができる。

$$\psi_{21}'^{(\pm)} = \sum A'_{\beta'}(t') e^{\pm i\beta'x' + \beta'y'}, \quad \text{ただし } R(\beta') > 0 \dots\dots(45)$$

したがって ψ_{21}' の一般解は

$$\begin{aligned} \psi_{21}' &= \sum_{R(\beta') > 0} A'_{\beta'}(t') e^{\pm i\beta'x' + \beta'y'} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} A_0' du_{100}'(k')}{16\pi} (\text{sgn } k') k'^2 \left[\frac{1}{ik_0' - k' - k_0'} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{\frac{i}{4}\pi+2n\pi} e^{(k_0'+ik')y'} e^{i(k_0'+k')x'} e^{-i(k_0'+k'u_0')t'} \\
& + \frac{1}{ik_0'-k'+k_0'} e^{\frac{i}{4}\pi+2n\pi} e^{(k_0'+ik')y'} e^{-i(k_0'-k)x'} \\
& \times e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} + \frac{1}{-ik_0'-k'-k_0'} e^{\frac{i}{4}\pi+2n\pi} e^{(k_0'-ik')y'} \\
& \times e^{i(k_0'+k')x'} e^{-i(k_0'+k'u_0')t'} + \frac{1}{-ik_0'-k'+k_0'} \\
& \times e^{\frac{i}{4}\pi+2n\pi} e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k_0'-k')x'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'}] \\
& \dots(46)
\end{aligned}$$

このようにして ψ_{21}' が得られたから、式 (27-2) を用いれば p_1' がつぎの形に得られる。

$$\begin{aligned}
p_1' &= r_{R(\beta') > 0} \left\{ \pm i \frac{\partial A_{\beta'}(t')}{\partial t'} + \beta' u_0' A_{\beta'}(t') \right\} \\
& \times e^{\pm i\beta'x' + \beta'y' + \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{A_0' du_{100}'(k')}{8\pi} (\text{sgn } k') (u_0' - 1)} \\
& \times k' k_0'^2 \left[\frac{-1}{ik_0'-k'-k_0'} e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'+ik')y'} \right. \\
& \times e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} + \frac{1}{ik_0'-k'+k_0'} e^{i(k_0'-k_0')x'} e^{(k_0'+ik')y'} \\
& \times e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} - \frac{1}{-ik_0'-k'-k_0'} e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'-ik')y'} \\
& \times e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} + \frac{1}{-ik_0'-k'+k_0'} e^{i(k-k_0')x'} \\
& \times e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'}] \dots\dots\dots(47)
\end{aligned}$$

$A_{\beta'}(t')$ の決定のためには表面の力学的条件式(26-2)を用いる。この計算を行なうと ψ_{21}' と p_1' との終局的な形はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
\psi_{21}' &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k') e^{i(k_0'+k')x'} e^{i(k_0'+k')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(k') e^{i(k'-k_0')x'} e^{i(k'-k_0')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0' du_{100}'(k')}{16\pi} (\text{sgn } k') k'^2 \left[\frac{-1-i}{ik_0'-k'-k_0'} \right. \\
& \times e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'+ik')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} + \frac{-1+i}{ik_0'-k'+k_0'} \\
& \times e^{i(k'-k_0')x'} e^{(k_0'+ik')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} + \frac{-1+i}{-ik_0'-k'-k_0'} \\
& \times e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} + \frac{-1-i}{-ik_0'-k'+k_0'} \\
& \times e^{i(k'-k_0')x'} e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'}] \dots\dots\dots(48) \\
p_1' &= -r \int_{-\infty}^{\infty} [\{\text{sgn}(k_0'+k')\} (k'u_0'+k_0') - |k_0'+k'|u_0'] A_1(k') e^{i(k_0'+k')x'} e^{i(k_0'+k')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} \\
& - r \int_{-\infty}^{\infty} [\{\text{sgn}(k'-k_0')\} (k'u_0'-k_0') - |k'-k_0'|u_0'] \\
& \times A_2(k') e^{i(k'-k_0')x'} e^{i(k'-k_0')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{A_0' du_{100}'(k')}{8\pi} (\text{sgn } k') (u_0' - 1) k' k_0'^2 \\
& \times \left[\frac{-1}{ik_0'-k'-k_0'} e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'+ik')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} \right. \\
& + \frac{1}{ik_0'-k'+k_0'} e^{i(k'-k_0')x'} e^{(k_0'+ik')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'} \\
& - \frac{1}{-ik_0'-k'-k_0'} e^{i(k_0'+k')x'} e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} \\
& + \frac{1}{-ik_0'-k'+k_0'} e^{i(k'-k_0')x'} e^{(k_0'-ik')y'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'}] \\
& \text{ただし} \dots\dots\dots(49) \\
A_1(k') &= -\frac{A_0' du_{100}'(k') (\text{sgn } k')}{8\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{2r(u_0'-1)^2 k' k_0'^3 (k'+k_0') + k' (2k_0'^3 + 2k_0'^2 k' - k'^3)}{(2k_0'^2 + 2k_0' k' + k'^2) [\{\text{sgn}(k'+k_0')\} k_0'^2/2\pi - (k_0'+k')] } \\
& \dots(50) \\
A_2(k') &= -\frac{A_0' du_{100}'(k') (\text{sgn } k')}{8\pi} \\
& \times \frac{2r(u_0'-1)^2 k' k_0'^3 (k'-k_0') - k' (2k_0'^3 - 2k_0'^2 k' + k'^3)}{(2k_0'^2 - 2k_0' k' + k'^2) [\{\text{sgn}(k'-k_0')\} k_0'^2/2\pi - (k'-k_0')] } \\
& \dots(51)
\end{aligned}$$

式 (48) の第1項、第2項は表面条件式 (26-2) により決定せられた非回転表面波を示しているが、その波速は通常の表面条件より求められた波速とはまったく異なったものである。

以上の結果を式 (25-2) に代入すれば、第2位の表面水位変動 η_1' はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_0' du_{100}'(k')}{k_0' (u_0' - 1) 8\pi} (\text{sgn } k') k' \right. \\
& \times \frac{k'^3 - 2k' k_0'^2 - 2k_0'^3}{k'^2 + 2k' k_0' + 2k_0'^2} + \frac{A_1(k') (k_0' + k')}{k_0' (u_0' - 1)} \\
& \times e^{i(k_0'+k')x'} e^{-i(k'u_0'+k_0')t'} \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{A_0' du_{100}'(k')}{k_0' (u_0' - 1) 8\pi} (\text{sgn } k') k' \right. \\
& \times \frac{k'^3 - 2k' k_0'^2 + 2k_0'^3}{2k_0'^2 - 2k_0' k' + k'^2} + \frac{A_2(k') (k' - k_0')}{k_0' (u_0' - 1)} \\
& \times e^{i(k'-k_0')x'} e^{-i(k'u_0'-k_0')t'}] \dots\dots\dots(52)
\end{aligned}$$

式 (23) の展開によれば、 $\alpha\eta_1'$ は渦動の存在のために基本表面波の波形の上に生じた変形の近似的表現であると考えることができる。

3. η_1' の数値計算

式(52)に現われた2つの積分において、おのおのその第1項は基本表面波と渦動との干渉により生じた渦度を持つ運動による表面変形を、第2項はこのような表面変形をふくむ運動が表面において圧力一定(非粘性の仮定をおいているから、せん断力については考えない)の条件を満たすために生ずる非回転の2次表面波により生ずる表面変形を示している。もちろん、この計算においては既述したように、1.のせつ動条件が成立することが必要であり、したがって $|k'|$ が大きいところでは $|du_{100}'(k')|$ は十分小でなければならない。このように η_1' の中には2つの要素がふくまれている。これらが互いにどのように作用しあうかを検討するために、表-1の数値計算を行なった。式(52)の第1の積分中の第1項を $A_0' du_{100}'(k')$ m_1 、第2項を $A_0' du_{100}'(k')$ m_2 、第2の積分中の第1項を $A_0' du_{100}'(k')$ n_1 、第2項を $A_0' du_{100}'(k')$ n_2 で表わせば、同表には k' の値に対応する m_1 , m_2 , n_1 , n_2 の値が示されている。 u_0' としては +0.3, 0, -0.3 ととった。結果はいずれの場合にも m_1 , m_2 および n_1 , n_2 がそれぞれ互いに打ち消し合い、2次の表面変形が生じにくいことを示している。

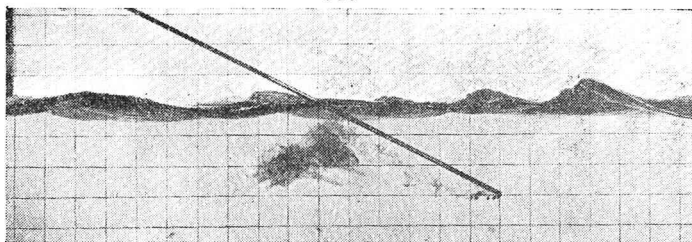
4. 写真例

以上の計算により、1.に与えられた表面条件のもとで

表—1

u_0'	k'	m_1	m_2	m_1+m_2	$\frac{m_1}{m_2}$	n_1	n_2	n_1+n_2	$\frac{n_1}{n_2}$
+0.3	6π	-1.19748	+0.92437	-0.27311	-1.2955	-4.9286	+8.1429	+3.2143	-0.60526
	10π	-5.45367	+5.84942	+0.39575	-0.93234	-12.2899	+15.2661	+2.9762	-0.80504
	20π	-28.6300	+30.7844	+2.1544	-0.93000	-42.7700	+47.2343	+4.4643	-0.90549
	100π	-857.156	+873.586	+16.430	-0.98118	-928.556	+947.161	+18.605	-0.98036
	200π	-3500.01	+3534.31	+34.30	-0.99035	-3642.84	+3679.29	+36.45	-0.99010
	-6π	+4.9286	-8.1429	-3.2143	-0.60526	+1.19748	-0.92437	+0.27311	-1.2955
	-10π	+12.2899	-15.2661	-2.9762	-0.80504	+5.45367	-5.84942	-0.39575	-0.93235
	-20π	+42.7700	-47.2343	-4.4643	-0.90549	+28.6300	-30.7844	-2.1544	-0.93002
	-100π	+928.556	-947.161	-18.605	-0.98036	+857.156	-873.586	-16.430	-0.98119
	-200π	+3642.84	-3679.29	-36.45	-0.99010	+3500.01	-3534.31	-34.30	-0.99030
-0.3	6π	-0.64480	+0.49774	-0.14706	-1.2955	-2.65385	+4.38462	+1.7308	-0.60526
	10π	-2.93659	+3.14963	+0.21309	-0.93234	-6.61765	+8.22023	+1.6026	-0.80504
	20π	-15.4162	+16.5762	+1.1600	-0.93002	-23.0300	+25.4338	+2.4038	-0.90549
	100π	-461.546	+470.392	+8.846	-0.98117	-499.992	+510.010	+10.018	-0.98036
	200π	-1884.63	+1903.09	+18.46	-0.99030	-1961.53	+1981.15	+19.62	-0.99010
	-6π	+2.65385	-4.38462	-1.7308	-0.60526	+0.64480	-0.49774	+0.14706	-1.2955
	-10π	+6.61765	-8.22023	-1.6026	-0.80504	+2.93659	-3.14963	-0.21309	-0.93235
	-20π	+23.0300	-25.4338	-2.4038	-0.90549	+15.4162	-16.5762	-1.1600	-0.93002
	-100π	+499.992	-510.010	-10.018	-0.98036	+461.546	-470.392	-8.846	-0.98119
	-200π	+1961.53	-1981.15	-19.62	-0.99010	+1884.63	-1903.09	-18.46	-0.99030
0	6π	-0.83824	+0.64706	-0.19118	-1.2955	-3.45	+5.70	+2.25	-0.60526
	10π	-3.8176	+4.0946	+0.2770	-0.93235	-8.6029	+10.6863	+2.0834	-0.80504
	20π	-20.041	+21.549	+1.508	-0.93002	-29.939	+33.064	+3.125	-0.90549
	100π	-600.01	+611.51	+11.50	-0.98119	-649.99	+663.01	+13.02	-0.98036
	200π	-2450.0	+2474.0	+24.0	-0.99030	-2550.0	+2575.5	+25.50	-0.99010
	-6π	+3.45	-5.70	-2.25	-0.60526	+0.83824	-0.64706	+0.19118	-1.2955
	-10π	+8.6029	-10.6863	-2.0834	-0.80504	+3.8176	-4.0946	-0.2770	-0.93235
	-20π	+29.939	-33.064	-3.125	-0.90549	+20.041	-21.549	-1.5080	-0.93002
	-100π	+649.989	-663.013	-13.024	-0.98036	+600.01	-611.51	-11.50	-0.98119
	-200π	+2550.0	-2575.5	-25.50	-0.99010	+2450.0	-2474.0	-24.0	-0.99030

写真—1



写真—2



写真-3

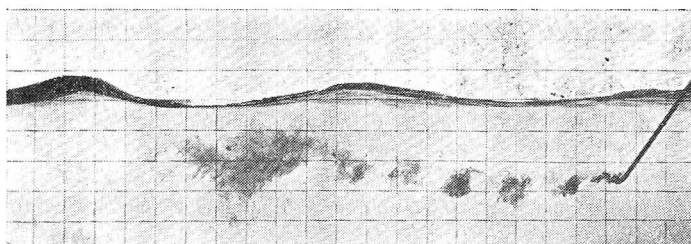
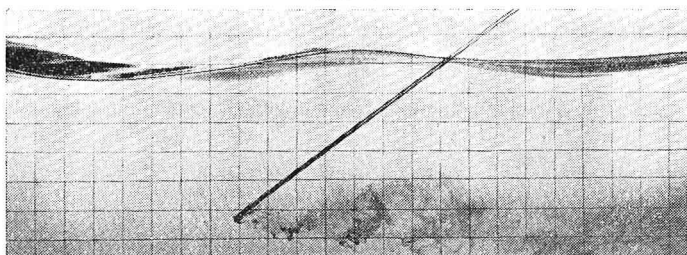


写真-4



はたとえ流れが相当の渦度を持っているとしても、そこにある表面波の表面はなめらかであることが予想される。

他方、直接風の影響をうけている風波の表面に波長、数 mm から 1~2 cm 程度の顕著な不規則性が現われることはよく知られている。風洞水路において流れの流速を約 15 cm/sec とし、その流水の表面に風速約 11 m/sec で風波を生ぜしめて撮影した写真が写真-1,2 であり、写真-1 は流れの方向と波の進行方向とが一致している場合、写真-2 は流れの方向が波の進行に逆方向の場合である。両者ともに表面の不規則な凸凹がよく現われている。写真中の格子の間隔は 5 cm であり、流れのもつ乱れは混入された色素により示されている。

これに対し、写真-3,4 は水表面に作用している風を

途中で排風し、無風状態のところに進入した風波を示し、水流の状態は上の場合と同様である。写真-3 は波と流れが同方向に進むとき、写真-4 は波と流れが逆方向に進む場合である。流水のもつ乱れは色素によりよく示されているが、表面の不規則な凸凹は消失している。

なお、数値計算および写真例の撮影において加藤始君の協力を得た。

参考文献

- 1) Phillips, O.M.: The scattering of gravity waves by turbulence, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 5 (1959).
- 2) Phillips, O.M.: A note on the Turbulence generator by gravity waves, Journal of Geophysical Research Vol. 66, (1961).