

海岸における砂の粒径分布について

防衛大学校 理学博士 溝 口 裕
同 上 小 木 正 道

1. 緒 言

非対称の粒径分布を表わす式として、古くから種々の式が知られている¹⁾。そのおもなものとして、対数正規分布の式、Gaudin の式 (1926)、Rosin-Rammler の式 (1933)、Weinig の式 (1933)、Slad の式 (1936)、Roller の式 (1937)、Martin の式 (1939)、Heywood の式、Fagerholt の式 (1945)、Iwai-Matsuo の有限対数正規分布の式 (1949, 1951)、その他が知られている。これらの分布式はどれもあらゆる粒径分布に対して当てはまるというものではないようである。海岸における砂の粒径分布を表わす分布式の研究は今まであまりなされていないように思われる。Bagnold²⁾ は、粒径を対数で表わすと分布がほとんど対称型になるような砂漠の砂丘における砂の粒径分布を対数正規分布曲線

$$N = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2(\log d - \log d_0)^2} \dots\dots\dots (1.1)$$

と比較して、図—1 に示すような結果を得ている。これから Bagnold は実際の砂の $\log N$ は $\log d$ に関して放物線

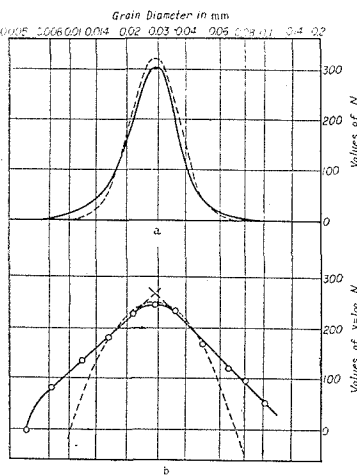
$$\log N = -a^2(\log d - \log d_0)^2 + \log B \dots\dots\dots (1.2)$$

ではなく双曲線に似ていることを述べている。

房総半島の平砂浦における砂の移動の研究において、Roller の分布式³⁾を適用してみた。この Roller の分布式は理論的根拠と特性表示の容易な点で、また比較的適用範囲が広い点で有用なものとして知られている。

著者の1人(小木)⁴⁾はこの適用にさいして Roller の分布式を検討した結果新しい分布式を導き、実測データと比較的よい一

図—1 砂漠の砂の粒径分布曲線(実線)と対数正規分布曲線(点線)との比較(Bagnold)



2. Roller の分布式の検討

Roller の分布式は

$$w = a\sqrt{d} e^{-b/d} \dots\dots\dots (2.1)$$

で表わされる。ここで w は d より小さい粒径をもつ粒子の重量百分率、 a, b は正の定数である。(2.1) 式を d で微分することにより重量頻度曲線

$$\frac{dw}{d(d)} = a \left(\frac{1}{2\sqrt{d}} + \frac{b}{\sqrt{d}^3} \right) e^{-b/d} \dots\dots\dots (2.2)$$

が得られる。数理統計学でよく知られている Pearson 分布曲線の第 V 型は

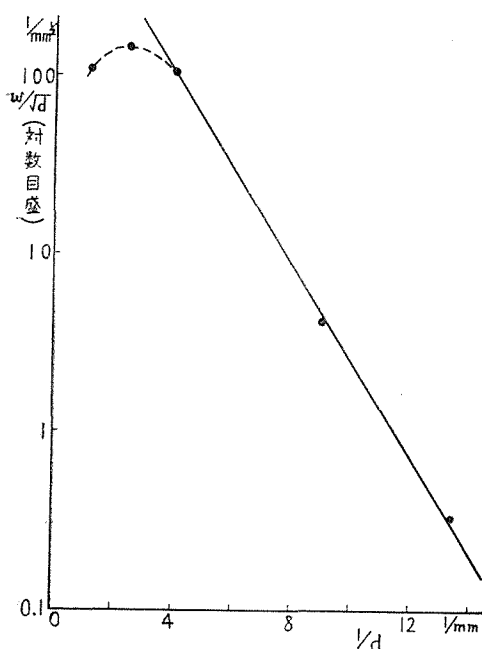
$$y = y_0 x^{-s} e^{-r/x} \dots\dots\dots (2.3)$$

で表わされるので、Roller の頻度曲線 (2.2) は、 $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ の2つの Pearson 分布曲線の第 V 型を結合したものであると見ることができる。ところで (2.3) 式は、 $r > 0$ の場合 $s > 1$ の時のみ区間 $(0, \infty)$ で積分可能であることが容易に示される。Roller の頻度曲線 (2.2) を構成する1つの Pearson の第 V 型分布曲線は $s = \frac{1}{2} < 1$ の場合に相当するから、Roller の頻度曲線 (2.2) を区間 $(0, \infty)$ で積分すると発散することが知られる。このことはまた直接 (1.1) 式において $x \rightarrow \infty$ の極限値を求めることにより確かめることもできる。(2.1) 式を書き直すと

$$\log \frac{w}{\sqrt{d}} = \log a - \frac{b}{d} \dots\dots\dots (2.4)$$

が得られる。したがってこの方程式により $w/\sqrt{d}$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して画いた曲線は直線になる。これが Roller の分布式の特性格線と呼ばれるものである。この特性格線は (2.4) 式からわかるように負の勾配をもった直線である。また一般に $w/\sqrt{d}$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して画いた曲線は特性格線と呼ばれる。図—2 は海岸における砂に Roller 式を適用して比較的よい適合性を得た場合の特性格線の一例である。この図—2 において示されているように、実測値によって特性格線を描くと多くは、 d の大きい値において $1/d$ が減少するにつれ $\log w/\sqrt{d}$ が増加しないで減少するいわゆる regressive なる現象が起こる。この現象は明らかに (2.2) 式の右辺の関数の区間 $(0, \infty)$ における積分

図-2 海岸の砂に対する Roller の特性曲線例



が発散することに関係している。すなわち (2.1) 式の右辺の関数は $d \rightarrow \infty$ とともに限りなく増大するのに対して実測値の w は有限であるためである。

Roller は細かい粒子を重視したため、regressive なる現象の起こる部分を除いて論ずることができ実測とかなりよい一致を得ている。海岸における砂に適用した図-2 の例では 0.40 mm 程度の粒径で regressive なる現象の起こるのが見られるが、海岸における砂を取扱う場合には粗い粒子はかならずしも無視できない。また理論的にも regressive なる現象の起こらない分布式が望ましいものと思われる。

3. 分布式と特性曲線

前節で述べた観点から新しい分布式を求めることを試みた。すなわち、 $s > 1$ である Pearson の第 V 型分布曲線 (2.3) をもちい、しかもその特性表示の容易なものを求めた結果次に述べる分布式を得た。まず $s=2, 3$ なる 2 つの Pearson の第 V 型分布曲線を結合して次のような重量頻度曲線を仮定する。

$$\frac{dw}{d(d)} = a \left(\frac{b-1}{d^2} + \frac{b}{d^3} \right) e^{-b/d} \dots (3.1)$$

ここで a, b は正の定数である。前節で述べたことから、(3.1) 式の右辺の関数を d について区間 $(0, \infty)$ で積分したものは収束する。(3.1) 式を d について積分すると粒径が d (mm) より小さいすべての粒子の重量百分率すなわち重量累加曲線として

$$w = a \left(1 + \frac{1}{d} \right) e^{-b/d} \dots (3.2)$$

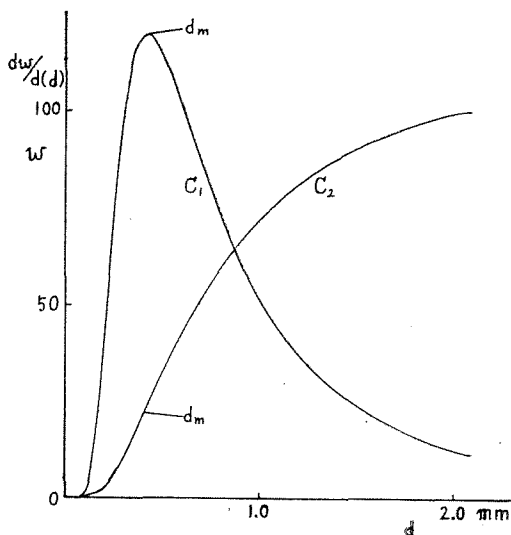
を得る。重量と個数との関係

$$dw = 10^{-1} \rho d^3 dn \dots (3.3)$$

を考慮すると、(3.1) 式から個数頻度曲線として

$$\frac{dn}{d(d)} = 10 \frac{a}{\rho} \left(\frac{b-1}{d^2} + \frac{b}{d^3} \right) e^{-b/d} \dots (3.4)$$

が得られる。ここで n は粒子の個数、 ρ は密度を表わすものとする。一般には簡単のため個数頻度曲線より重量頻度曲線が用いられることが多い。曲線 (3.1), (3.2) はそれぞれ図-3 における C_1, C_2 によって示される。

図-3 重量頻度曲線 (C_1) と重量累加曲線 (C_2) の例

(3.1) 式が $d = d_m$ で極大になるとすれば、 d_m の値は (3.1) 式の導関数を 0 とおくことにより求められる。したがって d_m は曲線 (3.2) の変曲点である。

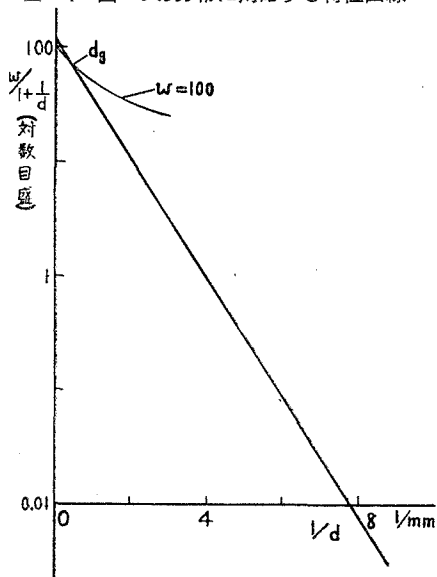
$$d_m = \frac{b(b-4) + b\sqrt{b^2 + 4}}{4(b-1)} \dots (3.5)$$

(3.5) 式から頻度曲線が極大になる粒径すなわちモード d_m は分布式 (3.1) あるいは (3.2) における定数 b によって決定されることがわかる。分布式 (3.1) あるいは (3.2) における定数 a, b は実測データから図的に決定される。(3.2) 式を書きなおすと

$$\log \frac{w}{1+1/d} = \log a - \frac{b}{d} \dots (3.6)$$

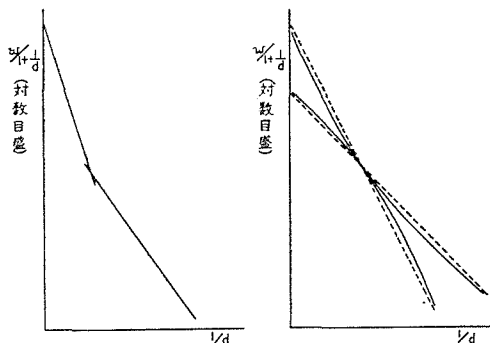
この方程式によって $w/1+1/d$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して画いた曲線は図-4 に示すように負の勾配をもった直線になる。この直線を分布式 (3.2) の特性直線と呼ぶことにする。また一般に $w/1+1/d$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して画いた曲線を特性曲線と呼ぶことにする。特性直線 (3.6) と $\log w/1+1/d$ 軸との交点が $\log a$ であり、特性直線の勾配が $-b$ である。すでに述べたようにこの特性直線にはいわゆる regressive なる現象は起きない。しかしこの特性直線の縦軸の値が、ある粒径より大きい粒径に対して、すべての粒子の粒径がその粒

図—4 図—3の分布に対応する特性曲線



径より小さいとした場合の値すなわち $\log 100/1 + \frac{1}{d}$ より大きくなることゝ起る。したがってこの分布の最大粒径 d_g は特性直線 (3.6) と同じ座標系に対して画かれた曲線 $w=100$ との交点として図的に求められる。解析的には方程式 (3.2) を d について解くことにより求められるが、このことは困難である。すでに述べたように (3.6) 式により $w/1 + \frac{1}{d}$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して画いた曲線は直線になるが、実測データから得られる特性曲線は時々1つの直線でなくて2つの直線になったり、凹あるいは凸型の曲線になる場合がある。このような場合が 図—5 に示してある。2直線になる場合は分布する範囲のちがった2つの分布の混合よりなると

図—5 特性曲線の例



考えられる。海岸における砂の場合には表層を粗い砂粒がおおっている場所で採集した資料にみられる特徴である。2つ以上の分布が混合する場合でもその分布範囲が同じであれば特性曲線は直線になる。特性曲線が凹あるいは凸型になるのは一方が粗い方に集中し、他方が細かい方に集中して混合しているものと考えることができる。

また後で示すように海岸の砂に適用した場合に特性曲線が部分的に直線からはずれているものがみられるが、これはその粒径の近傍の砂粒が何かの原因によってより多くまたは少なくなっていることを示すものと考えることができる。実測データでは 0.25, 0.4 mm の粒径にこの現象がみられるが、これらの海岸では波または風によって移動しやすい砂の粒径がこの程度の大きさであることを示すものと考えることができる。たとえば風によって移動しやすい砂粒の粒径がこの程度の大きさであることはよく知られていることである。粉体における重要な物理量として 1g 当りの表面積 S および 1g 当りの粒子の個数 N がある。これらの量は分布式 (3.2) にふくまれる定数 a, b によって表わすことができる。

$$S = \frac{6a(b+1)}{10\rho b^2} \left\{ 1 + \frac{b}{x_g} + \frac{1}{b+1} \left(\frac{b}{x_g} \right)^2 \right\} e^{-b/x_g} \quad (3.7)$$

$$N = \frac{60a(b+3)}{\rho b^3} \left\{ 1 + \frac{b}{x_g} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{x_g} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{b}{x_g} \right)^3 + \frac{1}{6(b+3)} \left(\frac{b}{x_g} \right)^4 \right\} e^{-b/x_g} \quad (3.8)$$

4. 実測データとの比較

房総半島の平砂浦における砂の粒径分布に関連して得られた分布式 (3.2) を鹿島灘の北の東海村海岸および相模湾の茅ヶ崎市海岸における砂に適用した結果をしらべてみよう。試料は汀線にほぼ直角方向に汀線から陸地に向かって適当な間隔をおいて、直径 5 cm の円筒を砂地におし込み 5 cm の厚さに採集したものである。茅ヶ崎海岸の試料の No. 201~206 は 10 cm の厚さに採集したものを 5 cm ずつ上、下2つの部分にわけたものであり、No. 207~212 は 30 cm の厚さに採集したものを 5 cm ずつ6つの部分にわけたものである。採集した試料の分析にはフルイ分け法を用いた。

分布式 (3.2) の適合性の決定は、実測値により $w/1 + 1/d$ を対数目盛で表わし $1/d$ に対して図示し、実測値を示す点を通る最良と思われる直線を引く方法を用いた。ただしすでに述べたような 0.25 および 0.40 mm の粒径の点において部分的にいちじるしく直線からはずれる場合はそれらの点を除いて引いてある。結果の一部は 表—1, 2 に示されている。これらの結果はフルイ分け法の精度および海岸砂の粒径分布がある点の近傍においてさへかならずしも同一でないことを考慮すると比較的よく一致しているものと見られる。表—1 の No. 101, 104, 105, 112 および 表—2 の No. 203, 204, 207~212 は特性曲線が2つの直線からなるが、これらは比較的細かい粒からなる砂層の上を粗い粒からなる砂層がおおっている地点のデータである。とくに 表—2 の No. 207~212 の試料を採集した地点ではこの混合がやや深いところにまでおよんでいた。この比較的細かい砂層と粗い砂層は

表一 東海村海岸における砂の重量累加百分率と計算値と実測値との差

試料番号	汀から距離(m)	線径(mm)	粒 径 (mm)					特性曲線	中 間 径		
			2.0	0.85	0.40	0.25	0.18	0.15	0.11	の 形 状	d_{50} (mm)
101	0			50.65 -0.57 95.52	23.30 -0.15 62.92	13.40* -0.10 14.98	1.38 0.00 1.98	0.37 0.00 0.68	0.02 0.00 0.03	2 直線	0.84
102	10			0.00 97.26	-28.44 79.18	-5.98 19.37	+0.05 3.23	-0.01 1.27	+0.03 0.15	1 直線	0.35
103	20			0.00 99.72*	-38.58 37.27	-6.77 14.95	+0.05 3.53	0.00 1.38	-0.01 0.22	"	0.31
104	40	(0.00)		-0.94 99.73*	+1.58 47.37	-2.35 18.13	0.00 7.45	0.00 1.84	-0.05 0.74	2 直線	0.46
105	48	(0.00)		0.00 99.30	+2.52 68.11	-0.85 20.74	0.00 3.19	0.02 0.95	+0.01 0.11	"	0.90
106	53			0.00 89.87	-28.21 64.31	-8.99 21.76	-0.24 3.30	+0.12 1.02	0.00 0.15	1 直線	0.34
107	58			0.00 99.00	-24.06 56.42	-9.66 15.07	-0.17 2.49	+0.13 0.91	-0.03 0.16	"	0.33
108	61			0.00 88.11	-18.27 46.02	-4.42 14.51	+0.09 2.91	0.00 0.97	-0.07 0.12	"	0.37
109	66			0.00 96.98	-9.97 57.36	-3.66 14.46	-0.09 4.38	+0.07 1.76	-0.01 0.30	"	0.43
110	69			0.00 97.89	-13.26 67.55	+0.39 24.26	0.00 3.48	0.00 1.11	0.00 0.15	"	0.37
111	74			0.00 84.74	-26.95 29.48	-11.86 9.42	-0.20 2.02	+0.12 0.80	-0.02 0.15	"	0.33
112	84	99.49* (0.00)		-4.19 82.94	+1.46 35.83	-0.72 12.51	+0.08 2.91	-0.06 1.18	-0.08 0.23	2 直線	0.52
113	94			0.00	-0.83	-1.56	+0.04	-0.06	-0.10	1 直線	0.50

* 印は2直線にわかれる粒径を示す。

表二 茅ヶ崎海岸における砂の重量累加百分率と計算値と実測値との差

試料番号	汀から距離(m)	線径(mm)	粒 径 (mm)						特性曲線の形状	中間径 d_{50} (mm)	
			2.0	0.85	0.40	0.25	0.18	0.15			0.11
201	6		73.43 +1.27	46.26 0.00	20.10 -5.85	3.11 0.00	0.62 -0.04	0.17 0.00	0.03 -0.02	1直線	0.96
202	"		87.22 -4.27	52.98 0.00	21.87 -4.58	4.02 +0.03	0.83 -0.02	0.25 0.00	0.01 +0.01	"	0.80
203	10		55.22 (0.00)	35.56 (0.00)	15.29* —	2.29 +0.01	0.55 -0.07	0.13 +0.02	0.01 0.00	2直線	1.65
204	"		96.27 (0.00)	75.67 (0.00)	53.54* —	12.54 0.00	3.45 -0.07	1.19 +0.09	0.09 +0.05	"	0.38
205	20			98.59 0.00	57.44 -23.35	8.51 0.00	1.91 -0.09	0.52 +0.06	0.03 +0.02	1直線	0.37
206	"			98.71 0.00	60.56 -21.01	11.60 0.00	3.06 -0.11	0.95 +0.12	0.08 +0.03	"	0.36
207	30		98.61 -1.11	71.81 +3.08	37.84 -2.84*	5.70 0.00	1.85 0.00	0.84 -0.04	0.10 +0.02	2直線	0.51
208	"		95.75 0.00	23.27 -0.80	2.21 +0.05*	0.63 0.00	0.28 +0.01	0.16 0.00	0.05 -0.01	"	1.10
209	"		80.90 (0.00)	9.59 (0.00)*	2.16 0.00	0.51 +0.02	0.16 -0.05	0.04 0.00		"	1.55
210	"		89.25 (0.00)	19.44 (0.00)	6.22* —	1.09 0.00	0.33 -0.02	0.11 0.00	0.01 +0.01	"	1.35
211	"		93.52 (0.00)	80.96 (0.00)*	56.66 0.00	14.90 0.00	3.52 -0.17	1.07 +0.12	0.04 +0.06	"	0.39
212	"			98.90 (0.00)	78.11 (0.00)*	13.69 +0.31	3.13 -0.09	0.90 +0.09	0.05 +0.03	"	0.33

* 印は2直線にわかれる粒径を示す。

別な条件のもとで堆積したものと考えられるが、このことが異なった勾配をもつ2つの特性直線で表わされるのは興味あることである。

また 0.25 および 0.40 mm の粒径の点でいちじるしく直線からはずれているものが見られるが、これはすでに述べたようにこれらの海岸においてこの程度の粒径の砂粒の移動が多いことを示しているものと考えることができる。このような現象は中間径 d_{50} 0.30~0.45 mm 程度の大きさの砂においていちじるしい。

表一3 は表一 の No. 102, 表二 の No. 204 の試料の粒径別の比重である。細かい砂粒は量が少ないのでおのおのの表の全試料を混合したものについて測定されているものがあるが、それらは*印を付して表わしてある。この表によると粒径の小さいところで比重が大きくなっている。これは砂鉄が混入しているためと思われる

表一3 粒径別の比重

試料番号	粒径(mm)	4.8	2.0	0.85	0.40	0.25	0.18	0.15	0.11
		2.0	0.85	0.40	0.25	0.18	0.15	0.11	
102			2.63	2.63	2.63	2.63	2.62	2.66	3.50*
204		2.68	2.63	2.63	2.71	2.82	2.93*	3.38*	4.3*

が、小さい粒径に対してはその補正が必要であろう。鉄と砂との混合したものの比重が3.5であるとき、鉄の比重を7.86、砂の比重を2.6として鉄と砂との体積比を求めると1/5程度である。

4. 結 言

以上房総半島の平砂浦における砂に関して得られた粒径分布式(3.2)の適合性が、東海村海岸および茅ヶ崎海岸における砂に対して調べられた。結果は比較的良好と

思われるが、今後各地の海岸における砂に対して適合性を調べたいと考えている。

この研究にあたって、文部省科学研究費による援助、現地調査には防衛大学校土木教室の御協力と陸上自衛隊勝田施設学校の御好意による便宜とを得た。また試料の採集、分析には高橋久人技手の御協力を得た。ここに深く感謝の意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 例えば Dallavalle, J. M.: Micromeritis, (1948).
- 2) Bagnold, R. A.: The physics of blown sand and desert dunes, 1960.
- 3) Roller, P. S.: Journal of the Franklin Institute, 223, 609~633, (1937).
- 4) Ogi, M.: Memoirs of the Defence Academyに 発表予定。
- 6) 例えば河村竜馬: 科学, 18, 500~506, (1948).