

個々の堤体を延長方向に連結した場合の防波堤の安定

室蘭工業大学教授 工学博士 能 町 純 雄
北海道土木部港湾課 石 倉 建 治

要 旨 防波堤や堰などの構造物が個々に不等沈下を起こさないか、あるいはそれを考慮する必要のないような構造で個々の堤体とその延長方向に連結された場合、その安定に関する解析を試みたものである。

1. 概 説

いま簡単のため、堆石上にケーソンを列べて築造された防波堤を例にとる。その上部場所詰めコンクリートは各ケーソンごとに区切るのが普通であるが、上述のような仮定が成立するならば、個々の堤体は一種のジベルで連結され、互いに力を伝達し合っているような構造と考えられるから、局所的な波力に対し、防波堤は堤体の基礎底面における摩擦力で抵抗するのはもちろんであるが、そのほかに堤体相互の間に働く有効せん断抵抗力が考えられる。著者等はこの考え方にもとづき、任意の堤体に作用した波力がほかの堤体に伝達される状況を差分方程式によって表現し、一般解を求め、基礎底面の摩擦力と堤体相互間のせん断力に対する影響線図の求め方を示した。ただし、波力は静力学的に取扱うものとする。

2. 基本式の誘導

防波堤が $n+1$ 個のケーソンから形成されているものとし、ジベルの番号とケーソンの番号を図-1のように

図-1

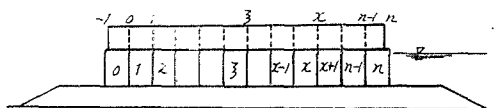
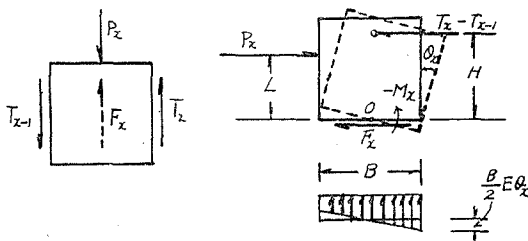


図-2

図-3



とる。いま x 番目のケーソンを取り出して、O 点のまわりのモーメントの釣合を考えれば (図-2, 3)

$$P_x \cdot L - (T_x - T_{x-1}) \cdot H - K \theta_x = 0 \quad (1)$$

ここに

θ_x : ケーソン x の傾き

E : 基礎の支持力係数 (kg/cm²)

M_x : 基礎部の反力が底部中央点 O のまわりにつく
る抵抗モーメント

$$\text{とすれば、} M_x = \frac{1}{12} E B^3 \theta_x, \text{したがって } K = \frac{1}{12} E B^3$$

ところが、 T_x はケーソン x に作用した外力 P_x によって生ずるケーソン x と $x+1$ のジベル点におけるずれに比例すると考えられるから

$$\left. \begin{aligned} -T_x &= CH(\theta_{x+1} - \theta_x) \\ C: \text{ジベル常数 (kg/cm)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\therefore -(T_x - T_{x-1}) = CH(\theta_{x+1} - 2\theta_x + \theta_{x-1})$$

いま $\theta_{x+1} - 2\theta_x + \theta_{x-1} = \Delta^2 \theta_x$ とおくと (1) 式は

$$CH^2 \Delta^2 \theta_x - K \theta_x = -P_x L \quad (3)$$

$$\therefore \Delta^2 \theta_x - \alpha \theta_x = -\beta P_x$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{K}{CH^2}, \quad \beta = \frac{L}{CH^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

これが弾性基礎上にジベル結合された連鎖状構造物の基本差分方程式である。

3. 基本差分方程式の解

(4) 式の一般解は次のとおりである。

$$\theta_x^{(1)} = A \frac{\sinh x\eta}{\sinh n\eta} + B \frac{\sinh (n-x)\eta}{\sinh n\eta} \quad (5)$$

ここに η は $\cosh \eta = 1 + \frac{\alpha}{2}$

を満足する値である。

次に相似荷重群 (Affinlasten) によれば

$$P_x = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{P}_i \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (6)$$

$$\bar{P}_i = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n+1} P_x \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (7)$$

の関係がある。そこで (1) 式の特解は次のように求める。

$$\Delta^2 \theta_x - \alpha \theta_x = -\beta \sum_{i=1}^{n+1} \bar{P}_i \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (8)$$

ここで

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \sin \frac{i\pi x}{n} \quad (9)$$

とおけば

$$\Delta^2 \theta_x = 2 \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right) \sin \frac{i\pi x}{n}$$

$$\alpha \theta_x = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \sin \frac{i\pi x}{n}$$

$$\therefore \Delta^2 \theta_x - \alpha \theta_x = \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \left\{ 2 \left(\cos \frac{i\pi}{n} - 1 \right) - \alpha \right\} \sin \frac{i\pi x}{n}$$

$$\therefore \nu_i \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi i}{n} - 1 \right) - \alpha \right\} = -\beta \bar{P}_i$$

$$\therefore \nu_i = \frac{\beta \bar{P}_i}{\left\{ \alpha - 2 \left(\cos \frac{\pi i}{n} - 1 \right) \right\}}$$

$$\therefore \theta_x^{(2)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta \bar{P}_i}{\left\{ \alpha - 2 \left(\cos \frac{\pi i}{n} - 1 \right) \right\}} \sin \frac{i \pi x}{n} \dots (10)$$

よって θ_x の解は

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^{(1)} + \theta_x^{(2)} \\ &= A \frac{\sinh x \eta}{\sinh n \eta} + B \frac{\sinh(n-x) \eta}{\sinh n \eta} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta \bar{P}_i}{\left\{ \alpha - 2 \left(\cos \frac{\pi i}{n} - 1 \right) \right\}} \sin \frac{i \pi x}{n} \dots (11) \end{aligned}$$

いま波力が $x=\xi$ にのみ作用しているとすれば、(10) 式の Affinlasten の級数項は連続関数に対する Fourier 級数項のごとく、次のようにかくことができる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\beta \bar{P}_i}{\left\{ \alpha - 2 \left(\cos \frac{\pi i}{n} - 1 \right) \right\}} \sin \frac{i \pi x}{n} &= \beta P_\xi G_\eta(\xi, x) \\ &= \begin{cases} \beta P_\xi \frac{\sinh(n-\xi) \eta \sinh x \eta}{\sinh n \eta \sinh \xi \eta} & (x \leq \xi) \\ \beta P_\xi \frac{\sinh(n-x) \eta \sinh \xi \eta}{\sinh n \eta \sinh \xi \eta} & (x \geq \xi) \end{cases} \dots (12) \end{aligned}$$

4. 境界条件と未定係数 A, B の決定

(1) 両端自由

$\xi=n$ のとき

$$P_\xi = P_n, \xi \neq n \text{ では } P_x = 0, T_n = 0 \text{ (ゆえ (1) 式より)}$$

$$P_n \cdot L + T_{n-1} \cdot H - K \theta_n = 0 \dots (13)$$

上式に (2) の関係と、 $K = \alpha CH^2 = 2CH^2(\cosh \eta - 1)$ を代入して整理すれば

$$\beta P_n + (1 - 2 \cosh \eta) \theta_n + \theta_{n-1} = 0 \dots (14)$$

いま ξ , すなわち $x=n$ の場合であるから (11) 式の一般解において荷重による第3項は存在しない。それを (14) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \beta P_n + A(1 - 2 \cosh \eta) + B \frac{\sinh(n-1) \eta}{\sinh n \eta} \\ + B \frac{\sinh \eta}{\sinh n \eta} = 0 \\ \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} A - \sinh \eta \cdot B \\ - \beta P_n \cdot \sinh n \eta = 0 \dots (15) \end{aligned}$$

$x=0$ では $P_0=0, T_{-1}=0$ (ゆえ (1) 式より)

$$\theta_1 + (1 - 2 \cosh \eta) \theta_0 = 0 \dots (16)$$

同様に (11) 式を代入して整理すれば

$$\sinh \eta \cdot A - \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} B = 0 \dots (17)$$

(15), (17) より A, B を求めれば

$$A = \beta P_n \frac{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta}{\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \dots (18)$$

$$B = \beta P_n \frac{\sinh \eta}{\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \dots (19)$$

$$\therefore \theta_x = \beta P_n$$

$$\frac{\sinh x \eta \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} - \sinh(n-x) \eta \cdot \sinh \eta}{\sinh n \eta \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \dots (20)$$

$\xi \neq n, 1 \leq \xi \leq n-1$ のとき

$$P_0, P_n, P_{x \neq \xi} = 0, T_n = 0 \text{ (ゆえ (1) 式より)}$$

$$(1 - 2 \cosh \eta) \theta_n + \theta_{n-1} = 0 \dots (21)$$

これに (11) 式を代入し整理すれば

$$\begin{aligned} \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} A - \sinh \eta \cdot B \\ - \beta P_\xi \sinh \xi \eta = 0 \dots (22) \end{aligned}$$

また、 $x=0$ では $P_0=0, T_{-1}=0$ (ゆえ (1) 式より)

$$\theta_1 + (1 - 2 \cosh \eta) \theta_0 = 0 \dots (23)$$

同様に (11) 式を代入し整理すれば

$$\begin{aligned} \sinh \eta \cdot A - \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} B \\ - \beta P_\xi \sinh(n-\xi) \eta = 0 \dots (24) \end{aligned}$$

(22), (24) 式より A, B を求めると

$$\begin{aligned} A &= \beta P_\xi \\ &\cdot \frac{\sinh \xi \eta \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} - \sinh(n-\xi) \eta \cdot \sinh \eta}{\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \dots (25) \end{aligned}$$

$$B = \beta P_\xi$$

$$\frac{\sinh \xi \eta \cdot \sinh \eta - \sinh(n-\xi) \eta \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}}{\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \dots (26)$$

$$\begin{aligned} \therefore \theta_x &= \frac{\beta P_\xi}{\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\}^2 - \sinh^2 \eta} \sinh n \eta \\ &\times \{ \{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} \{\sinh x \eta \sinh \xi \eta \\ &- \sinh(n-x) \eta - \sinh(n-x) \eta \sinh(n-\xi) \eta\} \\ &+ \sinh \eta \{\sinh(n-x) \eta \sinh \xi \eta \\ &- \sinh x \eta \sinh(n-\xi) \eta\} - \beta P_\xi \cdot G_\eta(\xi, x) \} \dots (27) \end{aligned}$$

(2) 一端固定他端自由

ケーソン0を陸岸とみなし、ケーソン1が0に固定され、 n が自由とする。

$\xi=n$ のとき

$$P_\xi = P_n, \xi \neq n \text{ では } P_x = 0 \text{ である。また } \theta_0 = 0 \text{ であるから (11) 式より}$$

$$B = 0 \dots (28)$$

$$\therefore \theta_x = A \frac{\sinh x \eta}{\sinh n \eta} \dots (29)$$

$x=n$ で自由であるから、 $T_n=0$ (ゆえ (1) 式より)

$$P_n L + T_{n-1} \cdot H - K \theta_n = 0 \dots (30)$$

$$\beta P_n + (1 - 2 \cosh \eta) \theta_n + \theta_{n-1} = 0 \dots (31)$$

$\xi=n$ であるから (11) 式の第3項は存在しない。これを (31) 式に代入して整理すれば

$$\{\sinh(n+1) \eta - \sinh n \eta\} A = \beta P_n \sinh n \eta \dots (32)$$

$$\therefore A = \beta P_n \frac{\sinh n\eta}{\sinh(n+1)\eta - \sinh n\eta}$$

$$\therefore \theta_x = \beta P_n \frac{\sinh x\eta}{\sinh(n+1)\eta - \sinh n\eta} \dots\dots\dots (33)$$

$\xi \neq n$ のとき

$\theta_0 = 0$ であるから (11) 式より $B = 0$ で

$$\theta_x = A \frac{\sinh x\eta}{\sinh n\eta} + \beta P_\xi G_\eta(\xi, x) \dots\dots\dots (34)$$

$x = n$ で自由であるから $T_n = 0$, また $\xi \neq n$ ゆえ $P_n = 0$ ゆえに (1) 式より

$$T_{n-1} \cdot H - K\theta_n = 0 \dots\dots\dots (35)$$

前と同様に (34) を (35) に代入して

$$A(1 - 2 \cosh \eta) + A \frac{\sinh(n-1)\eta}{\sinh n\eta} + \beta P_\xi \cdot G_\eta(\xi, n-1) \dots\dots\dots (36)$$

$$\therefore A = \beta P_\xi \frac{G_\eta(\xi, n-1)}{\frac{\alpha}{2} + \coth n\eta \sinh \eta} \dots\dots\dots (37)$$

$$\theta_x = \beta P_\xi \left\{ \frac{\sinh x\eta \cdot G_\eta(\xi, n-1)}{\sinh(n+1)\eta - \sinh n\eta} + G_\eta(\xi, x) \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(3) 両端固定

ケーソン 0, n を陸岸とみなし, ケーソン 1, $n-1$ がそれぞれ固定されているものとすれば, θ_0, θ_n ともに 0 である。従って (11) 式よりただちに

$$A = 0, B = 0$$

を得る。よって θ_x の一般式は荷重項のみにより

$$\theta_x = \beta P_\xi \cdot G_\eta(\xi, x)$$

$$= \begin{cases} \beta P_\xi \frac{\sinh(n-\xi)\eta \sinh x\eta}{\sinh n\eta \sinh \eta} & (x \leq \xi) \\ \beta P_\xi \frac{\sinh(n-x)\eta \sinh \xi\eta}{\sinh n\eta \sinh \eta} & (x \geq \xi) \end{cases} \dots\dots\dots (39)$$

5. ジベルに作用するせん断力 T_x

(1) 両端自由

$\xi = n, \xi \neq n$ のとき

(2) 式にそれぞれ (20), (27) を代入して得られる。

(2) 一端固定他端自由

$\xi = n$ のとき

$$T_x = -\frac{P_n L}{H} \cdot \frac{\cosh\left(x + \frac{1}{2}\right)\eta}{\cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta} \dots\dots\dots (40)$$

$$T_{n-1} = -\frac{P_n L}{H} \cdot \frac{\cosh\left(x - \frac{1}{2}\right)\eta}{\cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta} \dots\dots\dots (41)$$

$$T_0 = -\frac{P_n L}{H} \cdot \frac{\cosh \frac{\eta}{2}}{\cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta} \dots\dots\dots (42)$$

$\xi \neq n$ のとき

(2) 式に (38) を代入して

$$T_x = -\frac{P_\xi L}{H} \left\{ \frac{\cosh\left(x + \frac{1}{2}\right)\eta}{\cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta} \cdot G_\eta(\xi, n-1) + G_\eta(\xi, x+1) - G_\eta(\xi, x) \right\} \dots\dots\dots (43)$$

(3) 両端固定の場合

(2) 式に (39) を代入して

$$T_x = -\frac{P_\xi L}{H} \{ G_\eta(\xi, x+1) - G_\eta(\xi, x) \} \dots\dots\dots (44)$$

6. 基礎断面に働く摩擦抵抗力 F_x

図-2 で水平方向の力の釣合より, 力の作用点を ξ とすれば,

すなわち $x = \xi$ のとき

$$P_\xi - (T_\xi - T_{\xi-1}) - F_\xi = 0 \dots\dots\dots (45)$$

(1) 式より

$$-(T_\xi - T_{\xi-1}) = \frac{P_\xi L}{H} + \frac{K}{H} \theta_\xi \dots\dots\dots (46)$$

これを (45) に代入し

$$F_\xi = P_\xi \left(1 - \frac{L}{H} \right) + \frac{K}{H} \theta_\xi \dots\dots\dots (47)$$

$x \neq \xi$ ならば $P_x = 0$ ゆえ

$$F_x = \frac{K}{H} \theta_x \dots\dots\dots (48)$$

(47), (48) によりそれぞれの境界条件に応じて F_x が求まる。

(1) 一端固定他端自由

$$F_\xi = P_\xi \left\{ \left(1 - \frac{L}{H} \right) + \alpha \frac{L}{H} \left\{ \frac{\sinh \xi\eta \cdot G_\eta(\xi, n-1)}{\sinh(n+1)\eta - \sinh n\eta} + G_\eta(\xi, \xi) \right\} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

$$F_x = \alpha \frac{P_\xi L}{H} \left\{ \frac{\sinh x\eta \cdot G_\eta(\xi, n-1)}{\sinh(n+1)\eta - \sinh n\eta} + G_\eta(\xi, x) \right\} \dots\dots\dots (50)$$

(2) 両端固定

$$F_\xi = P_\xi \left\{ \left(1 - \frac{L}{H} \right) + \alpha \frac{L}{H} \cdot G_\eta(\xi, x) \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$F_x = \alpha \frac{P_\xi L}{H} \cdot G_\eta(\xi, x) \dots\dots\dots (52)$$

7. 基礎の支持力係数 k と E

地盤の性質は基礎の支持力係数 k (kg/cm^3) をもって表わされ, 例えば $k = 10 \text{ kg}/\text{cm}^3$ とは, $10 \text{ kg}/\text{cm}^2$ の力により地盤が 1 cm 沈下あるいは持上るということの意味し, いわば地盤の硬さを表わす尺度である。 E は k に断面に対する奥行の単位巾をかけたものである。

8. ジベル常数 C

C は隣り合ったケーソンの間に単位のずれを生じた時のせん断力であるが, ケーソン $x+1$ と x の間の微小なずれを 図-4 のように表わせば, 図-5 のように上部場

所詰めコンクリートで連結された場合、せん断力の定義により次の関係が導かれる。

ただし r : せん断ひずみ
 G : せん断弾性係数 (kg/cm^2)
 τ : せん断応力 (kg/cm^2)
 T : せん断力 (kg)
 δ : ケーソンの微小変位 (cm)
 e : ケーソン $x+1$ と x の間げき (cm)

図-4

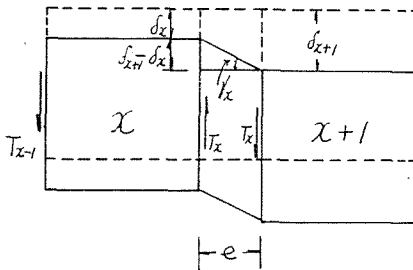
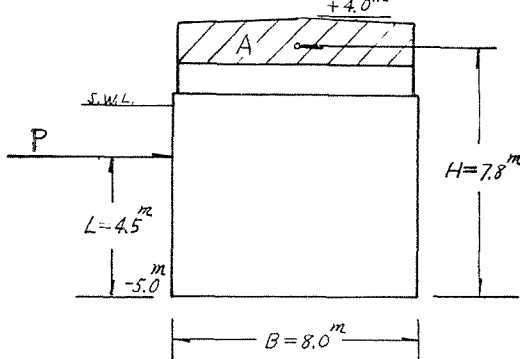


図-5



$$\frac{\delta_{x+1} - \delta_x}{e} = \tau_x \quad (53)$$

$$G \cdot \tau_x = \tau_x \quad (54)$$

$$-T_x = \tau_x A = G \cdot \tau_x \cdot A = G \frac{\delta_{x+1} - \delta_x}{e} \cdot A \quad (55)$$

$$\delta_x = H \cdot \theta_x \quad (\text{図-3}) \quad (56)$$

(2) と (55), (56) の関係より

$$G \frac{\delta_{x+1} - \delta_x}{e} A = C(\delta_{x+1} - \delta_x)$$

$$\therefore C = \frac{GA}{e} \quad (57)$$

9. 計算例

図-5 で

$$A = 11 \times 10^4 \text{ cm}^2$$

$$e = 5 \text{ cm}$$

$$G = 10^4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (場所打ちコンクリートのせん断弾性係数)}$$

とすれば, (57) 式より

$$C = 2.2 \times 10^4 \text{ kg/cm}$$

$$k = 10 \text{ kg/cm}^3 \text{ とすれば, 単位巾 (m) に対し}$$

$$K = \frac{1}{12} EB^3 = \frac{1}{12} \times 10^4 \times 100 \times 8^3 \times 10^8 = 42.7 \times 10^4$$

$$\alpha = \frac{K}{CH^2} = \frac{42.7 \times 10^4}{2.2 \times 10^4 \times 7.8^2 \times 10^4} = 3.2 \times 10^{-3} \approx 0$$

$$\therefore \cosh \eta = 1 + \frac{\alpha}{2} \approx 1 \text{ したがって } \eta \approx 0 \quad (58)$$

これは 図-5 のハッチ部分の場所詰めコンクリートを仮りに強固に連結すれば, 防波堤全体が一体となって外力に抵抗するというにほかならない。いま (58) の関係を使って, 一端固定他端自由の場合について T_x , F_x を求めれば

$\xi = n$ のとき (40) 式より

$$T_x = -\frac{P_n L}{H} \quad (59)$$

$\xi \neq n$ のとき (43) より

$$T_x = -\frac{P_\xi L}{H} \{ G'_\eta(\xi, n-1) + G'_\eta(\xi, x+1) - G'_\eta(\xi, x) \} \\ = -\frac{P_\xi L}{H} \left\{ \frac{\xi}{n} + G'_\eta(\xi, x+1) - G'_\eta(\xi, x) \right\} \quad (60)$$

ここに

$$G'_\eta(\xi, x) = \begin{cases} \frac{(n-\xi)x}{n} & (x \leq \xi) \\ \frac{(n-x)\xi}{n} & (x \geq \xi) \end{cases}$$

$x = \xi$ のとき (49) 式より

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_\xi = P_\xi \left[\left(1 - \frac{L}{H} \right) + \alpha \frac{L}{H} \left\{ \frac{\xi^2}{n} + \frac{(n-\xi)\xi}{n} \right\} \right] \\ \therefore F_\xi = P_\xi \left(1 - \frac{L}{H} + \alpha \frac{L}{H} \xi \right) \approx P_\xi \left(1 - \frac{L}{H} \right) \quad (61)$$

$x \neq \xi$ のとき (50) 式より

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_x = \alpha \frac{P_\xi L}{H} \left\{ x \cdot \frac{\xi}{n} + G'_\eta(\xi, x) \right\} \quad (62)$$

以上により, せん断力については cantilever の場合と全く同じ形となり, その大きさは (59) 式で与えられる。また F_x は $x = \xi$ のとき (61) で与えられ P_ξ にくらべ一般に非常に小さくなり, $x \neq \xi$ ではほとんど 0 に近い。なお, x を一定とし, ξ を変化させて T_ξ , F_ξ を求めれば x 点の影響線が得られる。

10. 結 語

ここで最も重要な係数は, 基礎地盤の支持力係数 k である。 k はいろいろの地盤により値が異なるので, k と C の値いかんによっては, さきの計算例はやや複雑となる。しかし, おおむね $n\eta > 2$ となれば, 各公式は単純化される。結論として, 要旨で述べた仮定が成立する場合には, 個々の単塊堤は少なくともその上部において連結された方が有利であると考えられる。なお, k についてはさらに研究を進めたい。

参 考 文 献

- 1) Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau. Berlin (1921)
- 2) 能町純雄: トラスト・ガーダーの応力解析について, 技術資料, 第 17 号, 昭 36. 2
- 3) 能町・尾崎: 合成桁のチヤムについて, 技術資料, 第 17 号, 昭 36. 2
- 4) 林 泰造・服部昌太郎・林 憲吉: 砕波の圧力と壁体の滑動, 第 7 回海岸工学講演会講演集, (1960)
- 5) 能町・石倉: 個々の堤体を延長方向に連結した場合の防波堤の安定, 土木学会年次学術講演会, 昭和 36 年 5 月