

流れをさかのぼる波についての一計算

運輸技術研究所 工学博士 浜 田 徳 一
同 上 加 藤 始

この計算は放物線型流速分布をした流れを、線型化された定常な浅水波がさかのぼる場合についてのものであり、おのおのの性質について一様流速分布の流れの場合との比較がなされている。水深有限なく（もちろん密度は一定とする）水路での安定な流れの流速分布は通常いわゆる対数法則か指数法則かに従っており、これらは単に分布曲線の傾向だけから見ると、一様流速分布と放物線型流速分布との中間的なものとなっている。ほかの場合についてこまかく検討することは容易ではないが、この二者について比較すれば他の場合も境界層の問題などをのぞいてはこれに似たものと考えてよいのではなかろうか。

今一様水深を $h = \text{const.}$ ($y = -h$)、水路は重力に垂直な方向と θ の傾きをもって流れているとすれば、 x 軸を流れの方向に、 y 軸をそれに垂直上向きにとり（ただし後述の数値計算では $\cos \theta \rightarrow 1$ とおきうる程度に θ は小であるとしている）、放物線型流速分布はなんらかの意味における一様分布の動粘性係数 ν_1 を用い、

$$u_1 = \frac{g \sin \theta}{2 \nu_1} (h^2 - y^2) \quad (1)$$

線型化された波の連続運動方程式は

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

今 $\nu_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right)$, $\nu_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right)$ が波の基本的な性質に影響をおよぼさないものとして省略し、かつ次のような流関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \psi &= \varphi(y) e^{im(x-ct)} \\ \varphi(-h) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

よって (2), (3), (4) より

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} (u_1 - c) + \varphi(y) \left[m^2 (c - u_1) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (6)$$

$$\text{今 } h^2 - \frac{2 \nu_1 c}{g \sin \theta} = \beta h^2 = h_1^2, \quad \beta = 1 - \frac{c}{u_{10}} \quad (7)$$

[u_{10} は $u_1(y=0)$ を意味する]

とおけば今の場合 $c < 0$, $u_{10} \geq 0$ であるから $\beta > 1$ である。かつ (6) より

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{2}{h_1^2 - y^2} - m^2 \right) \varphi(y) = 0 \quad (8)$$

$h_1^2 > h^2$ であるから、(8) は $y=0$ 近傍の解を求めればよい。表面条件は波形を

$$\eta = A_0 e^{im(x-ct)} \quad (9)$$

とおいて

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_2 \quad (y=0) \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_{10} \frac{\partial p}{\partial x} = v_2 \rho g \cos \theta \quad (y=0) \quad (11)$$

(5), (8), (9), (10), (11) を満足する解は

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (12)$$

とおいて

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_0 (u_{10} - c) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) y^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\beta^2 h^4} \right\} y^4 \\ &\quad + \left\{ \frac{-1}{720} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^3 + \frac{7}{180} \frac{1}{\beta^2 h^4} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{15} \frac{1}{\beta^3 h^6} \right\} y^6 + \frac{1}{40320} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{11}{5040} \frac{1}{\beta^2 h^4} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{105} \frac{1}{\beta^2 h^6} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) - \frac{5}{168} \frac{1}{\beta^4 h^8} \right\} y^8 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= A_0 (u_{10} - c) \frac{F_2}{h} \left[y - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) y^3 \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{120} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^2 - \frac{1}{10} \frac{1}{\beta^2 h^4} \right\} y^5 \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{5040} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^3 + \frac{13}{1260} \frac{1}{\beta^2 h^4} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{21} \frac{1}{\beta^3 h^6} \right\} y^7 + \left\{ \frac{1}{362880} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{45360} \frac{1}{\beta^2 h^4} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{189} \frac{1}{\beta^2 h^6} \left(\frac{2}{\beta h^2} - m^2 \right) - \frac{1}{40} \frac{1}{\beta^4 h^8} \right\} y^9 + \dots \end{aligned} \quad (13)'$$

$$\beta^2 F_2 = \frac{gh \cos \theta}{u_{10}^2} \quad (14)$$

ただし

$$F_2 = \frac{\left[1 - \frac{1}{2} (2 - \beta h^2 m^2) \frac{1}{\beta} + \left\{ \frac{1}{24} (2 - \beta h^2 m^2)^2 - \frac{1}{6} \right\} \frac{1}{\beta^2} \right]}{\left[1 - \frac{1}{6} (2 - \beta h^2 m^2) \frac{1}{\beta} + \left\{ \frac{1}{120} (2 - \beta h^2 m^2)^2 - \frac{1}{10} \right\} \frac{1}{\beta^2} \right]}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{-1}{720} (2 - \beta h^2 m^2)^3 + \frac{7}{180} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{15} \right\} \frac{1}{\beta^3} \\
& + \left\{ \frac{-1}{5040} (2 - \beta h^2 m^2)^3 + \frac{13}{1260} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{21} \right\} \frac{1}{\beta^3} \\
& + \left\{ \frac{1}{40320} (2 - \beta h^2 m^2)^4 - \frac{11}{5040} (2 - \beta h^2 m^2)^2 \right. \\
& + \left. \left\{ \frac{1}{362880} (2 - \beta h^2 m^2)^4 - \frac{17}{45360} (2 - \beta h^2 m^2)^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{105} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{5}{168} \right\} \frac{1}{\beta^4} + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{1}{189} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{40} \right\} \frac{1}{\beta^4} + \dots \Big] \dots (13)''
\end{aligned}$$

速度 u_2, v_2 は

$$\begin{aligned}
u_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \cdot e^{im(x-ct)} \dots (15) \\
v_2 &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = (\varphi_1 + \varphi_2) e^{im(x-ct)} \cdot im
\end{aligned}$$

のそれぞれ実部をとればよい。

主要な性質を示すと

(i) この波は渦度を持っている。

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = \left[-m^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] e^{im(x-ct)} \\
&= \frac{-2}{h_1^2 - y^2} \varphi(y) e^{im(x-ct)} \dots (16)
\end{aligned}$$

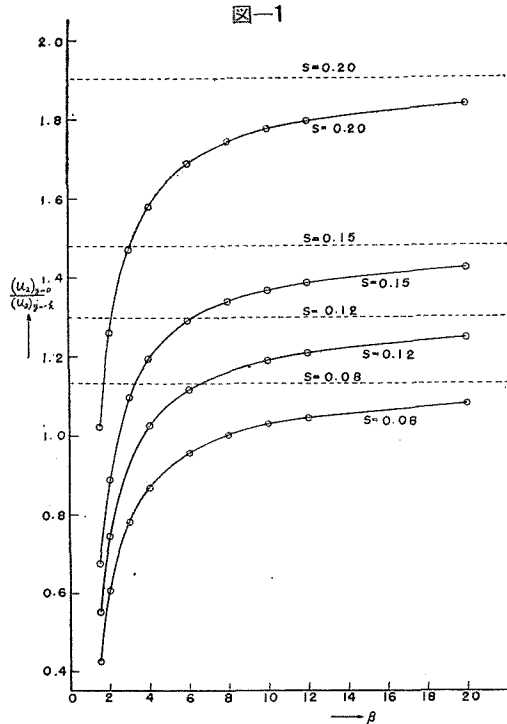
したがって

$$\begin{aligned}
(\zeta^2)_{y=0} &= \frac{-2}{h^2} (\varphi)_{y=0} e^{im(x-ct)} \\
&= \frac{-2 A_0 u_{10}}{h^2} e^{im(x-ct)} \dots (16)' \\
(\zeta_2)_{y=-h} &= 0
\end{aligned}$$

すなわち表面の渦度は波高と流れの表面流速とに比例し、深さの2乗に逆比例する。一樣流速分布の流れをさかのぼる場合の波は、渦度を持たないものとしてすることができる。

(ii) 波の水平粒子速度の分布が一樣流速分布の流れの場合と相当異なっている。表面 ($y=0$) と底 ($y=-h$) との波の水平粒子速度の比は一樣流速分布の流れの場合には、流れのない場合と同じく $\cosh mh$ と得られるが、放物線型流速分布の場合は $\beta \rightarrow \infty$, すなわち $u_1 \rightarrow 0$ では (15) による $(u_2)_{y=0}/(u_2)_{y=-h}$ は $\cosh mh$ に収束するが、一般の β に対しては 図-1 のごとく $(u_2)_{y=0}/(u_2)_{y=-h}$ は $\cosh mh$ より小となっている (ただし $s = \frac{mh}{2\pi}$)。この場合 β が 20 に達し、 $c/u_{10} = -19$ という流れの速度が非常に小さい場合にも、両者の間に相当の差異が認められる。また $s=0.08, 0.12$ の例などに見られるように、流速が大きくなり、 β が小となると、底の水平粒子速度が表面の水平粒子速度よりも大きくなる場合が認められる。

(iii) 波の周期を一定と仮定する時、波長は流れが一樣流速分布の時よりも、放物線流速分布の時の方が小と



なる。従って波速も小となる。ただしこの場合、放物線流速分布の場合の平均流速 $\frac{2}{3}u_{10}$ が一樣流速分布の場合の流速 U と等しいものとしている。

周期 T を一定とし、 $c_0^2 = \frac{gL_0}{2\pi} \tanh 2\pi s_0$ が $u_1=0$ の時の波速、波長、水深波長比の関係を示すものとすれば、

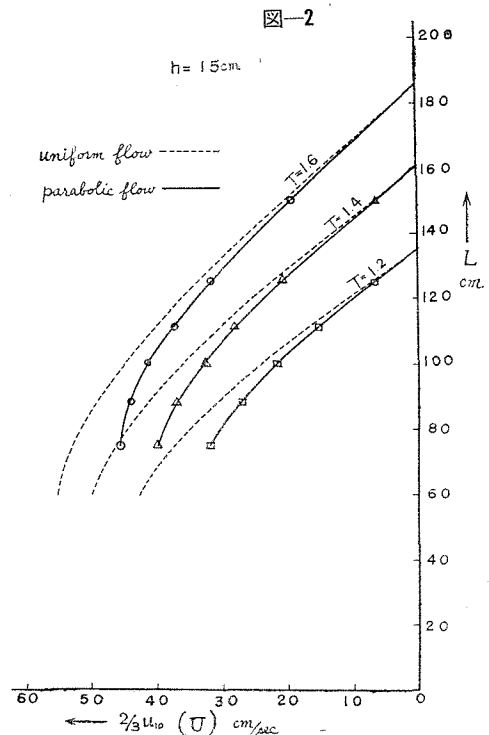


表-1
(parabolic flow)

T=1.2										
U	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
u_{10}	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5
L	135.5	127.6	119.5	111.2	102.4	92.8	80.8			
c	-112.9	-106.3	-99.6	-92.7	-85.3	-77.3	-67.3			
β	∞	15.17	7.64	5.12	3.84	3.06	2.50			
s	0.111	0.118	0.126	0.135	0.146	0.162	0.186			
C parabolic/C uniform	1.000	0.996	0.988	0.975	0.966	0.946	0.902			

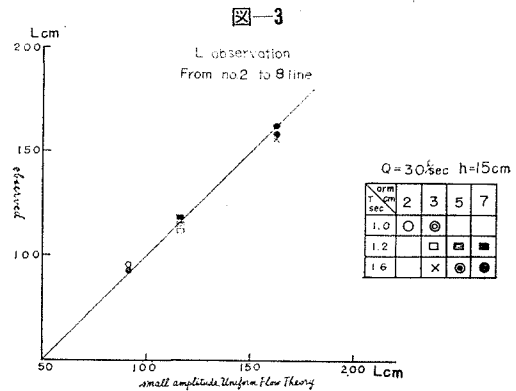
T=1.4										
U	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
u_{10}	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5
L	161.0	152.7	144.0	135.2	126.4	117.0	106.3	93.7		
c	-115.0	-109.1	-102.9	-96.6	-90.3	-83.6	-75.9	-66.9		
β	∞	15.55	7.86	5.29	4.01	3.23	2.69	2.27		
s	0.093	0.098	0.104	0.111	0.119	0.128	0.141	0.160		
C parabolic/C uniform	1.000	0.998	0.993	0.987	0.985	0.973	0.956	0.923		

T=1.6										
U	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
u_{10}	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5
L	186.0	177.2	168.1	158.7	148.8	138.7	128.5	117.0	103.5	81.3
c	-116.3	-110.8	-105.1	-99.2	-93.0	-86.7	-80.3	-73.1	-64.6	-50.8
β	∞	15.77	8.01	5.41	4.10	3.31	2.78	2.39	2.08	1.75
s	0.081	0.085	0.089	0.094	0.101	0.108	0.117	0.128	0.145	0.185
C parabolic/C uniform	1.000	0.997	0.997	0.995	0.988	0.982	0.976	0.963	0.932	0.821

(14) より次式が導かれる。

$$\frac{\beta^2 F_2(\beta, s)}{(1-\beta)^2} = \frac{2\pi s^2}{s_0} \cos \theta \coth 2\pi s_0 \dots (14)'$$

(14)' を用い実験との比較のため $h=15$ cm, $T=1.6$, 1.4, 1.2 sec の場合について $\frac{2}{3}u_{10}$ に対する波長変化を求めたのが 図-2 である。参考のため同図には $\frac{2}{3}u_{10}=U$ とおいた一様流速分布の場合の波長変化の状態が載せられている。両者は $U=0$ で一致し、 U の増大とともに、放物線型流速の場合の方が漸次波長がより小となる。図-2 より表-1 をうることができる。表-1 の β , s および C parabolic flow/ C uniform flow の値と、図-1 の表面および底の水平流速比曲線とを比較する時、流れの流速分布が変化したために生じた波速の変化は、波の粒子運動の流速比曲線の場合にくらべ、非常に小さい。たとえば $U=30$ cm/sec, $T=1.6$ sec の時の C parabolic flow/ C uniform flow $=0.976$ であるが、これに対し $\cosh mh=1.282$, また parabolic flow の時の $(u_2)_{y=0}/(u_2)_{y=-h}=0.9$ と parabolic flow の場合は表面粒子速度が底のそれよりも小さいと大きな差が示される。図-3 は水深 $h=15$ cm, 水路巾 $b=146.5$ cm の水路に流量 30 l/sec を流し、平均流速 $U=13.65$ cm/sec とした場合、その流れをさかのぼる $T=1.6$, 1.2, 1.0 sec の波の波長を写真測定で求め、その平均値（おのおの約 20 個につき）と一様流速分布の場合の計算値とを比較したものであり、両者はきわめてよく一致している。この場合の流速分布は流心に沿っては $u=u_0 \cdot \left(\frac{h+y}{h}\right)^{\frac{1}{n}}$ (-14.5 cm $< y < -9.0$ cm) とおくと、 $u_0=17.81$ cm/sec, $n=7.72$ であり、一様流速分布と放物



線流速分布との間に入っている。この場合表-1 からすれば、 $1 > C$ parabolic flow/ C uniform flow ≥ 0.97 と考えられるから、実験値は計算値とほぼ一致したということができよう。

次に問題になるのは波のエネルギー伝達であるが、単位時間単位巾あたりのエネルギー伝達率は、波も流れもあわせて考えると、

$$\bar{E}_t = \frac{1}{T} \int_{-h}^0 \int_0^T p u dt dy \dots (17)$$

$$\text{ただし } p = \rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} (u_1 - c) - \varphi \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \cos m(x - ct) - \rho g \cos \theta \cdot y$$

$$u = u_1 + u_2 = u_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos m(x - ct)$$

(17) を計算し、時間平均値が 0 となるもの、および流れのみに関係するものを除くと、

$$\bar{E}_t = -\frac{1}{2} \int_{-h}^0 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} (u_1 - c) - \varphi \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] dy \dots (17)'$$

(17)' は $u_1 = u_{10} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right\}$, $u_1 - c = u_{10} \left\{ \beta - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right\}$,
 $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{2u_{10}}{h^2}y$, および既述の φ の値を用いて計算す
 ることができる。得られた結果は

$$E_t = \frac{\rho}{2} \frac{u_{10}^3 A_0^2}{h} \beta^2 \left[-\frac{4}{3} \frac{c_2'}{\beta} - \frac{4}{3} \frac{c_2'^2}{\beta^2} - \frac{8}{5} \frac{c_4'}{\beta^2} \right. \\
 + \frac{4}{7} \frac{c_2' c_4'}{\beta^3} - \frac{16}{5} \frac{c_2' c_4'}{\beta^2} - \frac{12}{7} \frac{c_6'}{\beta^3} + \frac{8}{9} \frac{c_2' c_6'}{\beta^4} \\
 + \frac{8}{9} \frac{c_4'}{\beta^4} - \frac{24}{7} \frac{c_2' c_6'}{\beta^3} - \frac{16}{7} \frac{c_4'^2}{\beta^3} - \frac{16}{9} \frac{c_6'}{\beta^4} \\
 + \dots + F_2 \left\{ 1 + 2c_2' + \frac{3}{2} \frac{d_3'}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{c_2'}{\beta} + 3 \frac{c_2' d_3'}{\beta} \right. \\
 + 2 \frac{c_4'}{\beta} - \frac{1}{3} \frac{c_2' d_3'}{\beta^2} + \frac{5}{3} \frac{d_3'}{\beta^2} + \frac{1}{3} \frac{c_4'}{\beta^2} + \frac{10}{3} \frac{c_2' d_5'}{\beta^2} \\
 + 4 \frac{c_4' d_3'}{\beta^2} + 2 \frac{c_6'}{\beta^2} - \frac{3}{4} \frac{c_2' d_5'}{\beta^3} - \frac{5}{4} \frac{c_4' d_3'}{\beta^3} + \frac{7}{4} \frac{d_7'}{\beta^3} \\
 + \frac{1}{4} \frac{c_6'}{\beta^3} + \frac{7}{2} \frac{c_2' d_7'}{\beta^3} + 5 \frac{c_4' d_5'}{\beta^3} + \frac{9}{2} \frac{c_6' d_3'}{\beta^3} \\
 + 2 \frac{c_8'}{\beta^3} - \frac{c_2' d_7'}{\beta^4} - \frac{11}{5} \frac{c_4' d_5'}{\beta^4} - \frac{9}{5} \frac{c_6' d_3'}{\beta^4} - \frac{8}{5} \frac{c_8'}{\beta^4} \\
 \left. + \frac{9}{5} \frac{d_9'}{\beta^4} + \frac{9}{5} \frac{c_8'}{\beta^4} + \dots \right\} + F_2^2 \left\{ -\beta - \frac{1}{3} - 2d_3' \right.$$

$$- \frac{2}{5} \frac{d_3'}{\beta} + \frac{3}{7} \frac{d_3'^2}{\beta^2} - 2 \frac{d_5'}{\beta} - \frac{9}{5} \frac{d_3'^2}{\beta} - \frac{2}{7} \frac{d_5'}{\beta^2} - 2 \frac{d_7'}{\beta^2} \\
 - \frac{30}{7} \frac{d_3' d_5'}{\beta^2} + \frac{14}{9} \frac{d_5' d_3'}{\beta^3} - \frac{2}{9} \frac{d_7'}{\beta^3} + \dots \left. \right\} \\
 = \frac{\rho}{2} \frac{u_{10}^3}{h} A_0^2 F_4(\beta, s) \dots \dots \dots (18)$$

ただし $c_2' = -\frac{1}{2}(2 - \beta h^2 m^2)$

$$c_4' = \frac{1}{12} \left\{ (2 - \beta h^2 m^2)^2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \right\}$$

$$c_6' = \left\{ \frac{-1}{720} (2 - \beta h^2 m^2)^3 + \frac{7}{180} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{15} \right\}$$

$$c_8' = \left\{ \frac{1}{40320} (2 - \beta h^2 m^2)^4 - \frac{1}{5040} (2 - \beta h^2 m^2)^2 \right. \\
 \left. + \frac{2}{105} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{5}{168} \right\}$$

$$d_3' = -\frac{1}{6} (2 - \beta h^2 m^2)$$

$$d_5' = \left\{ \frac{1}{120} (2 - \beta h^2 m^2)^2 - \frac{1}{10} \right\}$$

$$d_7' = \left\{ -\frac{1}{5040} (2 - \beta h^2 m^2)^3 \right.$$

表-2
 $F_2(\beta, s)$

$\beta \backslash s$	0.10	0.12	0.135	0.15	0.17	0.20
1.4						1.006 09
1.5		0.682 529	0.740 140	0.802 965	0.894 108	1.044 63
1.75					0.972 317	1.117 43
2.0	0.766 007	0.829 348	0.883 116	0.943 438	1.027 29	1.168 87
2.5			0.960 511	1.017 28	1.099 93	1.236 59
3.0	0.898 205	0.958 570	1.009 38	1.064 97	1.145 96	1.280 53
3.5				1.097 92		
4.0	0.960 045	1.018 28	1.067 84	1.122 08	1.201 18	1.332 75
6.0	1.01 848	.075 33	1.123 75	1.176 77	1.254 13	1.382 96
8.0	1.04 676	1.102 97	1.150 84	1.203 29	1.279 83	1.407 38
10.0	1.06 345	1.119 28	1.166 84	1.218 96	1.295 03	
12.0	1.07 446	1.130 05				
15.0	1.08 539	1.140 74	1.187 89			
20.0	1.09 623					

表-3
 $F_4(\beta, s)$

$\beta \backslash s$	0.10	0.12	0.135	0.15	0.17	0.20
1.4						- 1.431 68
1.5		- 1.624 45	- 1.656 72	- 1.671 34	- 1.765 48	- 1.909 61
1.75					- 3.267 90	- 3.477 63
2.0	- 5.065 86	- 5.088 74	- 5.150 59	- 5.219 04	- 5.361 96	- 5.643 41
2.5			- 11.348 3	- 11.589 79	- 11.739 4	- 12.196 0
3.0	- 20.721 7	- 20.818 1	- 21.011 8	- 21.252 1	- 21.589 1	- 22.063 4
3.5				- 35.213 6		
4.0	- 53.135 3	- 53.427 3	- 53.769 7	- 54.285 5	- 54.985 4	- 56.313 3
6.0	- 192.280	- 193.197	- 194.228	- 195.706	- 197.826	- 202.766
8.0	- 470.663	- 472.725	- 474.991	- 478.174	- 482.946	- 495.021
10.0	- 936.436	- 940.331	- 944.550	- 950.395	- 959.390	
12.0	- 1 637.76	- 1 644.29				
15.0	- 3 236.73	- 3 249.27	- 3 262.54			
20.0	- 7 761.56					

$$+ \frac{13}{1260} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{21} \left\{ \frac{1}{362880} (2 - \beta h^2 m^2)^4 - \frac{17}{45360} (2 - \beta h^2 m^2)^2 + \frac{1}{189} (2 - \beta h^2 m^2) - \frac{1}{40} \right\}$$

若干の $F_2(\beta, s)$, $F_4(\beta, s)$ の計算値は表-2, 3に示されている。(17)は $\beta \rightarrow \infty$ の時, 流速0の時の微小振巾波のエネルギー伝達の式と一致する。

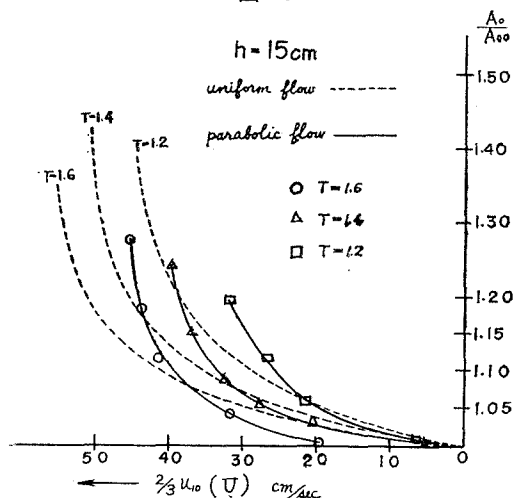
今非常に抽象的ではあるが, 一般流が存在しない時半波高 A_{00} の進行波が, 周期, 水深およびエネルギー伝達量是不変のまま定常的な放物線型流速分布の流れに入り, 屈折, 回折, 反射の現象は全く生じないとすれば次の関係式が得られる。

$$\left(\frac{A_0}{A_{00}} \right)^2 = \frac{\pi s^3 (1 - \beta)^3}{s_0^2} \coth 2\pi s_0 \cdot \frac{4\pi s_0 \operatorname{cosech} 4\pi s_0 + 1}{F_4(\beta, s)} \quad (19)$$

ただし A_{00} , s_0 は $\beta \rightarrow \infty$ に対する値である。

(19), (14)' を用いて $\frac{2}{3}u_{10}(=U)$ に対する $\frac{A_0}{A_{00}}$ の曲線を求めることができる。図-2 に対応するものとして図-4 が得られる。同図には一様流速分布の場合の $\frac{A_0}{A_{00}}$

図-4



も同時に示されている。一様流速分布の場合, $h \rightarrow \infty$ とすれば $U = -\frac{c_0}{4} \frac{d(A_0/A_{00})}{dU} \rightarrow \infty$ ($T = \text{const.}$) となるから, U の変化に対し $\frac{A_0}{A_{00}}$ の変化が急激であることはこの場合砕波を意味するものと考えうる。すなわち一様流速分布の場合にくらべ, 放物線型流速分布の方が波はちいさい平均流速で砕波することとなる。図-2 に示された波長の場合にくらべ, 図-4 では両曲線群がちいさい流速から互いに分離している。

また u_1 に関する動粘性 ν_1 が分子動粘性係数 ν に等

しく, $u_1 + u_2$ により生ずる底の境界層が層流非はくりであるとするれば, 底の境界層内の水平方向流速 u は

$$u = \frac{g \sin \theta}{2\nu} h^2 \left\{ 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right\} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos m(x - ct) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} \left\{ 1 + \frac{hu_{10}}{4c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \cdot \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{hu_{10}}{c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^3 + \dots \right\} + \left\{ \frac{hu_{10}}{4c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^2 - \frac{1}{12} \frac{hu_{10}}{c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^3 + \dots \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{\frac{1}{2}} (y+h)} \cos m(x - ct) + \tan^{-1} \frac{\frac{hu_{10}}{4c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^2}{1 + \frac{hu_{10}}{4c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^2} - \frac{1}{12} \frac{hu_{10}}{c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^3 + \dots - \frac{1}{12} \frac{hu_{10}}{c} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}} \left(\frac{y}{h} + 1 \right)^3 + \dots - \left(\frac{\sigma}{2\nu} \right)^{\frac{1}{2}} (y+h) \quad (20)$$

で表わされる。

付：一様流速分布の場合の諸値

この場合は速度ポテンシャルを持つものとして, 流速を $U(>0)$, 波形を $\eta = A_0 e^{im(x-ct)}$ とする時, 波速を $c(<0)$ として

$$u_2 = \frac{A_0 m (c - U)}{\sinh mh} \cosh m(y+h) \cos m(x - ct) \quad (21)$$

$$v_2 = \frac{A_0 m (c - U)}{\sinh mh} \sinh m(y+h) \sin m(x - ct)$$

波長と U との関係は

$$(c - U)^2 = \frac{g}{m} \tanh mh \quad (22)$$

単位時間単位巾当りのエネルギー伝達率は

$$\bar{E}_t = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 p u dtdy$$

において, 時間的平均値が0となるものおよび流れのみに関係したものを除き

$$\bar{E}_t = \frac{\rho}{2} \frac{mA_0^2 (c - U)^3}{\sinh^2 mh} \left\{ \frac{1}{2} mh + \frac{1}{4} \sinh 2mh \right\} \dots (23)$$

(23)は $U=0$ でももちろん静水中の微小振巾波のエネルギー伝達率にかえる。

参考文献

- 1) Burns, J. C.: "Long Waves in Running Water," Proc. Camb. Phil. Soc., (1953).
- 2) Hunt, J. N.: "Gravity Waves in Flowing Water," Proc. Roy. Soc. A, Vol. 231, (1955).
- 3) Turgut Sarpkaya: "Oscillatory Gravity Waves in Flowing Water," Proc. A.S.C.E. Vol. 81, (1955).