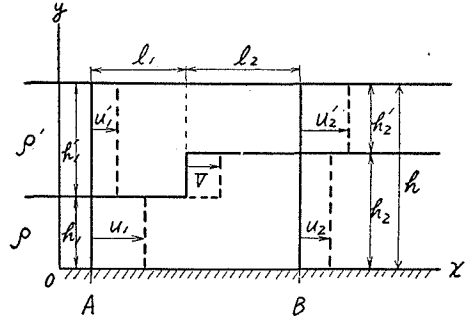


内部ジャンプについて

運輸技術研究所 工学博士 浜 田 徳 一

密度の異なつた2流体の界面に生ずる インターナル ジャンプのことをここでは内部ジャンプと称することとして、その計算を行なつて見た。こうした現象は河海両水の界面その他において生じうるのではないかと考えられる。図-1 のように水底において水平に x 軸、これに垂直上向きに y 軸をとる。ジャンプ位置を挟んでAおよびBの両断面を

図-1



A断面にて：下部流体の密度 ρ 、水深 h_1 、流速 u_1 、上部流体の密度 ρ' 、水深 h_1' 、流速 u_1'

B断面にて：下部流体の密度 ρ 、水深 h_2 、流速 u_2 、上部流体の密度 ρ' 、水深 h_2' 、流速 u_2'

とし、ジャンプの水平速度を V 、また

$$h_1 + h_1' = h_2 + h_2' \quad (1)$$

とする。これより最初 A, B 両断面でかぎられている流体部分についての連続方程式は、上下両流体それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \rho' h_1' l_1 + \rho' h_2' l_2 &= \rho' h_1' (l_1 + V - u_1') + \rho' h_2' (l_2 - V + u_2') \\ \rho h_1 l_1 + \rho h_2 l_2 &= \rho h_1 (l_1 + V - u_1) + \rho h_2 (l_2 - V + u_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \rho' u_2' (h - h_2) &= \rho' h u_1' + \rho' h_1 V - \rho' h_1 u_1' - \rho' h_2 V \\ \rho u_2 h_2 &= \rho h u_1 + \rho h_2 V - \rho h_1 V \end{aligned} \right\} \quad (2)'$$

モーメント方程式は始め AB 2断面間につつまれた流体内のモーメントと単位時間後の同じ流体成分のもつモーメントとの差をとれば

$$\left. \begin{aligned} \rho' h_1' u_1' V - \rho' h_1' u_1'^2 - \rho' h_2' u_2' V + \rho' h_2' u_2'^2 + \rho h_1 u_1 V \\ - \rho h_1 u_1^2 - \rho h_2 u_2 V + \rho h_2 u_2^2 &= \int_{0(A)}^h p dy - \int_{0(B)}^h p dy \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A, B 両断面に作用する圧力 p については

	A断面	B断面
上層	$\rho' g(h-y)$	$\rho' g(h-y)$
下層	$\rho' g h_1' + \rho g(h_1-y)$	$\rho' g h_2' + \rho g(h_2-y)$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} \int_{0(A)}^h p dy &= \frac{\rho' g h^2}{2} + \frac{g h_1^2}{2} (\rho - \rho') \\ \int_{0(B)}^h p dy &= \frac{\rho' g h^2}{2} + \frac{g h_2^2}{2} (\rho - \rho') \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(1)(3)(4)を用い、さらに (1)(2)' により u_2, u_2' を消去すると、次の V に関する2次方程式が得られる。

$$AV^2 + 2BV + D = 0$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A &= (h_1 - h_2) \left(-\rho' + \frac{\rho' (h_1 - h_2)}{h - h_2} + \frac{\rho h_1}{h_2} \right) \\ B &= (h_1 - h_2) \left(\frac{\rho' u_1'}{h - h_2} (h - h_1) - \frac{\rho u_1}{h_2} h_1 \right) \\ D &= \rho' u_1'^2 \frac{(h - h_1)^2}{h - h_2} - \rho' h u_1'^2 + \rho' h_1 u_1'^2 - \rho h_1 u_1^2 + \frac{\rho}{h_2} h_1^2 u_1^2 - \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1^2 - h_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

従つて、 V が実在するためには、 $B^2 - AD \geq 0$ でなければならず、また $V=0$ の定常状態では、 $D=0$ となる。

次にエネルギーの関係について考えれば、モーメントの関係式の場合と同様の流体部分を取り、

始めの運動のエネルギー

$$\frac{1}{2}\rho' l_1 h_1' u_1'^2 + \frac{1}{2}\rho' l_2 h_2' u_2'^2 + \frac{1}{2}\rho l_1 h_1 u_1^2 + \frac{1}{2}\rho l_2 h_2 u_2^2 \quad (6)$$

単位時間後の運動のエネルギー

$$\frac{1}{2}\rho' h_1' (l_1 - u_1' + V) u_1'^2 + \frac{1}{2}\rho' h_2' (l_2 - V + u_2') u_2'^2 + \frac{1}{2}\rho h_1 (l_1 - u_1 + V) u_1^2 + \frac{1}{2}\rho h_2 (l_2 - V + u_2) u_2^2 \quad (6)'$$

始めのポテンシャル エネルギー

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} l_1 + \rho' g \frac{1}{2} (h^2 - h_1^2) l_1 + \rho g \frac{h_2^2}{2} l_2 + \rho' g \frac{1}{2} (h^2 - h_2^2) l_2 \quad (7)$$

単位時間後のポテンシャル エネルギー

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} (l_1 + V - u_1) + \rho' g \frac{1}{2} (h^2 - h_1^2) (l_1 + V - u_1') + \rho g \frac{h_2^2}{2} (l_2 - V + u_2) + \rho' g \frac{1}{2} (h^2 - h_2^2) (l_2 - V + u_2') \quad (7)'$$

単位時間の間に考えられている流体部分になされる仕事量は

$$\begin{aligned} \int_{(A)}^h p u dy - \int_{(B)}^h p u dy &= \frac{\rho' g h^2 u_1'}{2} - \rho' g h h_1 u_1' + \frac{\rho'}{2} g u_1' h_1^2 + \rho' g h_1' h_1 u_1 \\ &+ \frac{1}{2} \rho g h_1^2 u_1 - \frac{\rho'}{2} g h^2 u_2' + \rho' g h h_2 u_2' - \frac{\rho'}{2} g u_2' h_2^2 - \rho' g h_2' h_2 u_2 - \frac{\rho}{2} g h_2^2 u_2 \end{aligned} \quad (8)$$

これらの関係を用い、単位時間の間に生じた内部ジャンプによるエネルギー損失は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2}\rho' h_1' u_1'^3 + \frac{1}{2}\rho' h_1' V u_1'^2 - \frac{1}{2}\rho' h_2' V u_2'^2 + \frac{1}{2}\rho' h_2' u_2'^3 - \frac{1}{2}\rho h_1 u_1^3 + \frac{1}{2}\rho h_1 V u_1^2 \\ &- \frac{1}{2}\rho h_2 u_2^2 V + \frac{1}{2}\rho h_2 u_2^3 + \rho g \frac{h_1^2}{2} V - \rho g h_1^2 u_1 - \rho' g h^2 u_1' - \frac{1}{2}\rho' g h_1^2 V - \rho g \frac{h_2^2}{2} V \\ &+ \rho g h_2^2 u_2 + \rho' g h^2 u_2' + \frac{1}{2}\rho' g h_2^2 V + \rho' g h h_1 u_1' - \rho' g h_1 h_1' u_1 - \rho' g h h_2 u_2' + \rho' g h_2 h_2' u_2 \end{aligned} \quad (9)$$

と得られる。

ただしジャンプが成立するためには

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \quad (10)$$

でなければならない。

このようにして粘性を省略した場合に、内部ジャンプが生ずるためには、(2)'(5) および (9)(10) の関係が成立していることが必要である。

次に $V=0$ すなわち定常なジャンプが生じうる場合について、以上の関係を検討してみよう。

(I) $u_1=0, V=0$ の場合

(5) の $D=0$ より

$$\rho' u_1'^2 \left(\frac{(h-h_1)^2}{h-h_2} - h + h_1 \right) = \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1^2 - h_2^2)$$

よつて $h_1 \neq h_2$ の場合 (すなわちジャンプの生ずる場合) には

$$-\rho' u_1'^2 \frac{h-h_1}{h-h_2} = \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1 + h_2)$$

上式が成立するためには u_1' は虚数となる。ゆえに底層流が停止し、表層流のみが流れている場合には常に $h_1 = h_2$ となつて、定常的なジャンプは成立しない。

(II) $u_1'=0, V=0$ すなわち表層水が静止し、底層水が動く場合は、

$D=0$ により

$$-\rho h_1 u_1^2 + \frac{\rho}{h_2} h_1^2 u_1^2 = \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1^2 - h_2^2)$$

よつて $h_1 \neq h_2$ の場合

$$\rho \frac{h_1}{h_2} u_1^2 = \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1 + h_2) \quad (11)$$

上式は明らかに実数の範囲内で成立する。またエネルギー損失は

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\rho h_1 u_1^3 + \frac{1}{2}\rho h_2 u_2^3 - \rho g h_1^2 u_1 + \rho g h_2^2 u_2 - \rho' g h_1 h_1' u_1 + \rho' g h_2 h_2' u_2$$

これを (11) を用いて整理すると,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{g}{4h_2} (\rho - \rho') u_1 (h_1 - h_2)^2 \leq 0 \quad (12)$$

よつて $u_1 > 0$ のときは $h_1 \leq h_2$, $u_1 < 0$ のときには $h_2 \leq h_1$ となり, ジャンプは成立することとなる。また $h_1 u_1 = h_2 u_2$ を用いることにより, (11) は

$$\frac{u_1 u_2}{\frac{\rho - \rho'}{\rho} g \frac{h_1 + h_2}{2}} = 1$$

となるから

$$u_1 > 0 \text{ のときは } \frac{u^2}{\frac{\rho - \rho'}{\rho} g h_1} > 1, \quad \frac{u_2^2}{\frac{\rho - \rho'}{\rho} g h_2} < 1, \quad u_1 < 0 \text{ のときは}$$

$$\frac{u_1^2}{\frac{\rho - \rho'}{\rho} g h_1} < 1, \quad \frac{u_2^2}{\frac{\rho - \rho'}{\rho} g h_2} > 1$$

となり, ジャンプを通じて底層流の内部フルウド数は1を通過することとなる。図-2 において曲線①は $\rho = 1.026$, $\rho' = 1.000$, $g = 980$ の場合 (12) による $-\frac{dE}{dt} / h_1^{2.5}$ を h_2/h_1 に対して画いたものである ($u_1 > 0$ として)。また同図中②③曲線は次のものである。すなわち下部流体の水深 h , 密度 ρ , 上部流体の水深 h' , 密度 ρ' の2流体の界面に生ずる内部長波が単位時間にある断面を切つて輸送するエネルギーを計算すると, このような進行波の波高を H として,

$$\bar{E}_t = \frac{H^2}{8} g (\rho - \rho') \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{\frac{\rho}{h} + \frac{\rho'}{h'}}}$$

となる (ただし上下両流体には波動運動だけが生ずるものとする)。ここで h, h' がそれぞれジャンプの場合の h_1, h_1' に相当するものとし, また $h_2 - h_1 = H$ と仮定して, $\rho = 1.026$, $\rho' = 1.000$, $g = 980$ とすると, 上式による $\bar{E}_t$ の計算値は $h = h'$ のとき②曲線, $h' = \infty$ のとき③曲線となる。内部ジャンプによつて流れとして失われるエネルギーの程度と, ジャンプ高さを波高と考えた内部長波のエネルギー伝達率とは $h_2/h_1 \sim 1.6$ くらいまでは相似た値であり, h_2/h_1 が,

さらに増加するにともない内部ジャンプの損失エネルギーの方がはるかに大きくなってゆく。

(III) $u_1 \neq 0$, $u_1' \neq 0$, $V = 0$ すなわち上下両流体ともに流れている場合の定常なジャンプについて考えてみる。まず $D = 0$ より

$$\rho' u_1'^2 \left\{ \frac{(h - h_1)^2}{h - h_2} - h + h_1 \right\} = \rho u_1^2 \left\{ h_1 - \frac{h_1^2}{h_2} \right\} + \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1^2 - h_2^2)$$

$h_1 \neq h_2$ として

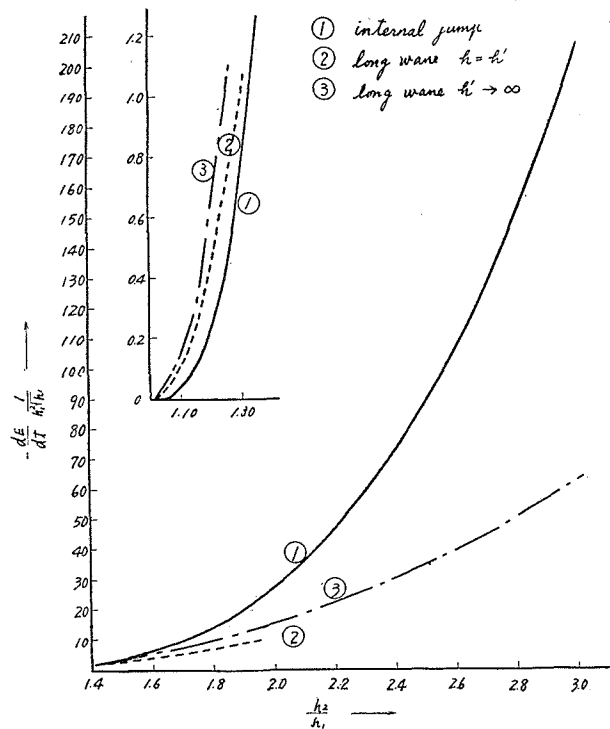
$$\rho' u_1'^2 \frac{h_1'}{h_2'} = \rho u_1^2 \frac{h_1}{h_2} - \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1 + h_2) \quad (13)$$

従つて当然

$$\rho u_1^2 \frac{h_1}{h_2} \geq \frac{g}{2} (\rho - \rho') (h_1 + h_2)$$

また $\frac{dE}{dt}$ は

図-2



$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\frac{1}{2}\rho'h_1'u_1'^3 + \frac{1}{2}\rho'h_2'u_2'^3 - \frac{1}{2}\rho'h_1u_1^3 + \frac{1}{2}\rho'h_2u_2^3 - \rho gh_1^2u_1 - \rho' gh^2u_1' \\ & + \rho gh_2^2u_2 + \rho' gh^2u_2' + \rho' gh_1u_1' - \rho' gh_1h_1'u_1 - \rho' gh_1h_2u_2' + \rho' gh_2h_2'u_2 \leq 0 \end{aligned}$$

これを整理して

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\rho'h_1'\left(\frac{h_1'^2}{h_2'^2}-1\right)u_1'^3 + \frac{1}{2}\rho'h_1u_1^3\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right) + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) \leq 0 \quad (14)$$

ところで上式の右辺第2, 第3項は

$$\frac{1}{2}\rho'h_1u_1^3\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right) + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) = u_1(h_1-h_2)\left(\frac{1}{2}\rho\frac{h_1u_1^2}{h_2^2}(h_1+h_2) - gh_1(\rho-\rho')\right) \quad (14)'$$

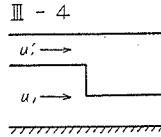
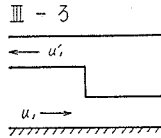
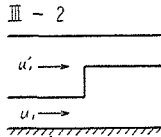
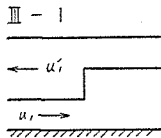
ここで $\rho\frac{h_1}{h_2}u_1^2 \geq \frac{g}{2}(\rho-\rho')(h_1+h_2)$ を用いると

$$\frac{1}{2}\rho\frac{h_1}{h_2}u_1^2(h_1+h_2) - gh_1(\rho-\rho') \geq \frac{g}{4}\frac{\rho-\rho'}{h_2}(h_1+h_2)^2 - gh_1(\rho-\rho') = -\frac{g}{4}h_2(\rho-\rho')(h_1-h_2)^2 \geq 0$$

すなわち

$$\frac{1}{2}\rho\frac{h_1}{h_2}u_1^2 - gh_1(\rho-\rho') \geq 0 \quad (14)''$$

図-3



次に(Ⅲ)の場合を分類すると図-3に示した4ケースとなる
(13)~(14)'' の関係を用いてこれらを検討すると(Ⅲ-1)の場
合は(14)において

$$\frac{1}{2}\rho'h_1'\left(\frac{h_1'^2}{h_2'^2}-1\right)u_1'^3 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\rho'h_1\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right)u_1^3 + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) \leq 0$$

ゆえに $\frac{dE}{dt} \leq 0$ は常に成立し, (13) の条件が満足されればよ
いだけである。

(Ⅲ-2) の場合は,

$$\frac{1}{2}\rho'h_1'\left(\frac{h_1'^2}{h_2'^2}-1\right)u_1'^3 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\rho'h_1\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right)u_1^3 + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) \leq 0$$

ゆえに $\frac{dE}{dt} \geq 0, \leq 0$ の2つの場合が考えられる。

(Ⅲ-3) の場合は

$$\frac{1}{2}\rho'h_1'\left(\frac{h_1'^2}{h_2'^2}-1\right)u_1'^3 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\rho'h_1\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right)u_1^3 + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) \geq 0$$

ゆえにこの場合は常に $\frac{dE}{dt} \geq 0$ となり, ジャンプは成立しない。

(Ⅲ-4) の場合は

$$\frac{1}{2}\rho'h_1'\left(\frac{h_1'^2}{h_2'^2}-1\right)u_1'^3 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\rho'h_1u_1^3\left(\frac{h_1^2}{h_2^2}-1\right) + gh_1u_1(\rho-\rho')(h_2-h_1) \geq 0$$

ゆえに(Ⅲ-2)と同様 $\frac{dE}{dt} \geq 0, \leq 0$ の2つの場合が考えられる。図-4は(Ⅲ-2)の場合を $\rho=1.026, \rho'=1.000$
 $g=980, h_1+h_1'=h_2+h_2'=1$ について計算したものである。横軸に h_1'/h_2' をとり, 縦軸に u_1, u_1' をとり h_2/h_1
一定の場合 $\frac{dE}{dt}=0$ となる u_1, u_1' (それぞれ各曲線の下方が $\frac{dE}{dt} \leq 0$, 上方が $\frac{dE}{dt} \geq 0$) および(13)による
 u_1 の最小値 (>0) を u_{1c} として図示している。例えば $h_1'/h_2'=2, h_2/h_1=2$ の場合(13)(14)を満足する $u_1,$
 u_1' は $35 > u_1 > 5, 17.5 > u_1' > 0$ のうちにある。図-4により h_1'/h_2' が増加する(すなわちこの場合表層流が薄
くなる)とともに, ジャンプの成立領域が狭くなつてゆくことがわかる。

図-4

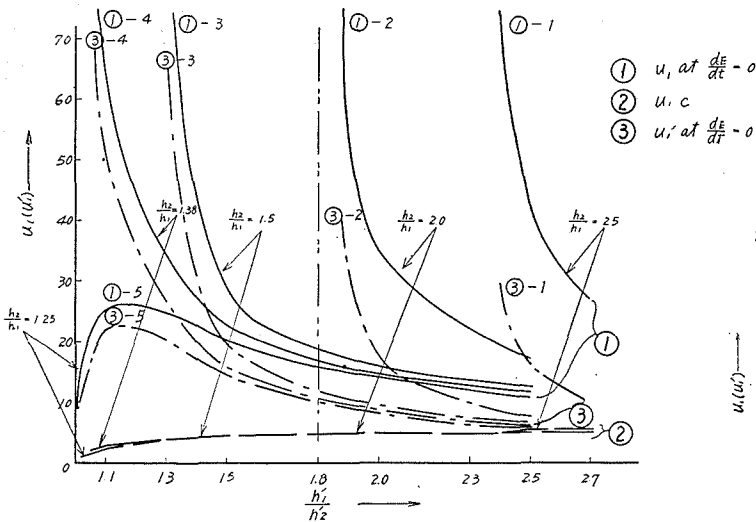
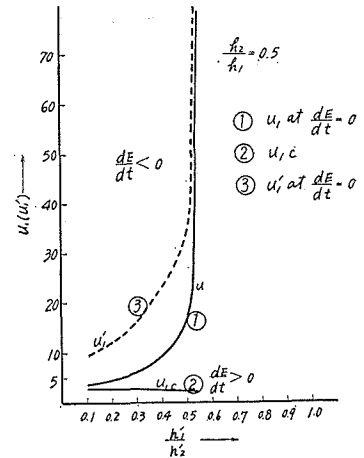


図-5 は (Ⅲ-4) の場合について、図-4 と同様の計算を $h_2/h_1=0.5$ の 1 ケースのみについて行なつたものである。 $\frac{dE}{dt} < 0$ の領域は ①③ 曲線の上方領域となつており、 $h_1'/h_2' \geq 0.55$ では $\frac{dE}{dt} < 0$ が成立しな

図-5



い。すなわちこの場合は表層流が薄くなると内部ジャンプの成立領域が広い。以上粘性および表面形状の変化を省略した場合の内部ジャンプの性質を検討してみた。より厳格な条件のもとではその成立領域はさらに狭められることであろうが、表層流が静止に近い状態にあつて、それとの密度差が僅小な底層流が流れているような場合には (Ⅲ-1)(Ⅲ-2) ないしは (Ⅱ) に示した形式の内部ジャンプが現われうのではないと思われる。