円形島による波浪の回折

大阪大学教授　工学博士　田　中　清

円柱による平面波の回折，散乱の問題は，すでに光や音について多くの研究がなされており，波浪が円形の島によつて回折する問題についても，既往の理論に基ずいて，最近 Laird がその実験結果を報告している。そこでは石油採掘島等のために円形島の作用する波力分布も論じられている。

光や音の回折理論では円柱の大さと波の波長との関係が極度に大きいか，または小さいかであつて計算途中で近似計算を行うことが許され，結果が簡略化できる。しかるに波長が円形島によつて回折される場合には，円形島の大さと波の波長とは同じオーダーの量であつて，近似計算が許されないので，厳密な計算をせねばならずその結果も複雑になる。書物等にもこの厳密な計算が見当らないので，筆者がかつて計算した理論を略記した。

記　号

r = 極座標の動径

θ = 極座標の偏角

z = 鉛直方向の座標，x = 入射波の方向軸，

t = 時間

d = 静水時の水深

a = 波浪振幅（半波高）

ζ = 静水面よりの水位上昇

g = 重力加速度

ϕ = 波の速度ポテンシヤル

λ = 波長，T = 週期

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$,　$\sigma=\frac{2\pi}{T}$

表面波について，

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1}$$

表面波の条件を満足する解として，

$$\phi=\psi(r,\theta)\cosh k(z+d)e^{i\sigma t} \tag{2}$$

長波について，

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=gd\,\nabla^2\zeta \tag{3}$$

上式を満足すると解して，

$$\zeta=\psi(r,\theta)e^{i\sigma t} \tag{4}$$

表面波（2），長波（4）において，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+k^2\psi=0 \tag{5}$$

入射波の方向を x 軸とすれば，島より無限遠点においては，

$$\psi=e^{ikx}=e^{ikr\cos\theta} \tag{6}$$

円形島によつて回折散乱を受けた波浪については，

$$\psi=e^{ikr\cos\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n H_n^{(2)}(kr)\cos n\theta$$

$$=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(kr)\cos n\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nH_n^{(2)}(kr)\cos n\theta \tag{7}$$

こゝに J_n は Bessel 函数，$H^{(2)}$ は第2種の Hankel 函数。

円形島の半径を r_0 とすれば，境界条件は，

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=r_0}=0 \tag{8}$$

（7）が（8）を満足するためには，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 &= -\frac{J_0'(kr_0)}{H_0^{(2)\prime}(kr_0)} = -\frac{J_1(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)}\\ \alpha_n &= -2i^n\frac{J_n'(kr_0)}{H_n^{(2)\prime}(kr_0)} = -2i^n\frac{nJ_n(kr_0)-kr_0J_{n+1}(kr_0)}{nH_n^{(2)}(kr_0)-kr_0H_{n+1}^{(2)}(kr_0)}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

所要の解は,

$$\zeta = a\Big[e^{ikr\cos\theta}-\frac{J_1(kr_0)}{H_1^{(2)}(kr_0)}H_0^{(2)}(kr) - 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{nJ_n(kr_0)-kr_0J_{n+1}(kr_0)}{nH_n^{(2)}(kr_0)-kr_0H_{n+1}^{(2)}(kr_0)}H_n^{(2)}(kr)\cos n\theta\Big]e^{i\sigma t} \tag{10}$$

波浪回折の計算に便利なるように,

$$\frac{nY_n(kr_0)-kr_0Y_{n+1}(kr_0)}{nJ_n(kr_0)-kr_0J_{n+1}(kr_0)} = \mu_n \tag{11}$$

こゝに Y_n は第2種 Bessel 函数。

と置き,

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_n(kr) &= \sqrt{\frac{\{J_n(kr)\}^2+\{Y_n(kr)\}}{1+\mu_n^2}}\\ \gamma_n &= \text{arc. Tan.}\left[\frac{\mu_nJ_n(kr)-Y_n(kr)}{J_n(kr)+\mu_nY_n(kr)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

とすれば,

$$\zeta = a\{e^{ikr\cos\theta}-\Gamma_0e^{i\gamma_0}-2\sum_{n=0}^{n=\infty}\Gamma_ne^{i(\gamma_n+n\pi/2)}\cos n\theta\}e^{i\sigma t} \tag{13}$$

上式の実数部を取れば,

$$\zeta = a\left\{\cos(kr\cos\theta+\sigma t)-\Gamma_0\cos(\gamma_0+\sigma t)-2\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\cdot\cos n\theta\cdot\cos\left(\gamma_n+\frac{n\pi}{2}+\sigma t\right)\right\} \tag{14}$$

さらに,

$$\left.\begin{aligned}\cos(kr\cos\theta)-\Gamma_0\cos\gamma_0-2\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\cos n\theta\cdot\cos\left(\gamma_n+\frac{n\pi}{2}\right) &= K\cos\gamma\\ \sin(kr\cos\theta)-\Gamma_0\sin\gamma_0-2\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\cos n\theta\cdot\sin\left(\gamma_n+\frac{n\pi}{2}\right) &= K\sin\gamma\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

と置けば,

$$\zeta = Ka\cos(\gamma+\sigma t) \tag{16}$$

K の値が回折波の波高分布を表わし, 等位相波面は $\gamma=\text{const.}$ の式より求められる。

i 島が波長に比べて大きく $r_0 \gg \lambda$, $kr_0 \gg 1$ の場合 (光の回折)

$$\left.\begin{aligned}J_n(kr_0) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}\cos\left(kr_0-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\\ H_n^{(2)}(kr_0) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}e^{-i\left(kr_0-\frac{2n+1}{4}\right)\pi}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となり,

$$n/\sqrt{n^2+k^2r_0^2}=\cos\delta_n,\quad kr_0/\sqrt{n^2+k^2r_0^2}=\sin\delta_n \tag{18}$$

として,

$$\zeta = a\Big[e^{ikr\cos\theta}-\sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}\Big\{\cos\left(kr_0+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-k(\overline{r-r_0})\right)} +2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(kr_0-\frac{2n+1}{4}\pi+\delta_n\right)\cos n\theta\, e^{i\left(\delta_n+\frac{n\pi}{2}-k(\overline{r-r_n})\right)}\Big\}\Big]e^{i\sigma t} \tag{19}$$

と簡略化せられ,

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_0 &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}\cos\left(kr_0+\frac{\pi}{4}\right), & \gamma_0 &= \frac{\pi}{2}-k(r-r_0)\\ \Gamma_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}}\cos\left(kr_0+\delta_n-\frac{2n+1}{4}\pi\right), & \gamma_n &= \delta_n-k(r-r_0)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

として計算すればよい。

ii 島が波長に比べて小さく, $r_0 \ll \lambda$, $kr_0 \ll 1$ の場合 (音の回折)

この場合は Lamb の教科書にも出ており，

$$\left.\begin{aligned} &J_0'(kr_0) \fallingdotseq -\frac{1}{2}kr_0,\quad J_n'(kr_0) \fallingdotseq \frac{(kr_0)^{n-1}}{2^n(n-1)!} \\ &H_0'(kr_0) \fallingdotseq -i\frac{2}{\pi kr_0},\quad H_n^{(2)\prime}(kr_0) \fallingdotseq -i\frac{2^n\cdot n!}{\pi(kr_0)^{n+1}} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

と近似式を用い，さらに $n=0$，1の2項のみを取れば，

$$\alpha_0 \fallingdotseq i\frac{\pi}{4}k^2r_0^2,\quad \alpha_1 \fallingdotseq \frac{\pi}{2}k^2r_0^2 \tag{22}$$

$$\zeta = a\left[e^{ikr\cos\theta} + \frac{\pi}{4}k^2r_0^2\{iH_0^2(kr) + 2H_1^{(2)}(kr)\cos\theta\}\right]\varepsilon^{iat} \tag{23}$$

波高分布函数 K および波面函数 γ は，

$$\left.\begin{aligned} &\cos(kr\cos\theta) + \frac{\pi}{4}k^2r_0^2\{Y_0(kr) + 2J_1(kr)\cos\theta\} = K\cos\gamma \\ &\sin(kr\cos\theta) + \frac{\pi}{4}k^2r_0^2\{J_0(kr) - 2Y_1(kr)\cos\theta\} = K\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

と簡略化せられる。

この円形の島による波浪の回折理論を組み合せることによつて，二つの島が並んでいる場合や杭群のような円柱群による波浪の回折についても論じることができる。

参考文献

A.D.K. Laird : A Model Study of Wave Action on a Cylindrical Island.
Trans. American Geophysical Union. Vol. 36, No. 3, p. 279 (April 1955).