海の波の解析概説

大阪大学教授　工学博士　田　中　清

本文は風によつて発生した海の波について，従来から数多くなされてきた数理的な研究を系統的に要約し，その間に含まれている諸問題を考察したものである。

1. 海の波の理論の発達とその分類

海の波は古代から人類と深い関係があり，各時代に応じて最高度の研究が努力せられてきたものと思われるが，科学的な脚光を浴びたのは，多くの水理学上の問題と同じく，Leonardo da Vinci (1452～1519) に始まる。そののち Newton, Leplace, Lagrange, その他多くの物理数学者の手によつて潮汐理論が発展し，それに付随して風波等も研究されてきた。今日 Airy (1845) の名を冠せられている多くの表面波の理論的基礎は，すでに Laplace によつてなされていたのである。1802 年に Gerstner が Lagrange の運動方程式の解としてトロコイド波を誘導して以来，海の波は物理数学者の手によつて多くの研究がなされ，特に 19 世紀の後半に至り，G.G. Stokes (1847) が有限振幅ポテンシャル波の誘導に成功し，続いて Boussinesq, Rayleigh, Lamb 等の業績がでて，海の波の研究は一時に開花した形となつた。その間 Scott Russel (1844) による波の観察や G. Weber による波の実験等がなされた。しかし問題があまりにも複雑困難なために，海の波の問題は物理数学者の手から放棄せられ，その研究は下火となり，今世紀に入つてからは，ただわづかに Levi-Civita (1925), Struik (1926) によつて有限振幅定常波の存在が証明せられたにすぎなかつた。しかるに今次大戦になつて敵前上陸の必要から Sverdrup-Munk (1946) によつて波の予知理論が研究せられ，それが動機となつて新しく海岸工学の分野が開け，海の波の問題が再び研究の題目にのぼるようになり，今度は工学者の手にわたつてきたのである。

海の波の理論を分類すると，

(1) 波形が変化せずに伝播しうるような保存波

A　深海波……水深が十分に深く，水深無限大とみなされる海面を伝播する保存波

B　浅海波……水深が比較的に浅く，波の運動に水底の影響のある場合の保存波

深海波と浅海波との限界は確定的なものではないが，普通には水深が波長の 1/2 より深ければ深海波，1/2 より浅ければ浅海波としている。水深が 1/2 波長における両者の誤差は，$\cosh\pi=11.59$，$\sinh\pi=11.55$ と $1/2\,e^{\pi}=11.57$ および $\tanh\pi=0.9963$ と 1 との差であつて 0.2～0.4% にすぎない。実用上では水深 10～15 m あたりを限度としてよく，この場合の誤差は約 10～15% である。水深が 10～15 m 以下になると波の屈折等の現象が顕著になり浅海波としての取扱いが必要になつてくる。

深海波，浅海波ともに，波高の点から，

C　微小波高理論

D　有限波高理論

とにわかれる。微小波高理論は流体力学の基本方程式の解析途上で波形勾配が微小であるとして，2 次項以上を省略した第一近似解であり，有限波高理論では，波形勾配が大きく，その 2 次項以上を省略し得ない場合であり，多くは逐次近似法による級数展開がなされ，3 次項から 5 次項程度まで算出されるが，計算が面倒なため 5 次項以上を求めたものはない。この有限波高理論は Levi-Civita によつて保存波の存在が一応証明されてはいるが，その級数の収束性の証明がなく，根本的な疑点を残している。微小波高と有限波高との波形勾配の限度は明確でないが，両者の誤差は波形勾配 1/10 で約 10%，波形勾配 1/15 で約 5%，波形勾配 1/35 で約 1% である。微小波高理論を用いる場合としては，

(a) うねり等のように波長が長く波形勾配が小さいもの，

(b) 波の屈折や回折その他複雑な波の現象を取扱う場合には，線型性を持つ微小波高理論に従うほかはない。

有限波高理論の必要になる場合は，

(a) 風波の発達や沿岸流の問題におけるように波による水の質量輸送が関係する場合，

(b) 波の変形を調べる等，波のくわしい二次的性質が関係する場合，

等である。

(2) いそ波　波が海岸に接近し，水深が浅くなり，水深が波長の 1/10 程度より浅くなると，浅海波としての

水粒子の軌道運動を保持できなくなつて孤立波の性質を帯び，波形もしだいに変形してきて前後の対称性を失つてくる。さらに水深が浅くなり，水深が波長の 1/25 程度より浅くなれば，水面付近の運動と水底付近の運動との差が小さくなり，水深方向には一様な運動であるとみなされて，長波形式の波として取扱われる。浅海波理論より長波理論に移る渡過状態の波として孤立波理論が用いられる。水底勾配の影響や波形の変形を浅海波について論ずることはむつかしいので，それらはおもに長波についてのみ研究されている。
水深が波高の約 1.5 倍程度になると，水底の運動が水面の運動より遅れ，波形は前面が立つて急になり，また水粒子の軌道速度が伝播速度よりも大きくなり，ついには波の運動を保持し得なくなつて砕波となつて，波から流れの形式に移行し，打上げ波となる。

いそ波はつぎの 4 種に分けられる。

(a) 過渡状態の孤立波　(b) 長波形式の波　(c) 砕　波　(d) 打上げ波

一口に砕波と呼ばれるもののうちには，

(a) 沖の砕波：相当に水深があつて，深海波または浅海波の形式のままで波頭のみの砕ける沖砕波があり，これは水深に関係なくおもに波形勾配の大きさによるもので，波形勾配の限界としては，Gerstner のトロコイド波理論では，サイクロイドとなつて尖点を生ずるときである[1]。それによれば限度は 波高/波長 は $1/\pi$ となり，また Stokes は波の峯の交角の限度を 120°[2] とし，Michell は 波高/波長 の限界を $0.142 \fallingdotseq 1/7$ とした[3]。

(b) いその砕波：いそ帯に入り水深が浅くなつて波が変形し，波の前面が急になり後面が緩やかになつて波は砕けるが，このいその砕波にも 2 種類あつて，波の前面が直立し巻きこんで波の峯が全面的に砕ける巻き砕波と，波の峯が局部的に砕けそれが波及してゆく崩れ砕波とがある。このいその砕波の限度は波形勾配と水深との関係によつて定まるのであるが，砕波の過程はまだ理論的に解明されていない。この砕波の理論としては Stoker (1949) が孤立波理論にもとづき圧縮性流体の衝撃波との類似から論じたものがある[4]。砕波限界を定める方法として，

i) 波の峯の交角が 120° となると砕けるとする方法。この方法を孤立波に用いると 波高/水深 の比が 0.7813 となる。

ii) 水粒子の峯における軌道速度が伝播速度に達すれば砕けるとする方法。この方法を浅海波楕円トロコイド波に用いてみると 波高/水深 の比は 2 となる。Stokes 流の有限波高理論について，この方法を用いて砕波限界を求めんとする試みが多くでているが，砕波限界付近では級数の収束が保証されておらず，級数の数項を取つて砕波限界を求めることは無理である。

iii) 数理的には，有限波高理論の解の級数の収束限界が砕波限界となるものと思われるが，解の級数からはその収束限界を求めることはむつかしい。

(c) 防波堤前面における跳波：砕波のうちに跳波を含めているが，これは全く異なつた現象である。この跳波については別の機会にゆづる。

(3) 群　波　実際における海の波は一様な保存波のみから成るものではなく，週期，波長，波高の異なるさまざまの波が集合した群波となつており，波の組成にはある種の規則性があつて，波のスペクトルを成している。

表面波のように波速が波長によつて変化する分散性の波では，波長の異なる波を合成すると群波となつて，群波としての伝播速度は各波の波速とは異なり，これを群速度とする。

$$C_G=\frac{d\sigma}{dk}=c-\lambda\frac{dc}{d\lambda} \quad \cdots\cdots (1)$$

水深 d の浅海波においては，

$$C_G=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{4\pi d/\lambda}{\sinh 4\pi d/\lambda}\right) \quad \cdots\cdots (2)$$

となり，深海波では，

$$C_G=\frac{1}{2}c \quad \cdots\cdots (3)$$

となる。この群波の考えからすると保存波に対しては，

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}+C_G\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial t}=0 \quad \cdots\cdots (5)$$

等の関係式が成立する。波のエネルギーは群速度をもつて伝わるのであり，群波のうちで前に進む個々の波はエ

ネルギーの伝達をともなわないので波高が減衰してしまい，前駆波は波高が微小であり，群速度で伝播する中心波であつて波高が最大波高の 70.7% に相当する波のみが保存波となる。これらが最近の波の予知理論に重要になつてくる[5]。

最近の海の波の観測により群波を構成する波のスペクトルが理論的に研究されるようになり，波の予知理論でいままで明確でなかつた有義波の概念に基礎づけがなされつつある。

波のスペクトルに推計学が用いられ，最高波高より $1/p$ 部分に分布する波の平均波高を H_p とし，全波の平均値を H_a，最高波高を H_m とすれば，波高の分布函数を Pierson のⅢ型分布として

$$H_3/H_a=1.57,\quad H_{10}/H_3=1.29$$

$$H_m/H_3=1.81,\quad H_m/H_{10}=1.41$$

等が求められ，これは観測値によく合つている（H_3：有義波高)。また Longuet-Higgins 等の研究がある[6]。海の波をさまざまの波の重畳として，Pierson が新しい波の理論を展開している[7]。

2. Airy の微小波高理論

(1) 深海波の場合　無渦運動の波は，その速度ポテンシャル ϕ が，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad\cdots(6)$$

を満足することは，微小波高でも有限高でも同様である。波の水位（表面の変位）η において自由表面をなす条件として，

$$\left.\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(y-\eta)&=0\\ \left[\frac{DP}{Dt}\right]_{y=\eta}&=0\end{aligned}\right\} \quad\cdots(7)$$

の２式より微小変位の仮定を用いれば表面条件として，

$$\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{y=0}=0 \quad\cdots(8)$$

が得られる。(6),(8) を満足する単弦運動として，水面の波動を

$$\eta=a\sin(kx-\sigma t) \quad\cdots(9)$$

と仮定する（ここに　波高：$H=2a$　とする)。

$$\phi=\frac{ga}{\sigma}e^{ky}\cos(kx-\sigma t) \quad\cdots(10)$$

となり表面条件より伝播速度 c が規定される。

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^2=gk,\\ &c=\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\end{aligned}\right\} \quad\cdots(11)$$

水粒子の運動は，

$$\left.\begin{aligned}x&=ae^{ky}\cos(kx-\sigma t)\\ y&=ae^{ky}\sin(kx-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots(12)$$

水粒子の運動のとき半径 ae^{ky} なる円軌道となり，水深を増すに従つて急激に減少する。

１波長当りのポテンシャルエネルギーは

$$E_p=\frac{1}{2}g\rho\int_0^\lambda \eta^2 dx=\frac{1}{4}g\rho a^2\lambda \quad\cdots(13)$$

運動エネルギーは，

$$E_K=\frac{1}{2}\rho\int_0^\lambda\left[\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{y=0}dx=\frac{1}{4}g\rho a^2\lambda \quad\cdots(14)$$

となり，波の全エネルギーは，

$$E=E_P+E_K=\frac{1}{2}g\rho a^2\lambda \quad\cdots(15)$$

このエネルギーは群速度 C_G をもつて伝わる。

$$C_G=\frac{1}{2}c \quad\cdots(3)$$

(2) 浅海波の場合　水深 d が一定なる海を伝わる波には，水面の条件のほかに，

$$\left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{y=-d}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

が加わり，単弦波

$$\eta=a\sin(kx-\sigma t) \quad\cdots\cdots(17)$$

に対して，

$$\phi=\frac{ga}{\sigma}\frac{\cosh k(y+d)}{\cosh kd}\cos(kx-\sigma t) \quad\cdots\cdots(18)$$

となり，表面条件より伝播速度 c は，

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^2=gk\tanh kd\\&c=\frac{\sigma}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(19)$$

水粒子の運動は，

$$\left.\begin{aligned}&x=a\frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd}\cos(kx-\sigma t)\\&y=a\frac{\sinh k(y+d)}{\sinh kd}\sin(kx-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(20)$$

軌道は楕円となり，長短軸半径は，

$$\left.\begin{aligned}&r_H=a\frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd},\quad r_V=a\frac{\sinh k(y+d)}{\sinh kd}\\&\frac{r_V}{r_H}=\tanh k(y+d)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(21)$$

楕円軌道の

$$\left.\begin{aligned}&\text{離心率}=\sqrt{\frac{r_H{}^2-r_V{}^2}{r_H}}=\frac{1}{\cosh k(y+d)}\\&\text{焦点距離}=2\,er_H=2\,a\,\mathrm{cosech}\,kd=\mathrm{const}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

水粒子の運動の速度成分は，

$$\left.\begin{aligned}&u=c\cdot ka\frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd}\sin(kx-\sigma t)\\&v=-c\cdot ka\frac{\sinh k(y+d)}{\sinh kd}\cos(kx-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(23)$$

群速度は，

$$C_G=\frac{1}{2}c\left(1+\frac{2\,kd}{\sinh 2\,kd}\right) \quad\cdots\cdots(2)$$

上記の各式において $d\to\infty$ とすれば，$\sinh kd\sim\cosh kd\sim 1/2\,e^{kd}$, $\tanh kd=1$ となつて深海波の式に一致し，または d を十分小さくするか，$\lambda\to\infty$ とすれば $\sinh kd\doteqdot kd$, $\cosh kd\doteqdot 1$, $\tanh kd\doteqdot kd$ となり，$c=\sqrt{gd}$ 等のように長波の式に移行する。

3. 回転のあるトロコイド波理論

(1) 深海波の場合　Gerstner (1802) が Lagrange の方程式の厳密解として求めたもので，これと別個に Rankine 等が逆に波形から導いて同じ結論を得た[8]。Gerstner のトロコイド波は有限波高の波の一種であつて，その表現が簡単であるので，従来から土木工学上多く用いられてきた。その特長は，

(a) 軌道が閉曲線をなし，水の質量輸送をともなつていない。

(b) 回転を有し無渦運動ではないので，外力によつては発生し得ない波である。

(c) 波の峯の交角が 120° 以下の波形を含んでいる。

等であり，無渦運動でないことがこの理論の致命的欠陥であつたが，最近の有限波高理論から検討して，その回転の大きさが有限波高波の軌道のずれ，すなわち質量輸送に相当することがわかり，トロコイド波が実際の波とよく合う点のあることが認められた。

座標 (x,y) において，波の運動の平均位置 (X,Y) にあつた水粒子が波の運動によつて $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ だけ変位し，

$$\left.\begin{aligned}&x=X+\boldsymbol{x}\\&y=Y+\boldsymbol{y}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(24)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}=ae^{kY}\cos(kX-\sigma t)\\&\boldsymbol{y}=ae^{kY}\sin(kX-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(25)$$

Lagrange の連続方程式は，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}=1-k^2a^2e^{2kY}=\text{const.}$$

となつて満足し，Lagrange の運動方程式から，

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right)=-\frac{\rho^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial X}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial X}=k^2c^2ae^{kY}\cos(kX-\sigma t)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right)=-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial Y}-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial Y}=k^2c^2ae^{kY}\sin(kX-\sigma t)+k^3c^2a^2e^{2kY}$$

となり，　$$\frac{p}{\rho}=\text{const.}-gy+kac^2e^{kY}\sin(kX-\sigma t)+\frac{1}{2}k^2a^2c^2e^{2kY}$$

となり，p=const. となるためには，

$$c=\frac{\sigma}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \cdots\cdots(26)$$

なることを要する。波形は $t=0$ として，

$kX=\theta,\quad ae^{kY}=r$　とおけば，

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\theta}{k}+r\cos\theta\\ y&=Y+r\sin\theta\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(27)$$

となつてトロコイド波形となる。

水面 $Y=0$ では $r=a$ であり，

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\theta}{k}+a\cos\theta\\ y&=a\sin\theta\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(28)$$

$ka=1$，$H/\lambda=1/\pi$ となればサイクロイドとなつて波形の限界となる。水粒子の速度成分は，

$$\left.\begin{aligned}u&=ckae^{kY}\sin(kX-\sigma t)\\ v&=-ckae^{kY}\cos(kX-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(29)$$

トロコイド波では平均水面が静水面より上昇する。これについて Stokes が研究しており，静水面位置を y' とすれば，

$$\left.\begin{aligned}y'&=Y-\frac{1}{2}ka^2e^{2kY}\\ \delta&=\frac{1}{2}ka^2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(30)$$

$$\text{静水面からの}\left.\begin{aligned}&\text{峯の高さ}=a+\frac{1}{2}ka^2\\ &\text{谷の深さ}=a-\frac{1}{2}ka^2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(31)$$

この平均水位の上昇を復元せしめるための平衡流の流速 u' は，

$$u'=k^2a^2ce^{2kY} \quad \cdots\cdots(32)$$

回転は　$$2\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\left\{\frac{\partial(v,y)}{\partial(X,Y)}-\frac{\partial(x,u)}{\partial(X,Y)}\right\}\Bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}$$ より

$$2\omega=-\frac{2k^3a^2ce^{2kY}}{1-k^2a^2e^{2kY}} \quad \cdots\cdots(33)$$

トロコイド波のような回転のある運動は外力では起り得ず，あらかじめ水中に $u'=2k^3a^2ce^{2kY}$ なる速度分布が与えられていることが必要であり，逆に回転を消せば $u'=2k^3a^2ce^{2kY}$ なる流れが残り，これが質量輸送に相当するものと考えられる。一波長当りのエネルギーは

$$E_P=E_K=\frac{1}{2}E=\frac{1}{4}g\rho a^2\lambda\left(1-\frac{1}{2}k^2a^2\right) \quad \cdots\cdots(34)$$

(2) 浅海波の場合　Gerstner のトロコイド波理論を有限水深の場合に拡張することは St.-Venant, Flamant (1888) が試み[7]，Gaillard (1935) によつて発展せしめられた。微小波高理論との類似から，有限水深に対して楕円トロコイド波が想定される。(12) に対する (25) の関係を，(20) に用うれば，浅海波の楕円トロコイド波は

$$\left.\begin{aligned}x&=X+\mathfrak{x}\\ y&=Y+\mathfrak{y}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(35)$$

において，

$$\left.\begin{aligned} x&=a\frac{\cosh k(Y+d)}{\sinh kd}\cos(kX-\sigma t)\\ y&=a\frac{\sinh k(Y+d)}{\sinh kd}\sin(kX-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(36)$$

となる。こうおいてみても残念なことに Lagrange の方程式は満足していない。ただ一次近似としてのみ（k^2a^2 の二次近似以下において）連続方程式を満足し，

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd} \quad\cdots\cdots(37)$$

となる。$t=0$, $kX=\theta$ とし，

$$\left.\begin{aligned} r_H&=a\frac{\cosh k(Y+d)}{\sinh kd}\\ r_V&=a\frac{\sinh k(Y+d)}{\sinh kd}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(38)$$

とおけば，

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\theta}{k}+r_H\cos\theta\\ y&=Y+r_V\sin\theta\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(39)$$

となり波形は楕円トロコイドとなる。

水面 $Y=0$ では，波形は，

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\theta}{k}+a\coth kd\sin\theta\\ \eta&=a\cos\theta\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(40)$$

波形表示式を求めるために（40）より θ を消去すれば $(ka)^3$ の項までは，

$$\begin{aligned}\eta=&\frac{1}{2}ka^2\coth kd+\left\{1-\frac{3}{8}(ka\coth kd)^2\right\}a\cos kx\\ &+\left\{\frac{1}{2}(ka\coth kd)-\frac{1}{3}(ka\coth kd)^3\right\}a\cos 2kx\\ &+\frac{3}{8}(ka\coth kd)^2a\cos 3kx+\frac{1}{3}(ka\coth kd)^3a\cos 4kx \quad\cdots\cdots(41)\end{aligned}$$

水粒子の速度成分は，

$$\left.\begin{aligned} u&=c\cdot ka\frac{\cosh k(Y+d)}{\sinh kd}\sin(kX-\sigma t)\\ v&=-c\cdot ka\frac{\sinh k(Y+d)}{\sinh kd}\cos(kX-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(42)$$

楕円トロコイドの場合にも回転があり，平均水面の上昇が起る。波のエネルギーは，

$$E_P=E_K=\frac{1}{2}E=\frac{1}{4}g\rho a^2\lambda\left(1-\frac{1}{2}\frac{k^2a^2}{\tanh^2 kd}\right) \quad\cdots\cdots(43)$$

4. 有限波高のポテンシャル波理論

(1) 深海波の場合　ポテンシャル運動としての有限波高の表面波を逐次近似法で級数の形に求めることが，Stokes によつて成功し，それをさらに Rayleigh が改良した[10]。この逐次近似法は2次近似程度までは計算が簡単であるが，それ以上の近似を求めるのは計算が複雑となり，途中の項の取り方いかんによつて結果に差を生じ，計算者によつて式が異なつている。この逐次近似による級数表示法では解の存在，級数の収束性が保証されていないのが重大な欠陥であつて，その解には根本的な疑義を蔵している。しかしその波形や性質は実際とよく合致することが認められている。特に波の発生，発達や沿岸流の問題には波による水の質量輸送が関係してくるので，有限波高理論が重要となつてくる。有限波高理論では，

(a) 波速は波長のほかに波高が影響する，

(b) 水粒子の軌道は閉曲線をなさず，ずれを生じて水の質量輸送がある，

(c) 軌道は上下が対称でなくなり，西洋梨のようにひずんだ形となる。

これらの点を除いては，微小波高よりの補正量は微小であり，普通の工学上の問題では微小波高理論で十分である。複素ポテンシャル $w=\phi+i\psi$ に対して，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad\cdots\cdots(44)$$

が成立し，進行波の系全体に波速と同じ大きさで方向が反対の流れを付加すれば波の系は定常的となり，時間項を落すことができる（Rayleigh の方法）ので簡単になる。

$$\left.\begin{aligned}\phi/c&=-x+\alpha e^{ky}\sin kx\\ \psi/c&=-y+\alpha e^{ky}\cos kx\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(45)$$

として，$y=\eta$ なる自由表面の流線を $\psi=0$ とおき，

$$\eta=\alpha e^{k\eta}\cos kx=\alpha\left(1+k\eta+\frac{1}{2}k^2\eta^2+\frac{1}{6}k^3\eta^3+\frac{1}{24}k^4\eta^4+\cdots\right)\cos kx\cdots\cdots(46)$$

として逐次近似を行つてゆくと，$k^2\alpha^2$ の項までは，

$$\eta=\frac{1}{2}k\alpha^2+\alpha\left(1+\frac{9}{8}k^2\alpha^2\right)\cos kx+\frac{1}{2}k\alpha^2\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2\alpha^3\cos 3kx\cdots\cdots(47)$$

ここに　$a=\alpha\left(1+\frac{9}{8}k^2\alpha^2\right)$　とおけば，

$$\eta=\frac{1}{2}ka^2+a\cos kx+\frac{1}{2}ka^2\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2a^3\cos 3kx\cdots\cdots(48)$$

となり，トロコイド波と全く同一である。

$p=\mathrm{const.}$ ならしめるために $\cos kx$ の係数を 0 とすれば，

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}(1+k^2a^2)}\cdots\cdots(49)$$

となり，波速 c は ka に影響を受ける。

$k^4\alpha^4$ の項まで取れば，Lamb の教科書によれば Stokes の計算では，

$$\eta=\mathrm{const}+a\cos kx-\left(\frac{1}{2}ka^2+\frac{17}{24}k^3a^4\right)\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2a^3\cos 3kx-\frac{1}{3}k^3a^4\cos 4kx\cdots\cdots(50)$$

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1+k^2a^2+\frac{5}{4}k^4a^4\right)}\cdots\cdots(51)$$

となつているが筆者の追算では，

$$\eta=\left(\frac{1}{2}k\alpha^2+k^3\alpha^4\right)+\left(\alpha+\frac{9}{8}k^2\alpha^3\right)\cos kx+\left(\frac{1}{2}k\alpha^2+\frac{4}{3}k^3\alpha^4\right)\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2\alpha^3\cos 3kx+\frac{1}{3}k^3\alpha^4\cos 4kx\cdots\cdots(52)$$

となり　$a=\alpha\left(1+\frac{9}{8}k^2\alpha^2\right)$　とおけば，

$$\eta=\mathrm{const.}+a\cos kx+\left(\frac{1}{2}ka^2+\frac{5}{24}k^3a^4\right)\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2a^3\cos 3kx+\frac{1}{3}k^3a^4\cos 4kx\cdots\cdots(53)$$

となり，$p=\mathrm{const.}$ から，

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1+k^2a^2-\frac{5}{4}k^4a^4\right)}\cdots\cdots(54)$$

が得られ，少し違いがあつた。$2a=\eta_{\max}-\eta_{\min}$ とする方がよいようである。

この Stokes 流の方法の欠陥は $p=\mathrm{const.}$ として波速 c を決定する場合に，$\cos kx$ または y の項の係数 1 個のみを 0 とおくだけで，$\cos 2kx$ または y^2 以上の高次項は 0 となし得ないので，厳密には $p=\mathrm{const.}$ が成立しないことである。

k^2a^2 までの近似において，平均水面の静水面よりの上昇は，

$$\delta=\frac{1}{2}ka^2\cdots\cdots(55)$$

水粒子の軌道の曲線は閉じていないので波によつて水の質量輸送がある。この質量輸送の y 点における速度は

$$u'=k^2a^2ce^{2ky}\cdots\cdots(56)$$

これはトロコイド波の (32) と同じである。

一波長当りの運動量輸送量 M は，

$$M=\pi\rho a^2c\cdots\cdots(57)$$

(2) 浅海波の場合　Stokes は同じ方法を浅海波について試み k^2a^2 の項まで求めているが，最近この方法に

よつて浜田博士，佐藤博士等が計算を行つており，筆者も計算してみたが，各人それぞれ異なる結果となつている。これは逐次近似の項の取り方に違いがあるためであろう[11]。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi}{c}&=-x+\alpha\frac{\cosh k(y+d)}{\sinh kd}\sin kx\\ \frac{\psi}{c}&=-y+\alpha\frac{\mathrm{sihh}\, k(y+d)}{\sinh kd}\cos kx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(58)$$

$y=\eta$ にて $\psi=0$ として

$$\eta=\alpha\cos kx\frac{\sinh k(y+d)}{\sinh kd}$$

$$=\alpha\cos kx\left(1+k\eta\coth kd+\frac{1}{2}k^2\eta^2+\frac{1}{6}k^3\eta^3\coth kd+\frac{1}{24}k^4\eta^4+\cdots\right)$$

として逐次近似を行つた結果，

(a) 浜田博士は，

$$\begin{aligned}\eta=&\frac{1}{2}\alpha\{k\alpha\coth kd+k^2\alpha^2\coth^2 kd\}\\ &+\frac{3}{8}\alpha\left\{k^4\alpha^4\coth^4 kd+k^5\beta^5\coth^3 kd+\frac{3}{2}k^4\alpha^4\coth^2 kd+\frac{2}{3}k^3\alpha^3\coth kd\right\}\\ &+\alpha\left\{1+\frac{3}{4}\left(k^3\alpha^3\coth^3 kd+\frac{1}{2}k^2\alpha^2+\frac{1}{2}k^4\alpha^4\coth^2 kd+k^3\alpha^3\coth kd\right)\right\}\alpha\cos kx\\ &+\frac{1}{2}\alpha\{k\alpha\coth kd+k^2\alpha^2\coth^2 kd\}\cos 2kx\\ &+\frac{1}{2}\alpha\left\{k^4\alpha^4\coth^4 kd+k^5\alpha^5\coth^3 kd+\frac{3}{2}k^4\alpha^4\coth^2 kd+\frac{2}{3}k^3\alpha^3\coth kd\right\}\cos 3kx\\ &+\frac{1}{4}\alpha\left\{k^3\alpha^3\coth^3 kd+\frac{1}{2}k^2\alpha^2+\frac{1}{2}k^4\alpha^4\coth^2 kd+k^3\alpha^3\coth kd\right\}\cos 3kx\\ &+\frac{1}{8}\alpha\left\{k^4\alpha^4\coth^4 kd+k^5\alpha^5\coth^3 kd+\frac{3}{2}k^4\alpha^4\coth^2 kd+\frac{2}{3}k^3\alpha^3\coth kd\right\}\cos 4kx\cdots\cdots(59)\end{aligned}$$

$$c^2=\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1-\alpha^2k^2\coth^2 kd-\frac{1}{2}k^2\alpha^2\,\mathrm{cosech}^2 kd-\frac{1}{2}k^4\alpha^4\right\}^{-1}\cdots\cdots(60)$$

として近似的に

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd\,(1+k^2\alpha^2\coth^2 kd)}\cdots\cdots(61)$$

この結果はあまりにも他の式と異なり，疑問である。

(b) 佐藤博士は，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi}{c}&=-x+\beta\cosh k(y+d)\sin kx\\ \frac{\psi}{c}&=-y+\beta\sinh k(y+d)\cos kx\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(62)$$

より　$\eta=\beta\sinh k(\eta+d)\cos kx\cdots\cdots(63)$

とし，逐次計算の結果，

$$\begin{aligned}\eta=&\frac{1}{2}k\beta^2\cosh kd\sinh kd\\ &+\left\{\beta\sinh kd+\frac{3}{4}k^2\beta^3\left(\sinh kd+\frac{3}{2}\sinh^3 kd\right)\right\}\cos kx\\ &+\frac{1}{2}k\beta^2\cosh kd\sinh kd\cos 2kx+\frac{1}{4}k^2\beta^3\left(\sinh kd+\frac{3}{2}\sinh^3 kd\right)\cos 3kx\cdots\cdots(64)\end{aligned}$$

$$a=\beta\sinh kd\left\{1+\frac{3}{4}k^2\beta^2\left(1+\frac{3}{2}\sinh^2 kd\right)\right\}$$

とおけば，　$\eta=\frac{1}{2}ka^2\coth kd+a\cos kx+\frac{1}{2}ka^2\coth kd\cos 2kx+\frac{1}{4}k^2a^3\left(\coth^2 kd+\frac{1}{2}\right)\cos 3kx\cdots\cdots(65)$

(c) 筆者は，

$$\eta=k\alpha\coth kd\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}k^2\alpha^2\left(\frac{5}{3}+\coth^2kd\right)\right\}\alpha$$
$$+\left\{1+\frac{3}{4}k^2\alpha^2\left(\frac{1}{2}+\coth^2kd\right)+\frac{5}{8}k^4\alpha^4\left(\frac{13}{24}+\frac{11}{3}\coth^2kd+\coth^4kd\right)\right\}\alpha\cos kx$$
$$+\frac{1}{2}k\alpha\coth kd\left\{1+k^2\alpha^2\left(\frac{13}{24}+\frac{11}{3}\coth^2kd+\coth^4kd\right)\right\}\alpha\cos 3kx$$
$$+\frac{1}{8}k^3\alpha^3\coth kd\left(\frac{5}{3}+\coth^2kd\right)\alpha\cos 4kx \quad\cdots\cdots(66)$$

$$\eta_{\max}-\eta_{\min}=2a$$

とおけば，

$$\eta=\text{const.}+\left\{1-\frac{1}{4}k^2a^2\left(\frac{1}{2}+\coth^2kd\right)\right\}a\cos kx$$
$$+\frac{1}{2}ka\coth kd\,a\cos 2kx+\frac{1}{4}k^2a^2\left(\frac{1}{2}+\coth^2kd\right)a\cos 3kx \quad\cdots\cdots(67)$$

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1+\frac{1}{4}k^2a^2(1+3\coth^2kd)\right.} \quad\cdots\cdots(68)$$

佐藤博士の式と筆者の式とはほとんど一致している。この両者の式より，

平均水面の静水面よりの上昇は，

$$\delta=\frac{1}{2}ka^2\coth kd \quad\cdots\cdots(69)$$

水粒子の軌道曲線は閉じていないので，水の質量輸送があり，輸送速度は

$$u'=k^2a^2c\frac{\cosh 2k(y+d)}{2\sinh^2kd} \quad\cdots\cdots(70)$$

一波長当りの輸送運動量は，

$$M=\pi\rho a^2c\coth kd \quad\cdots\cdots(71)$$

この方法は ϕ,ψ の表示がただ1項のみを用いた不完全のために，表面において $p=\text{const.}$ の式を満足せしめることができない重大な欠陥をもつており，この点は Rayleigh によつて改良されている。

5. 有限波高のポテンシャル波の修正理論

(1) 深海波の場合　Rayleigh は Stokes の方法を改良して[12]，

$$\psi=y-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-ny}\cos nx \quad\cdots\cdots(72)$$

とおき，

$$\eta=\alpha_1\left(1+\frac{5}{8}\alpha_1^2\right)\cos x-\frac{1}{2}\alpha_1^2\cos 2x+\frac{3}{8}\alpha_1^3\cos 3x \quad\cdots\cdots(73)$$

$$\alpha_1\left(1+\frac{5}{8}\alpha_1^2\right)=a$$

とおき，

$$\eta=a\cos x-\frac{1}{2}a^2\cos 2x+\frac{3}{8}a^3\cos 3x \quad\cdots\cdots(74)$$

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}(1+k^2a^2)} \quad\cdots\cdots(75)$$

また続いて，

$$\eta=\left(\alpha_1+\frac{5}{8}\alpha_1^3\right)\cos x-\left(\frac{1}{2}\alpha_1^2+\frac{4}{3}\alpha_1^4\right)\cos 2x+\frac{3}{8}\alpha_1^3\cos 3x-\frac{1}{3}\alpha_1^4\cos 4x \quad\cdots\cdots(76)$$

$$\eta=a\cos x-\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{17}{24}a^4\right)\cos 2x+\frac{5}{8}a^3\cos 3x-\frac{1}{3}a^4\cos 4x \quad\cdots\cdots(77)$$

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1+k^2a^2+\frac{4}{5}k^4a^4\right)} \quad\cdots\cdots(78)$$

ともだしている。

(2) 浅海波の場合　筆者は Struik の計算の途中に誤算のあることを知り，Rayleigh の改良した方法を用いて有限波高のポテンシャル波の表示式を誘導した[13]。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\phi}{c}&=-x+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{\cosh nk(y+d)}{\sinh nkd}\sin nkx\\ \frac{\psi}{c}&=-y+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{\sinh nk(y+d)}{\sinh nkd}\cos nkx\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(79)$$

$y=\eta$ にて $\psi=0$ とし，

$$\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\frac{\sinh nk(\eta+d)}{\sinh nkd}\cos nkx$$

$$\eta=\alpha_1\cos kx\left(1+k\eta\coth kd+\frac{1}{2}k^2\eta^2+\frac{1}{6}k^3\eta^3\coth kd+\cdots\cdots\right)$$
$$+\alpha_2\cos 2kx\left(1+2k\eta\coth 2kd+2k^2\eta^2+\frac{4}{3}k^3\eta^3\coth 2kd+\cdots\cdots\right)$$
$$+\alpha_3\cos 3kx\left(1+3k\eta\coth 3kd+\frac{9}{2}k^2\eta^2+\frac{9}{2}k^3\eta^3\coth 3kd+\cdots\cdots\right)$$

と展開して逐次近似法を用いる。

$p=\text{const.}$ の式において，$\cos kx$ の係数を 0 とすれば，

$$g\left\{1+\frac{3}{8}k^2\alpha_1^2(1+2\coth^2 kd)+\frac{1}{2}k\alpha_2\frac{1+2\coth^2 kd}{\coth kd}\right\}$$
$$-c^2k\coth kd\left\{1+\frac{1}{8}k^2\alpha_1^2+\frac{1}{2}k\alpha_2\frac{2-\coth^2 kd}{\coth kd}\right\}=0$$

$\cos 2kx$ の係数を 0 とすれば，

$$g\left(\frac{1}{2}k\alpha_1^2\coth kd+a_2\right)-c^2\left\{\frac{1}{4}k^2\alpha_1^2(3-\coth^2 kd)+2k\alpha_2\coth 2kd\right\}=0$$

$\cos 3kx$ の係数を 0 とすれば，

$$g\left\{\frac{1}{8}k^2\alpha_1^3 1+2\coth^2 kd\right\}+\frac{1}{2}k\alpha_1\alpha_2\frac{1+2\coth^2 kd}{\coth kd}+a_3\}$$
$$-c^2\left\{\frac{3}{8}k^3\alpha_1^3\coth kd+k^2\alpha_1\alpha_2\left(3-\frac{1}{2}\coth^2 kd\right)+3k\alpha_3\coth 3kd\right\}=0$$

となり，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots$等を用いることによつて $p=\text{const.}$ を厳密に満足せしめることができるようになる。

上式を連立方程式として，$\alpha_2,\alpha_3\cdots$を α_1 にて表わせば，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2&=\frac{3}{4}k\alpha_1^2\coth kd(\coth^2 kd-1)\\ \alpha_3&=\frac{1}{64}k^2\alpha_1^3(\coth^2 kd-1)(3\coth^2 kd+1)(9\coth^2 kd-13)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(80)$$

となり，

$$c^2=\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1+\frac{1}{8}k^2\alpha_1^2(9\coth^4 kd-6\coth^2 kd+5)\right\}\cdots\cdots(81)$$

$$\eta=\frac{1}{2}k\alpha_1^2\coth kd+\left\{1+\frac{3}{8}k^2\alpha_1^2\coth^2 kd(1+2\coth^2 kd)\right\}a_1\cos kx$$
$$+\frac{1}{4}k\alpha_1\coth kd(3\coth^2 kd-1)\alpha_1\cos 2kx$$
$$+\frac{3}{64}k^2\alpha_1^2(3\coth^2 kd-1)(3\coth^4 kd+1)\alpha_1\cos 3kx\cdots\cdots(82)$$

$$\eta_{\max}-\eta_{\min}=2\left\{1+\frac{3}{64}k^2\alpha_1^2(9\coth^6 kd+13\coth^4 kd+11\coth^2 kd-1)\right\}\alpha_1=2a\quad\cdots\cdots(83)$$

とおけば，

$$\eta=\frac{1}{2}ka^2\coth kd+\left\{1-\frac{3}{64}k^2a^2(3\coth^2 kd-1)(3\coth^4 kd+1)a\cos kx\right.$$
$$+\frac{3}{4}ka\coth kd(3\coth^2 kd-1)\left\{1-\frac{3}{32}k^2a^2(9\coth^6 kd\right.$$
$$\left.+13\coth^4 kd+11\coth^2 kd-1)\right\}a\cos 2kx$$
$$+\frac{3}{64}k^2a^2(3\coth^2 kd-1)(3\coth^4 kd+1)a\cos 3kx\cdots\cdots(84)$$

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1+\frac{1}{8}k^2a^2(9\coth^4 kd-6\coth^2 kd+5)\right\}}\cdots\cdots(85)$$

これらの級数の収束性の限界を求めることはほとんど不可能であろう。

最大波高の限界すわなち波の砕ける限界は $u=c$ とすれば求められるはづではあるが，その近傍に至れば，級数の収束性はきわめて悪く，級数を数項取つて用いることは全く無理である。

水粒子の軌道は下部がやや偏平な西洋梨のような曲線で閉じないので，水の質量輸送がある。また軌道下部で運動の遅滞が起ることになる。

平均水面の静水面よりの上昇は，

$$\delta=\frac{1}{2}ka^2\coth kd \quad\cdots\cdots(86)$$

質量輸送の速度は，

$$u'=\frac{1}{2}k^2a^2c\frac{\cosh 2k(y+d)}{\sinh^2 kd} \quad\cdots\cdots(87)$$

もし有限波高の表面波であつて変形せずに伝播しうる波が上式のように求められるならば，d を微小として $\tanh kd\to kd$ に移行すれば長波が得られることになる。しかるに有限波高の長波は必ず変形をともない，変形せずに伝播しうる有限波高長波は存在しえないことが証明されている。これは重大なパラドックスである。ここにも波の理論に疑問が残つている。

6. 写像論による有限波高ポテンシャルの理論

(1) 深海波の場合　Levi-Civita (1925) によつてなされた有限波高のポテンシャル波の研究は，別にむずかしい波を生んだものではなかつたが，従来の理論を数理的に整え，有限波高表面波の存在を明確にしたもので，現在における最も進んだ理論である[14)]。

系全体に波速 c と同じ大きさで方向反対の流れを付加して，系を定常的ならしめておく。速度ポテンシャルが存在すれば複素ポテンシャル $w=\phi+i\psi$ は $z=x+iy$ の正則函数であり，$q=\sqrt{u^2+v^2}$, $z=re^{i\theta}$ として，

$$\frac{dw}{dz}=qe^{-i\theta} \quad\cdots\cdots(88)$$

$$\omega=i\log\frac{1}{c}\frac{dw}{dz}=\theta+i\log\frac{q}{c}=\theta+i\tau \quad\cdots\cdots(89)$$

なる ω を導入し，$\tau=\log(q/c)$ すなわち $q=ce^{\tau}$ とする。

水面 $\psi=0$ で，水面条件は，

$$\frac{1}{2}q^2+gy=\text{const.} \quad\cdots\cdots(90)$$

これを ϕ で微分し，$\partial y/\partial\phi=\sin\theta/q$ なる関係を入れると，

$$e^{3\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\phi}+\frac{g}{c^3}\sin\theta=0 \quad\cdots\cdots(91)$$

$i\omega$ は週期 λ（波長）の週期函数であるが，w は一様の流れを含み週期函数ではないから，w の代りに $\zeta=\rho e^{i\sigma}$ を用い，

$$\zeta=e^{\frac{2\pi i}{c\lambda}w} \quad\cdots\cdots(92)$$

とする。w が z の函数である代りに，$\omega=\theta+i\tau$ は $\zeta=\rho e^{i\sigma}$ の函数とする。ζ-平面上で水面 $\psi=0$ は単位円 $|\rho|=1$ に写像され，その単位円内で ω は ζ の正則函数である。単位円上では，$\sigma=2\pi\phi/c\lambda$ であるから，水面条件 (91) は，

$$\frac{d\tau}{d\sigma}=Pe^{-3\tau}\sin\theta \quad\cdots\cdots(93)$$

となり，$P=g\lambda/2\pi c^2$ がパラメーターとなる。$P\leqq 1$ として，ω を展開して，

$$\left.\begin{aligned}\omega=\theta+i\tau&=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(\zeta)\mu^n\\ P=1-k&=1-\sum_{n=1}^{\infty}k_n\mu^n\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(94)$$

もし微小波高とすれば，

(93) より　$$-\rho\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\doteqdot P\theta \quad\cdots\cdots(95)$$

となつて，　$$\theta=\mu\rho^P\sin P\sigma \quad\cdots\cdots(96)$$

これは $\omega=-i\mu\zeta$ すなわち

$$\theta+i\tau=-i\mu\rho\cos\sigma+\mu\rho\sin\sigma \quad\cdots\cdots(97)$$

とおき，$P=1$ としたものに相当する。

$P=1$ は，　$c=\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ ……(98)

であり，　$x=\dfrac{\lambda}{2\pi}(\sigma+\mu\sin\sigma),\quad y=\dfrac{\lambda}{2\pi}\mu(1-\cos\sigma)$ ……(99)

より，　$y=\dfrac{\lambda}{2\pi}\mu\left(1-\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$ ……(100)

となり微小波高理論と一致する。

$$\frac{d\tau}{d\sigma}-\theta=(1-k)\,Q(\theta,\tau)-k\theta\ ,\qquad Q(\theta,\tau)=e^{-3\tau}\sin\theta-\theta=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\mu^n \quad\cdots\cdots(101)$$

$$Q_n=\frac{1}{n\,!}\left[\frac{d^nQ}{d\mu^n}\right]_{\mu=0} \quad\cdots\cdots(102)$$

$$\left.\begin{aligned}&e^{-3\tau}=1-3\tau+\frac{9}{2}\tau^2-\frac{9}{2}\tau^3+\frac{27}{8}\tau^4+\cdots\\&\sin\theta=\theta-\frac{1}{6}\theta^3+\frac{1}{120}\theta^5+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(103)$$

と展開し，さらに，

$$\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n\mu^n,\qquad \theta=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\mu^n \quad\cdots\cdots(104)$$

とすれば，(101) より，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\tau_2}{d\sigma}-\theta_2=Q_2,\qquad \frac{d\tau_3}{d\sigma}-\theta_3=Q_3-k_2\theta_1\\&\frac{d\tau_4}{d\sigma}-\theta_4=Q_4-k_2Q_2-k_2\theta_2,\qquad \frac{d\tau_5}{d\sigma}-\theta_5=Q_5-k_2Q_3-k_2\theta_3-k_4\theta_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(105)$$

となる。ここに，

$$\left.\begin{aligned}&Q_2=-3\tau_1\theta_1\\&Q_3=-3(\tau_1\theta_2+\tau_2\theta_1)+\frac{9}{2}\tau_1^2\theta_1-\frac{1}{6}\theta_1^3\\&Q_4=-3(\tau_1\theta_3+\tau_2\theta_2+\tau_3\theta_1)+\frac{9}{2}\tau_1(2\tau_2\theta_1+\tau_1\theta_2)-\frac{1}{2}\theta_1^2\theta_2-\frac{9}{2}\tau_1^3\theta_1+\frac{1}{2}\tau_1\theta_1^3\\&Q_5=-3(\tau_1\theta_4+\tau_2\theta_3+\tau_3\theta_2+\tau_4\theta_1)+\frac{9}{2}(\tau_1^2\theta_3+2\tau_1\tau_2\theta_2+\tau_2^2\theta_1+2\tau_1\tau_3\theta_1)\\&\qquad-\frac{1}{2}(\theta_1^2\theta_3+\theta_1\theta_2^2)-\frac{9}{2}\tau_1^2(\tau_1\theta_2+3\tau_2\theta_1)\\&\qquad+\frac{1}{2}\theta_1^2(3\tau_1\theta_2+\tau_2\theta_1)+\frac{27}{8}\tau_1^4\theta_1-\frac{3}{4}\tau_1^2\theta_1^3+\frac{1}{120}\theta_1^5\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\ (106)$$

第1近似として，

$$\omega_1=-i\zeta,\quad \tau_1=-\cos\sigma,\quad \theta_1=\sin\sigma \quad\cdots\cdots(107)$$

であるから逐次 τ_n,θ_n が求められ，$\omega_n=\theta_n+i\tau_n$ が得られ，従つて k_n が定まる。

$k_1=k_3=k_5=\cdots=0$ となり，

$$\left.\begin{aligned}&Q_2=\frac{3}{2}\sin2\sigma,\quad \tau_2=-\frac{3}{2}\cos5\sigma,\quad \theta_2=\frac{3}{2}\sin2\sigma,\quad \omega_2=-i\frac{3}{2}\zeta^2,\quad k_2=1\\&\left.\begin{aligned}&Q_3=\frac{17}{3}\sin3\sigma+\sin\sigma,\quad \tau_3=-\frac{17}{6}\cos3\sigma,\quad \theta_3=\frac{17}{6}\sin3\sigma,\\&\omega_3=-i\frac{17}{6}\zeta^3,\qquad k_3=0\end{aligned}\right\}\\&\left.\begin{aligned}&Q_4=\frac{71}{4}\sin4\sigma+4\sin2\sigma,\qquad \tau_4=-\frac{71}{12}\cos4\sigma-\cos2\sigma,\\&\theta_4=\frac{71}{4}\sin4\sigma+\sin2\sigma,\qquad \omega_4=-i\left\{\frac{71}{12}\zeta^4+\zeta^2\right\},\quad k_4=\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots(108)$$

$$Q_5=52,3\sin 5\sigma+16\sin 3\sigma+\frac{7}{2}\sin\sigma,\quad \tau_5=-\left(13+\frac{3}{40}\right)\cos 5\sigma-\frac{15}{4}\cos 3\sigma$$
$$\theta_5=\left(13+\frac{3}{40}\right)\sin 5\theta+\frac{15}{4}\sin 3\sigma,\quad \omega_5=-i\left(13+\frac{3}{40}\right)\zeta^5+\frac{15}{4}\zeta^3,\quad k_5=0$$

$$\omega=-i\zeta\mu-i\frac{3}{2}\zeta^2\mu^2-i\frac{17}{6}\zeta^3\mu^3-i\left\{\frac{71}{12}\zeta^4+\zeta^2\right\}\mu^4-i\left(\frac{523}{40}\zeta^5+\frac{15}{4}\zeta^3\right)\mu^5-\cdots\cdots\cdots(109)$$

$$P=1-\mu^2-\frac{5}{2}\mu^4-\cdots\cdots(110)$$

しかるに，　$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{c}e^{iw}$　より

$$\left.\begin{aligned}&z=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{iw}\,d\sigma,\quad x=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\cos\theta\,d\sigma,\\&y=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\sin\theta\,d\sigma\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(111)$$

であるから，

$$\left.\begin{aligned}x=&\frac{\lambda}{2\pi}\Big\{\sigma+\mu\sin\sigma+\mu^2\sin 2\sigma+\mu^3\frac{3}{2}\sin 3\sigma\\&+\mu^4\left(\frac{8}{3}\sin 4\sigma+\frac{1}{2}\sin 2\sigma\right)+\mu^5\left(\frac{125}{24}\sin 5\sigma+\frac{19}{12}\sin 3\sigma\right)+\cdots\Big\}\\y=&\frac{\lambda}{2\pi}\Big\{\mu(1-\cos\sigma)+\mu^2(1-\cos 2\theta)+\frac{3}{2}\mu^3(1-\cos 3\theta)\\&+\mu^4\left(\frac{8}{3}(1-\cos 4\sigma)+\frac{1}{2}(1-\cos 2\sigma)\right)+\mu^5\left(\frac{125}{24}(1-\cos 5\theta)\right.\\&\left.+\frac{19}{12}(1-\cos 3\theta)\right)+\cdots\Big\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(112)$$

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{1}{1-\mu^2-2/5\,\mu^4-\cdots}}\cdots\cdots(113)$$

$a=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y\,dx$ とおけば，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ として，

$$ka=\mu\left\{1+\frac{1}{2}\mu+\frac{3}{2}\mu^2+\frac{13}{6}\mu^3+\frac{163}{24}\mu^4+\cdots\right\}\cdots\cdots(114)$$

$$\mu=ka\left\{1-\frac{1}{2}ka-k^2a^2+\frac{23}{24}k^3a^3+\cdots\right\}\cdots\cdots(115)$$

従つて

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1+k^2a^2-k^3a^3+\frac{7}{4}k^4a^4-\frac{49}{12}k^5a^5+\cdots\right.}\cdots\cdots(116)$$

(2) 浅海波の場合　Struik (1926) は Levi-Civita の方法を有限水深の場合に拡張したが，残念なことに途中で符号を誤まり，結果は正しくない[15]。

ζ-平面において水底 $\psi=0$ を単位円 $|\rho|=1$ とし，水面 $\psi=cd$ (d：水深) を半径 R，その鏡像 $\psi=-cd$ を半径 $1/R$ の円に写像せしめる。

$$R=e^{\frac{2\pi}{c\lambda}\psi}=e^{\frac{2\pi d}{\lambda}}\cdots\cdots(117)$$

この2円 $\zeta=Re^{i\sigma}$ と $\zeta=(1/R)e^{i\sigma}$ との間の環状領域において $i\omega$ は ζ の正則函数であり，単位円上では $i\omega$ は実数となり，半径 R_1 および $1/R$ の円上では表面条件

$$\frac{d\tau}{d\sigma}=\pm Pe^{-3\tau}\sin\theta\cdots\cdots(118)$$

を満足していなければならない。

微小波高に対しては，

$$\omega_1=-\frac{1}{2}i\mu\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\cdots\cdots(119)$$

とすれば表面条件より，

$$P=\frac{R+1/R}{R-1/R}\cdots\cdots(120)$$

となり， $c=\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}\tanh\dfrac{2\pi d}{\lambda}}$ ……(121)

が導かれる。有限波高に対しては，

$$\frac{dw}{dz}=ce^{m-iw} \quad\text{……(122)}$$

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\mu^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^{-n}$$

$|\zeta|=R$ では (118) を満足し， $P=g\dfrac{\lambda}{2\pi\lambda^2}$ の代りに $K=Pe^{3m}$ を用い，

$$K=K_0+\sum_{n=1}^{\infty}K_n\mu^n \quad\text{……(123)}$$

とする。m は， $e^{-m}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\zeta\dfrac{e^{iw}}{\zeta}d\zeta$ ……(124)

にて表わされる。$|\rho|=Re^{i\sigma}$ 上で

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_nD_n\cos n\sigma+\beta_nD_n\sin n\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\mu^n\\ \tau&=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_nS_n\sin n\sigma+\beta_nS_n\cos n\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n\mu^n\\ S_n&=R^n+R^{-n},\quad D_n=R^n-R^{-n}\end{aligned}\right\} \quad\text{……(125)}$$

と展開すると $\omega=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n(\zeta^n-\zeta^{-n})-i\beta_n(\zeta^n+\zeta^{-n})\}$ ……(126)

となり，$\omega_1=-\dfrac{1}{2}i\mu(\zeta+\zeta^{-1})$ として逐次計算をすすめ

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1=D_1\sin\sigma,\quad \theta_2=D_2\gamma_2\sin 2\sigma,\quad \theta_3=D_3\gamma_3\sin 3\sigma,\\ &\tau_1=-S_1\cos\sigma,\quad \tau_2=-S_2\gamma_2\cos 2\sigma,\quad \tau_3=-S_3\gamma_3\cos 3\sigma\end{aligned}\right\} \quad\text{……(127)}$$

$$\gamma_2=\frac{3}{2}\frac{S_2+2}{D_1^{\,2}},\quad \gamma_3=\frac{1}{6}\frac{17S_4+40S_2+48}{D_1^{\,4}} \quad\text{……(128)}$$

$$e^{-m}=1+\mu^2 \quad\text{……(129)}$$

$$K_1=0,\quad K_2=\frac{1}{2}\frac{S_5+6S_3+11S_2}{D_1^{\,3}} \quad\text{……(130)}$$

$z=\dfrac{\lambda}{2\pi i}e^m\displaystyle\int_\zeta\dfrac{e^{i\omega}}{\zeta}d\zeta$ より，

$$\begin{aligned}z=&\frac{w}{c}+\frac{\lambda}{\pi}\mu\sin\frac{2\pi w}{c\lambda}+\frac{\lambda}{2\pi}\left(\gamma_2+\frac{1}{2}\right)\mu^2\sin\frac{4\pi w}{c\lambda}\\ &+\frac{\lambda}{3\pi}\left(\gamma_3+\gamma_2+\frac{1}{6}\right)\mu^3\sin\frac{6\pi w}{c\lambda}+\left(\gamma_2-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\pi}\mu^3\sin\frac{2\pi w}{c\lambda}\end{aligned} \quad\text{……(131)}$$

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{D_1}{S_1}\left(1-\frac{S_4+11S_2-6}{2D_1^{\,4}}\mu^2\right) \quad\text{……(132)}$$

ϕ をパラメーターとして，

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\phi}{c}+A_1\cosh kd\sin k\frac{\phi}{c}+A_2\cosh 2kd\sin 2k\frac{\phi}{c}+A_3\cosh 3kd\sin 3k\frac{\phi}{c}+\cdots\\ \eta&=A_1\sinh kd\cos k\frac{\phi}{c}+A_2\sinh 2kd\cos 2k\frac{\phi}{c}+A_3\sinh 3kd\cos 3k\frac{\phi}{c}+\cdots\end{aligned}\right\} \quad\text{…(133)}$$

ここに， $A_2=\dfrac{1}{8}(3\coth^2kd+1)kA_1^{\,2}$， $A_3=\dfrac{1}{8}\left(\coth^4kd+2\coth^2kd+\dfrac{1}{8}\right)k^2A_1^{\,3}$ のような結果を Struik はだしているが，これには誤算があり，計算をしなおした結果は，

$$A_2=\frac{1}{8}(3\coth^2kd+1)kA_1^{\,2},\quad A_3=\frac{1}{8}\coth^2kd(\coth^2kd+2)k^2A_1^{\,3} \quad\text{……(134)}$$

となり， $2a=\eta_{\max}-\eta_{\min}=2(A_1\sinh kd+A_3\sinh 3kd)$ ……(135)

とすれば，修正の結果

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1+\frac{1}{8}k^2a^2(9\coth^4kd-6\coth^2kd+5)\right\}} \quad\cdots\cdots(136)$$

となり，前述の筆者の求めた結果と全く一致している。

(133) より ϕ を消去すれば，

$$\begin{aligned}\eta=\text{const.}&+\left\{1-\frac{3}{64}k^2a^2(3\coth^2kd-1)(3\coth^4kd+1)\right\}a\cos kx\\&+\frac{1}{4}ka\coth kd(3\coth^2kd-1)\left\{1-\frac{3}{32}k^2a^2(9\coth^6kd\right.\\&\left.+13\coth^4kd+11\coth^2kd-1)\right\}a\cos 2kx\\&+\frac{3}{64}k^2a^2(3\coth^2kd-1)(3\coth^4kd+1)a\cos 3kx \quad\cdots\cdots(137)\end{aligned}$$

7. 筆者の考察

波速 c に等しく方向反対の流れを付加して，系を定常的ならしめる操作を有限波高の場合のように質量輸送のあるときに適用することに疑義を持ち，時間項を残したまま計算してみよう。

$$\left.\begin{aligned}\phi&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\cosh nk(y+d)}{\sinh nkd}\sin n(kx-\sigma t)\\\eta&=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n(kx-\sigma t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(138)$$

とおく。表面条件は，$\eta=\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}\right]_{y=\eta}$ を書きなおして，$y=\eta$ にて，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial y}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+g\frac{\partial\phi}{\partial y}=0 \quad\cdots(139)$$

(138) を (139) に代入して係数を決定してゆくと，$2a=\eta_{\max}-\eta_{\min}$ として，

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd\left\{1+\frac{1}{8}k^2a^2\left(9\coth^4kd-15\coth^2kd+13-\frac{1}{\coth^2kd}\right)\right.} \quad\cdots\cdots(140)$$

$$\begin{aligned}\eta=&\frac{1}{4}ka^2\frac{1-\coth^2kd}{\coth kd}\\&+a\left\{1-\frac{1}{64}k^2a^2\left(29\coth^5kd+18\coth^4kd+62\coth^2kd-16+\frac{5}{\coth^2kd}\cos(kx-\sigma t)\right)\right.\\&+\frac{1}{4}ka^2\frac{1+3\coth^4kd}{\coth kd}\cos 2(kx-\sigma t)+\frac{1}{64}k^2a^3\left(27\coth^6kd+18\coth^4kd\right.\\&\left.+64\coth^2kd-16+\frac{5}{\coth^2kd}\right)\cos 3(kx-\sigma t) \quad\cdots\cdots(141)\end{aligned}$$

となり，全く異なる結果を得た。

8. 補　　遺

孤立波や砕波についても多くの数理的解析が試みられており，すでに昨年，その二，三について説明されているのでここには省略する。

特に注目すべきは，Jeffreys より始まつた有限峯長の海の研究である[16)]。Jeffreys は二次的な拡りを考え，峯長を l とすれば，

$$\left.\begin{aligned}\eta&=a\cos(kx-\sigma t)\cos\mu y\\\mu&=\frac{2\pi}{l}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(142)$$

とし，
$$c'=c\sqrt[4]{1+\frac{\lambda^2}{l^2}} \quad\cdots\cdots(143)$$

ここに c は無限峯長の波速としている。

この有限峯長の波については改めて論ずることにする。

使用した記号表

x：水面に沿つて波の伝播方向に取つた座標，　y：水面を原点として鉛直上方に取つた座標，

(x, y)：水粒子の波動変位の x, y の成分，

η：水面の波動による水位，

v：水粒子の鉛直速度成分，

T：週期，$\sigma=2\pi/T$，

a：振幅，

ρ：水の密度，

p：圧力，

C_G：群速度，

ψ：流れの函数，

E_P：一波長当りのポテンシャルエネルギー，

E：一波長当りの全エネルギー，$E=E_P+E_K$，

r_V：軌道楕円の鉛直方向の半径，

u'：有限波高波の質量輸送の速度，

(X, Y)：トロコイド波における水粒子の波動運動の平均位置の x, y の成分，

u：水粒子の水平速度成分，

λ：波長，$k=2\pi/\lambda$，

d：水深，

H：波高，$H=2a$，

c：波速，

ϕ：速度ポテンシャル，

w：複素ポテンシャル，$w=\phi+i\psi$，

E_K：一波長当りの運動エネルギー，

r_H：軌道楕円の水平方向の半径

δ：波の平均水面の静水面よりの上昇，

M：有限波高波の運動量輸送，

参考文献

1) Lamb : Hydrodynamics, 6版 p. 423.
2) 同 上 : p. 418.
3) Michell : The Highest Waves in Water, Phil. Mag. (5) 36, p. 430 (1893).
4) Stoker : Formation of Breakers and Bores, Com. on Applied Math. (1) 1, p. 1～87 ; (1948).
Stoker : The Breaking of Waves in Shallow Water, Annuals of New York Acad. Sciences (3) vol. 51, p. 360, (1949).
5) Sverdrup and Munk : Wind, Sea and Swell : Theory of Relations for Forcasting, U.S. Hydrographic Office, Tech. Rep. 1, Pub. No.601, p. 5～9, p. 37 (1947).
速水頌一郎：海の波に関する最近の研究，建設工学，vol. 3, No. 3, p. 22 (1950).
6) Seiwell : Sea Surface Roughness Measurements in Theory and Practice, Annuals of New York Acad. Sciences (3) vol. 5, p. 483 (1949).
Putz : Statistical Distributions for Ocean Waves, Trans. AUG, (5) 33, p. 685 (1952).
Longuet-Higgins : J. Mar. Res. 11, p. 245 (1952).
7) Pierson-Marks : The Power Spectrum Analysis of Ocean wave Records, Trans. AGU, (5) 33, p. 834 (1952).
Pierson : The Theory of The Refraction of a Short Crested Gaussian Sea Surface with Application to the Northern New Jersey Coast, Proc. 3 Conference on Coastal Eng., p. 86 (1952).
8) Lamb-Hydrodynamics, 6版 p. 241.
9) St. Venand : Flamant : De la Houle et du Clopotis, Ann. Ponts et Chauss., (1888).
10) Stokes : On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. of Cambridge Phil. Soc., vol. 8 (1847).
Rayleigh : On Waves, Phil. Mag., Series 5, vol. 1 (1876).
Rayleigh : On Progressive Waves, Proc. of London Math. Soc. vol. 9 (1877).
Lamb : Hydrodynamics, 6版 p. 417.
11) Hamada : Breakers and Beach Erosions, Report of Transportation Tech. Res. Inst. No. 1 (1951).
Satō : Surface Waves in Shallow Water, Jour. of Res., Pub. Works Res. Ins., vol. 1 (1954).
12) Rayleigh : Hydrodynamical Notes, Phil. Mag. Series 6, vol. 21 (1911).
Rayleigh : Deep Water Waves, Progressive or Stationary to the third Order of Approximation, Proc. of Roy. Soc. A, vol. XCI. p. 345 (1915).
13) Tanaka : On the Sea-waves, Tech. Reports of Osaka Univ., vol. 3, No. 65 (1953).
14) Levi-Civita : Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, Mathematische Annalen, vol. 93 p. 264 (1925).
15) Struik : Determination rigoureuse des ondes irrotationelles periodiques dans un canal à profondeur finie, Mathematische Annalens, vol. 95, p. 595 (1926).
16) Jeffreys : On water Waves near the Shore, Phil. Mag., vol. 48 (1924).