

第三編

鋼橋の抗壓材のバックリング安全度

第八章 直材に對するバックリング公式

25. 緒 論

材料強弱學の第二の範圍に、抗壓材のバックリング強度の理論程變化に富んだ歴史のあるものは末だない。又今日に於てすら、過去數十年の多くの勞力にも拘はらず、この狭い範圍の研究は完結されず、たゞ根本的の問題が完全に解明されたのみである。多くの困難な問題が嚴密な理論的解答を待ち焦れてゐる。現代の理論が幸ひに解決し得た問題の大部分は、我々に保證された工學的占有物たらしめん爲めに、實驗により最後の證明を成されんとしてゐる。

バックリング強度研究の直面してゐる困難の原因はその問題の特殊性に基いてゐる。他の總ての材料強弱學の問題は内力又は外力の安定平衡に關係してゐるか、又は安定平衡状態を考慮する事に歸着せしめられる。所がバックリング問題は外力と物體の彈性抵抗との間の不安定平衡の研究による全然別種の問題である。始めてバックリング問題を研究した Euler が數學的解法の正しい方向を指示したにも拘はらず、數十年間を通じてバックリング強度問題の解明を歪めた技術の誤謬と研究の失敗とは、上の事實の著しい誤認とバックリング強度計算の結果を許容應力と比較せんとした病癖とに存在してゐる。それ故バックリング安全度の決定を安全平衡状態に於ける彎曲應力の考慮に歸着せしめんとし、又は不安定平衡状態の研究による同種の考慮に同化せしめんとしたる研究は總て水泡に歸した。

バックリング安全度の批判に當つては必ずしも充分な安全度を持つた物體內の一定の應力強度を避ける事によつて決まらず、特殊の不確實な平衡状態の生ずるのを避ける事によつて決まる事を忘れてはならぬ。何故ならば此の状態は實際的には荷重が極く少し増加した時の變形と、それに伴ふ材料應力強度に生ずる非常に大きいが大さの不定な増大によつて示されるからである。バックリングの瞬間に彈性限界を超過するや否やとは無關係に、この内部抵抗の突然生ずる多少の弛緩にバックリング現象の特徴がある。

短柱に於て Euler 公式の成り立たない事は、先づ第一にその完全な利用の機會と又その推論の基礎となつた熟慮とを否認した。その不一致は Euler 公式が當然根本の形に於て考へなければならなかつたバックリング状態の生ずる以前の彈性限界の超過にその原因がある事を充分明かには認められてゐない。Tetmajer はその數多くの實驗に基いて、少くもバックリングの彈性的範圍に於ては、Euler 公式が成り立つ事を認めた。併しそれより以前に Engesser は既に兎も角一般化された形式に於ては Euler 公式は無制限に成り立つ事を述べた。彼は又集成

短柱の實驗結果とこの公式の結果の異なる原因がバックリング状態を生ずる迄に弾性限界を超過する事にあるを認め、明確に論及したドイツに於ける最初の人であつた。¹⁾ 併し Engesser の研究は最近 Kármán が精密な實驗により Engesser の假定の正当な事を證明する迄は餘り注意されなかつた。この二人の學者の研究の意義は特に困難なバックリング強度問題の理論的研究の基礎を造つた事にある。この種の理論的研究の結果を實際に用ひるには尙或る實驗値を數字的に決定する事が必要なのは自明の理である。幸にも Tetmajer の實驗の結果を示した Tetmajer の實驗公式の現今橋梁工に最も重要な材料である銻鐵に對する實驗係數は全部明確である。それ故今日に於ては Engesser-Kármán の理論的考察から出發し、或る實驗値の簡潔な表現として Tetmajer 公式を用ひる事により、困難な問題を理論的に論ずる事が出来る。此の意味に於て我々は總てのバックリング問題をバックリングの弾性範圍に於ても非弾性の範圍に於ても内力と外力との間の不安定平衡なりと考へねばならない。この事は勿論必要な箇々の場合にはバックリング安全度の研究に並んで始めから曲つてゐる部材又は偏倚荷重を受ける部材に於てバックリングの生ずる前に存在する變形により生ずる材料應力強度の計算を行ふ事を排斥しない。本來のバックリング問題はその種の計算を行ふ必要がなく序に行はれる。そしてバックリング問題及應力決定を一つの公式にまとめんとする實驗は最初から無益だと考へられる。

最も多く用ひられる公式の數値の概念を得る爲めに、次の章に於て先づ實際に見らるゝバックリング公式の簡単な考察をしよう。その次の章に於て始めて、鋼橋に於て見らるゝ特殊のバックリング問題の討究をなす理論的原理を得る爲めに、本書に於て重要な總ての弾性系の不安定平衡に關する理論を述べよう。

26. Euler のバックリング公式

長さ l 、断面一定、兩端に於て廻轉自由に支へられた部材に對して 1774 年 Euler²⁾ の公にした公式が成り立つ。即ち

$$P_k = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \dots \dots \dots (1)$$

茲に P_k をバックリング荷重、 E を弾性係數、 J を最少慣性能率とす。式 (1) は弾性法則が無制限に成り立つ事を假定してゐる。³⁾ 部材が兩端に於て廻轉出来ない時に於ても式 (1) は成り立つ。但しバックリング長 l は夫々變つた値をとる。 l_0 を部材長とすれば、バックリング長 l は

1) 此の問題に關する Engesser の最初の論文は 1889 年から始つた。ベルギーの學者 E. Lamarle が既に 1845 年に大論文 „Mmoire sur la flexion du bois“ に於て弾性限界が Euler 公式の有効限界である事を確めた事に言及せずにはおられない。Todhunter and Pearson, A History of Elasticity and Strength of Materials. Vol. I, Nr. 1253 ff. Cambridge 1886 参照。

2) Euler, Leonhard: De curvis elasticis. Lausanne und Genf 1744; deutsch in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 175. Leipzig, W. Engelmann.

3) 此式の誘導は 34 に在り。

- 一端が固定され、他端が廻轉自由に支へられた部材 $l = 0,7 l_0$
- 兩端が固定された部材 $l = 0,5 l_0$
- 一端が固定され、他端が自由なる部材 $l = 2 l_0$

Euler のバックリング公式は一定の安全率 ψ に對する必要な断面慣性能率を直接決定出来る。¹⁾ 即ち

$$J_{erf} = \frac{\psi}{\pi^2 E} P^2.$$

銻鐵に對して $\pi^2 = 9,87$ 、 $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ とすれば、以前プロシヤに於て橋梁に對し規定された安全率 $\psi = 5$ の時は

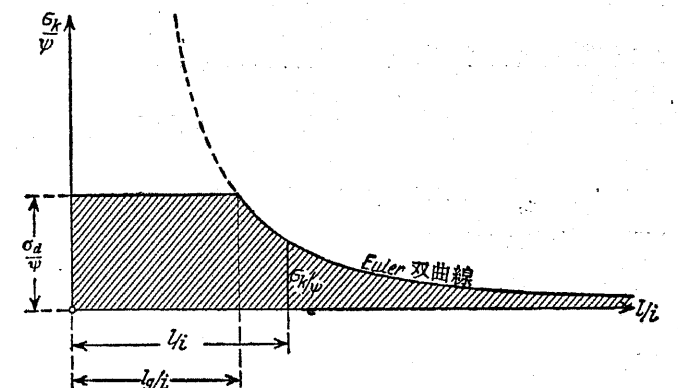
$$J_{erf} = 2,33 P^2$$

となり、 P を t 、 l を m とすれば、 J_{erf} は cm^4 で得られる。

断面積 F にて割り、商 $P_k/F = \sigma_k$ をバックリング應力とし式 (1) を變形すれば、 $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ (環動半徑) により次式が成り立つ。

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} \dots \dots \dots (2)$$

茲に l/i を部材の細長比と稱す。式 (2) はバックリング應力 σ_k を細長比 l/i の函數として表はす。幾何學的には此關係は双曲線により示される。第 88 圖に於て、横距は l/i の値を、縦距は安全率 ψ の時の σ_k/ψ の値を示す。 l/i が減少するに従ひ σ_k は ∞ に近づく。併し構造材料は強度



第 88 圖

が限定されてゐるから、短柱に於ては尙許容壓應力 σ_{ml} を超過しないかどうかを吟味すべきである。 l_0/i を限界長比と稱し、次式の成り立つ點である。

$$\frac{\sigma_k}{\psi} = \sigma_{ml}.$$

それ故 l/i がより小さい時は許容壓應力が断面決定をなす。限界長比は簡単に計算出来る様に次式により與へられる。即ち

$$\frac{l_0}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\psi \sigma_{ml}}}$$

1) 式 (1) に缺點があるにも拘はず、極最近迄プロシヤに於てこの式を用ひる事を規定した主なる原因はその計算法の簡單さにある。

$\phi=5, E$ 及び π^2 が上述と同じ時, σ_{zul} の色々の値に對し l_0/i を計算すれば次の如し.

$\sigma_{zul} =$	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
$l_0/i =$	71.2	69.2	67.4	65.6	64.0	62.6	61.2	59.9	58.7

以前のプロシヤの「鐵の上部構造を有する橋梁の設計に關する規定」によれば、既に述べた様に、Euler 公式により最小5倍の安全度を示してゐる。部材の兩端が空間的に固定される時は、常にバックリング長として部材全長をとる。他の部材と幾分か剛結される事を考慮して、バックリング長を減少する事は約 $l/i < 100$ の範圍の式(1)の不確實さを考へると推獎出来ないし、又實際行はれなかつた。即ち式(1)の缺點は細長比が小なる時に(銻鐵に於ては約 $l/i < 100$)成り立たなくなる事である。橋梁工に於て最も重要な略 $l/i = 30$ 乃至 100 の範圍では此式は全然成り立たない。此不一致の原因は短柱に於ては未だバックリング限界に達せず、まだ部材が直線又は直線に近く又壓應力が断面一様に分布してゐるうちに断面應力が弾性限界を超過する事に在る。弾性限界を超過する時は Hooke の法則は成立しないから、Euler のバックリング公式の基礎とする假定は最早正しくない。Euler 公式に於て断面應力に無關係であると假定されてゐる弾性係數 E は弾性限界を超過する時は σ_k の函數となり、バックリング應力増大するにつれ益々減少し、材料は或る程度柔くなる。斯くして部材は式(1)に到達する前にバックルする。それ故次の二つの範圍に區別する事が出来る、即ち Euler 公式が適合する弾性バックリングの範圍と、最早事情の異つた非弾性の範圍とである。

27. Tetmajer の公式

バックリング強度の法則を明かにするために、Zürich 工科大学教授 Tetmajer は廣大なバックリング實驗——今迄になき重要な——を企てた。¹⁾

強度約 $3,8 \text{ t/cm}^2$ の銻鐵に對し Tetmajer は次の關係のある事を見出した。

$$\frac{l}{i} = 10 \text{ 乃至 } 105 \text{ に對し } \sigma_k = 3,1 - 0,0114 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2 \dots (3)$$

$$\frac{l}{i} > 105 \text{ に對し } \sigma_k = 21220 \left(\frac{i}{l}\right)^2 \text{ t/cm}^2 \dots (4)$$

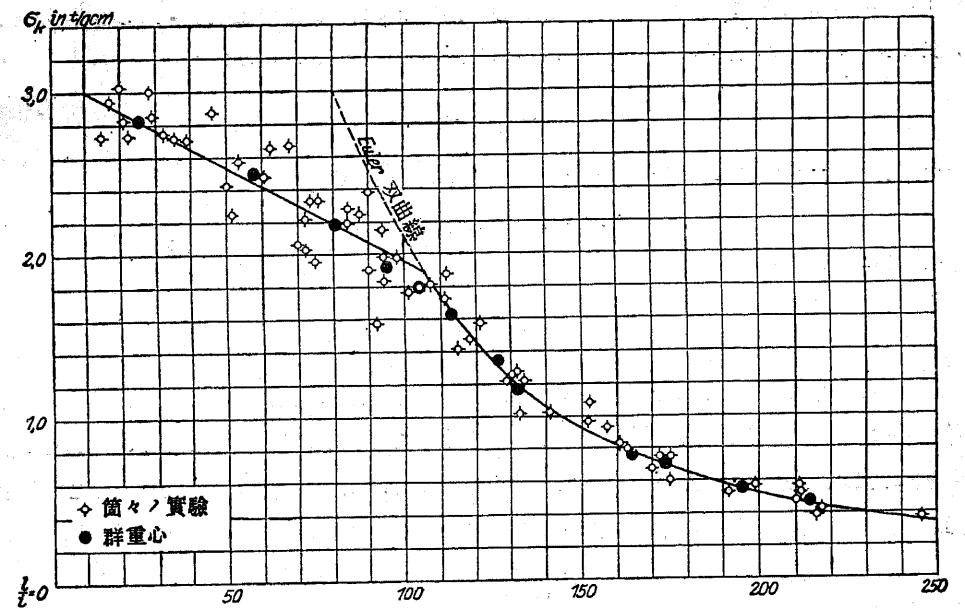
弾性バックリング範圍即ち $l/i > 105$ に對し Tetmajer は Euler 公式を用ひた。式(4)に於て $\pi^2 E = 21220 \text{ t/cm}^2$ である。細長比小なる部材に對して Tetmajer はその簡單なるため特に都合のよい直線式(3)を提議した。バックリング應力 σ_k と細長比 l/i との關係が第84圖に示されてゐる。此の圖に Tetmajer の數多くの實驗結果が記入されてゐる。黒くぬつた群重心はうまく Euler の双曲線と Tetmajer の直線とが合つてゐる。式(3)は經驗式であり、式(4)は實驗により確證された理論的根據から解明された關係である。鋳控除が全斷面の 12% より小なる時の、耐荷力に及ぼす断面減少の影響は Tetmajer によつて決定されなかつた。それ故ノ及 E

1) Tetmajer, L. v.: Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. Leipzig und Wien 1903.

の算定には全斷面を計算に入れるのが普通である。

Tetmajer は銻鐵部材の外に鍊鐵部材、木柱及銻鋼部材に就いても試驗を行つた。之等の構造部材の結果は橋梁工に關係がある。強度 6 t/cm^2 の銻鋼に就いて Tetmajer は次の關係を見出した。

$$\left. \begin{aligned} l/i = 10 \text{ 乃至 } 90 \text{ に對し } \sigma_k &= 3,35 - 0,0062 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2 \\ l/i > 90 \text{ " } \sigma_k &= 2 \cdot 210 \left(\frac{i}{l}\right)^2 \text{ t/cm}^2 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$



第84圖

強度 $6,8 \text{ t/cm}^2$ のシーメンス・マルチン鋼に對し Müller-Breslau¹⁾ は Kármán の注意深い實驗の結果に基いて計算した。即ち

$$\left. \begin{aligned} l/i = 10 \text{ 乃至 } 91 \text{ に對し } \sigma_k &= 3,84 - 0,0136 \frac{l}{i} \text{ t/cm}^2 \\ l/i > 91 \text{ " } \sigma_k &= 21420 \left(\frac{i}{l}\right)^2 \text{ t/cm}^2 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Tetmajer による抗壓材の耐荷力の計算 はドイツ國に於て非常に行はれた一定の安全係數 ϕ の證明によるものと、オーストリアに於て又近頃ドイツに於ても用ひられる最高應力——實際は假定の——證明によるものとの二つの方法がある。

a) 附録の第I表に細長比 $l/i = 10$ 乃至 210 の式(3)及(4)に基いて計算した銻鐵部材に對するバックリング應力 σ_k を網羅した。 ϕ を希望する安全率とすれば断面に於ける壓應力は σ_k/ϕ より大きくてはいけない。

1) Dr. Ing. Müller-Breslau: Über exzentrisch gedrückte Stäbe und über Knickfestigkeit, Eisenbau 1911, 339.

安全率 ψ は抗長材の安全率と歩調を合せて選ぶのが最も良い。次のものが望ましい。¹⁾

1. 衝撃附加によつて活荷重の動力學的作用を考慮した時、

普通の荷重の場合 $\psi = 3,$

特殊の荷重の場合 $\psi = 2,5$

2. 活荷重の動力學的作用を考へない時、

$\sigma_{zul} = 800$ 乃至 900 900 乃至 1100 >1100 に對し

$\psi = 4$ $3,5$ 3

例：バックリング長 5 m, 腹距離 20 mm を有する二溝形鋼より成る鋸鐵の抗壓材が 55 t の荷重を受ける時、安全率を 4 とせよ。[[NP 30 を用ひる。 $F = 117,6 \text{ cm}^2$, $i_{min} = 4,70 \text{ cm}$ なる故

$$\frac{l}{i} = \frac{500}{4,70} = 106,4$$

故に附録の第 I 表から $\sigma_k = 1,876 \text{ t/cm}^2$ である。それ故バックリング荷重は

$$P_k = 1,876 \cdot 117,6 = 220,5 \text{ t}$$

故に安全率は

$$\psi = \frac{220,5}{55} = 4.$$

b) σ_a を構造材料の抗壓強度とし、 σ_{zul} を張力又は純壓力の許容應力とすれば $\sigma_a : \sigma_{zul} = \psi$ は構造物の張力及純壓力に對し断面決定された部材の破壊に對する安全率である。但しその構造材料に對しては充分正確に $\sigma_a = \sigma_s$ であると假定する。今バックリング應力を受ける部材の断面決定をなす時、同じ安全率を持たさんとすれば

$$\frac{P}{F} = \frac{\sigma_k}{\psi} = \frac{\sigma_k}{\sigma_a} \sigma_{zul}$$

となる。 $\sigma_a / \sigma_k = \omega$ をバックリング係數と名附ければ、次の如し。

$$\omega \frac{P}{F} = \sigma_{zul}$$

鋸鐵に對するバックリング係數 ω は附録の第 II 表にしるした。 ω の計算に當つて、實驗材料の Tetmajer の決定した平均の強度に應じ $\sigma_a = 3,8 \text{ t/cm}^2$ と假定した。

例：四角鋼から成る結構部材が $P=80 \text{ t}$ をうける。バックリング長 $l=4,00 \text{ m}$, $\sigma_{zul} = 1 \text{ t/cm}^2$ なり。脚間隔 1,4 cm, $\frac{b}{t} = 120 \cdot 120 \cdot 15$ とす。 $F=135,6 \text{ cm}^2$, $i_{min}=5,60 \text{ m}$ となるから。

$$\frac{l}{i} = \frac{400}{5,60} = 71,5.$$

この値に對し附録の第 II 表から $\omega=1,663$ となる。故に結局

$$\sigma = 1,663 \cdot \frac{80}{135,6} = 0,981 \text{ t/cm}^2$$

1). 此處に示した安全率は若し動力學的作用の如き抗壓材のより大きい危険荷重を考へる時は、張力及彎曲率に於て求める安全率の實際上 1,8乃至2 倍に相當する。

となる。規定通り $\sigma < 1 \text{ t/cm}^2$ である。勿論計算した値 $\omega \frac{P}{F}$ は實際生じた應力ではなく比較値の意味を持つて居り、それ故第一の方法で計算した安全率 ψ の代りである事を見落してはならぬ。此の安全率は σ_{zul} を選ぶ事により決定する。

バックリング長 抗壓部材の箇々の場合の固定方法(固定度)に應じて、それ相當のバックリング長を決定する様注意すれば、Tetmajer 公式の結果と比較的よく一致し得る。よく中心を合はせた部材に於ては安全度に幾分の餘裕さへ生ずる。 l_0 を抗壓材の固定された端點(格點)間の距離とすれば、計算に入れるべきバックリング長は次の如く假定する事が出来る。¹⁾

1) 結構弦材

a) 格點が空間的に固定された場合。

a) 結構平面内のバックリングに對し $l_k = l_0$

β) 結構平面に垂直のバックリングに對し $l_k = l_0$

b) 格點が結構平面に垂直に彈性的に支持された場合。

a) 結構平面内のバックリングに對し $l_k = l_0$

β) 結構平面に垂直のバックリングに對しては 50 に導いた公式が成り立つ。

c) 部材の一半に壓力 S_1 を他の一半に壓力 S_2 を受ける時、但し $S_1 > S_2$ とす、²⁾

$$. l_k = \left(0,75 + 0,25 \frac{S_2}{S_1} \right) l_0$$

2) 結構腹材

a) 他の部材と交叉しない部材

a) 結構平面内のバックリングに對し $l_k = 0,8 l_0$

β) 結構平面に垂直なバックリングに對し

部材が對傾構平面内にあつて少くも一つの橫梁に固結される場合 . . . $l_k = 0,75 l_0$

部材が兩端に於て橫梁に固結される場合 $l_k = 0,6 l_0$

橫梁に固結されない場合 $l_k = l_0$

γ) S_2 を部材の一半が受ける應力とし、 S_1 を他の半分がうける張力又はより

$$\text{小さい壓力とすれば } K \text{ 結構の垂直材に對して } l_k = \left(0,75 \mp 0,25 \frac{S_2}{S_1} \right) l_0$$

但し、-符號は S_2 が張力の時、+符號は壓力の時とす。

b) 中央に於て他の部材と交叉する部材

a) 結構平面内のバックリングに對し $l_k = 0,5 l_0$

β) 結構平面に垂直なバックリングに對し $l_k = l_0 \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{S_2}{S_a} \cdot \frac{l_a}{l_k}}$

但し、 S_2 及 l_k は抗張部材の軸應力と長さとし、 S_a 及 l_a は抗壓材に對するものと

1) 次の規定の理論的根據及びこの例は第 11 章を参照。
2) 部材の兩半分が異つた慣性能率を持つてゐる時は 45 に述べる公式 (15) を用ふ。

す。λ₀の係数が0.5より小なる時は0.5とす。

オーストリアに於ては總ての重要な土木官廳に於て、抗壓材の断面決定に Tetmajer 公式を使ふ事を規定してゐる。この際

$$\omega \frac{P}{F} \leq \sigma_{zul}$$

とす。但し σ_{zul} はその部材に對し考へる許容壓應力とす。バックリング係数を決定するため計算に入れるべきバックリング長は、屢々起る場合に對し正確に記載されてゐる。(バックリングを考へた時の鐵又は木の抗壓材の計算に關する規定、1907年2月16日出版)

Baden 州有鐵道も同様に Tetmajer 公式の使用を規定し、尙バックリングに對する安全率を次の如く規定す。

	幹線に對し	支線に對し
λ/i ≤ 100 に對し	n=3+0,01 λ/i	n=2,3+0,007 λ/i
λ/i > 100 に對し	n=4	n=3

計算に用ふべきバックリング長は重要な場合に對し正確に規定されてゐる。(1903年2月のBaden州有鐵道の規定)。

スイスの鐵道もその抗壓材の断面決定に關する規定は Tetmajer 公式によつてゐる。鑄鐵よりなる抗壓材にあつては應力は次の値を超過してはならない。

鐵道橋の場合	
λ/i が 10 乃至 110 に對し	σ _k = 1,000 - 0,005 λ/i t/cm ²
λ/i > 110 に對し	σ _k = 5500 (λ/i) ² t/cm ² ;
道路橋の場合	
λ/i が 10 至乃 110 に對し	σ _k = 1,1 (1,000 - 0,005 λ/i) t/cm ²
λ/i > 110 に對し	σ _k = 6000 (λ/i) ² .

スイスの規定は普通の荷重に對する安全率を4とし、特殊の荷重に對する安全率を3,2とする Euler-Tetmajer 公式による計算を薦めてゐる。

Tetmajer の直線公式は他の多少根據のない非難と共に、長比 λ/i=0 の時、材料の立方體の強度と異なる耐荷力を生ずるといふ非難を受ける。この事實は短柱に於ける初めの小偏倚の影響を充分完全に除去しなかつた Tetmajer の實驗設備の不完全に歸せられる。何故なれば、元來壓搾限界の附近に於ては始めの小偏倚でさへ部材の耐荷力を非常に減少せしめるから、單位面積の耐荷力は壓搾限界を餘り超過出來ないからである。30に於て更に述べるが Kármán の精密な實驗も λ/i が小になるにつれ、益々バックリング強度が立方體の強度に近づく事を證明してゐる。併し實際の場合には常に、小さい軸偏倚を期待せねばならないから、Tetmajer 直線は結局その種の部材の實際の状態を表現出来る。

Tetmajer 公式を認める事は勿論、Tetmajer の結果に於て合法性を蔽つてゐた間違ひの泉から姿を現はした新研究に因り得られたより正しい數値の必要が生じた事を否定しはしない。この資料を簡單な断面形の正確に中心を合はした部材のバックリング實驗——即ち本質的には

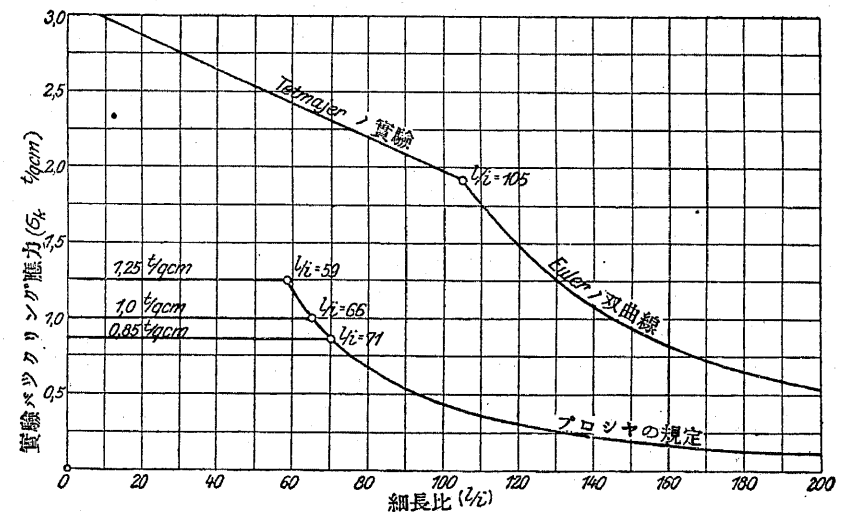
Tetmajer の方法である——から直接導くか、又は Kármán の方法による壓力圖から解くか何れが良いかは此處では論じない。實際の結果の實際の利用に當つては結局附録第1表及第11表の如き表示に依るより外ないから、斯くして得られた σ_k の數値が解析的法則に纏められるかどうかは無關係である。その種の新しい研究が最も普通の材質係数を持つた鑄鐵、炭素鋼、ニッケル鋼に行はれるであらう。併し此の新しい實驗がない以上、前に述べた様に安全度の幾分餘裕ある Tetmajer の數値に満足し、又我々の研究を此の實驗値に基づく事を餘儀なくされる。

28. Tetmajer の實驗の結果に基づく Euler 公式の批判¹⁾

第85圖に鑄鐵に對する Tetmajer 直線と繋がつた Euler 双曲線を示す。その下に最近有効になつたプロシヤの規定による許容バックリング應力を示す。此處に於て許容壓應力を 0.85, 1.00 及 1.25 t/cm² とする。

λ/i > 105 の部材に對し安全率は5とす。λ/i < 105 の部材に於ては實際の安全率は益減少し、細長比 λ/i=71, 66, 59 の時、許容應力は最小の安全率に達する。それ故 Tetmajer による σ_k の値に對して次の固有の安全率を有してゐる。

許容應力 σ _{zul}	0.85	1.00	1.25 t/cm ²
限界長比 λ ₀ /i	71	66	59
Tetmajer によるバックリング應力	2.29	2.35	2.43 t/cm ²
安全率	2.70	2.35	1.94



第85圖

1) 新しい國有鐵道の規定に依つて、長く續いた論争は Euler 公式に最も不利に判定されたから、次に述べる簡單な陳述は特に歴史的の興味を感じるのみである。それにも拘はらず、私は若い讀者の爲めにこの1919年に書き下した論文を差し押えてはならぬと考へる。

限界長比 l_0/i を超すと安全率は再び増大する。 $l/i=30$ 又 $\sigma_{zul}=1.25 \text{ t/cm}^2$ の時次の如し、

$$\phi = \frac{2.76}{1.25} = 2.21.$$

併し抗壓材に對し考へられる他の直接の危険彎曲率を考へる時、動力學的作用も集成部材の耐荷力の減少も現はれてゐないから、今導いた安全率は假の安全率に過ぎない。小さい結構橋に對する動力學係数を 1.4 と假定し、集成部材の耐荷力の減少及他の不利な影響を約 20% と假定すれば、上に導いた安全率は尙 1.70 で割らねばならないから、實際の安全率は單に

$$1.60, \quad 1.40, \quad 1.15$$

となる。

併し中位の細長比を有する部材の橋梁工に於て最も重要なバックリング範圍の安全率が 1.15乃至1.60 である事は、同じ構造部分の抗張材の安全率の方が高く最小 1.8なる事と矛盾してゐる。

其れ故抗張材の安全率は最も不利な場合にも抗壓材より約 60% 大である。併し此の状態は構造物の各部分に於て略同じ安全率を持たせ様と云ふ要求と一致しない。此の不平等は構造物に短い集成部材と並んで細い部材の存在する時なほ大になる。即ち事情により安全率が 1.15 のものと並んで安全率 5 のものがある。Tetmajer による抗壓材の計算の際は、一定の場合に部材兩端の固定度を計算に入れるが、Euler 公式を用ひる時は使はないといふ事が認められる。併し必ずしも左様ではない。それで例へば弦材は Tetmajer の表を用ひる時も全理論長(27 を参照)を計算に用ひる。

短い部材よりもその固定度の評價を誤り易い長い部材に對してより高い安全率を與へる事に就いて、Euler 公式は非常な利點を持つてゐる。併し細い部材の方が端固定の評價を誤り易い事は、橋梁工に於て避け難い事だが、之は短い部材の方が最初の小偏倚により敏感な事と同様である。それと同時に Euler 公式を一般に使用する際此の弱點を心得て、總ての場合に部材の兩端が鉸式に支へられてゐると考へるから、實際は固定度の決定違ひは問題とならない。¹⁾

29. Schwarz-Rankine の公式

Schwarz-Rankine のバックリング公式は既に完全にその初めの秀でた意義を失つてゐるけれども、箇々の土木監督には尙抗壓材の計算に此の式を規定してゐるから、極く簡單ではあるが之に觸れねばならない。

1) Euler 公式の無制限の應用に關しては次の参考書を参照すべし。
Mecklenbeck, A.: Die Eulersche Knickformel in den neuen preuß. ministeriellen Bestimmungen vom 31. Januar 1910. Eisenbau 1910, S. 436. Förster, M.: Die Gründe des Einsturzes des großen Gasbehälters am großen Grasbrook in Hamburg. Eisenbau 1911, S. 178. Oder: Der Einsturz des großen Gasbehälters in Hamburg und die Frage der Knicksicherheit. Zentralbl. Bauv. 1911, S. 187. Zimmermann: Knickfestigkeit. Zentralbl. Bauv. 1911, S. 194 ff. Krohn, Dr. Ing. R.: Knickfestigkeit. Zentralbl. Bauv. 1911, S. 222.

壓力 P が差當り未知の槓杆臂 a を以て働きの部材の彎曲が起ると云ふ假定から出發すれば、幾分獨斷的だが次の如く置き得る。

$$a = \beta \frac{l^2}{h}$$

茲に β は經驗により決定すべき値、 l はバックリング長、 h は断面重心から抗壓縁維迄の距離である。それ故 a に對する式は長く細い部材は短く太い集成部材より大きい最初の偏倚 a を示すと云ふ經驗上確められた事實を示してゐる。今この槓杆臂 a を以て最大縁維應力を決定すれば、

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pa}{J} h$$

となり、之に a の値を入れて

$$\sigma = \frac{P}{F} \left[1 + \beta \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right]$$

となる。茲に $i = \sqrt{\frac{J}{F}}$ は環動半徑である。この式から結局許容バックリング應力 $\sigma_k = \frac{P}{F}$ は次式で計算される。

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{zul}}{1 + \beta \left(\frac{l}{i} \right)^2} \dots \dots \dots (7)$$

鍊鐵に對する β は經驗値 $\beta = 0.0001$ をとる。

此の公式の缺點は明白である。即ちバックリング應力の近くに於ては、極く僅かの荷重の増大は屢々縁維應力の値を數倍にならしめるし、又計算した縁維應力が許された高い値に昇らぬうちに、部材が殆どバックリング限界に達する事もあるから、槓杆臂 a が既知の場合ですら、縁維應力に對し上限 (σ_{zul}) を決定する事は抗壓材の拒否に對し充分な安全度が存しない。

併し要するに上述の單純な考察から、此の式は許容バックリング應力及バックリング荷重を細長比 l/i の函數とした粗笨な法則である事を知つた。それ故この數値 β が部材の断面形及細長比に無關係で構造材料の種類のみに關係した定數である事が證明されるならば、此見解は別に差支へがない。併し事實は左様でない。Tetmajer は彼の實驗の結果に基いて値 β を計算したが、鍊鐵に對しては次の如し。¹⁾

$l/i = 10$	$\beta = 0,000\ 370$	$l/i = 110$	$\beta = 0,000\ 064$
20	200	120	077
30	133	130	086
40	100	140	095
50	088	160	107
60	078	180	116
70	071	200	122
80	065	220	125
90	061	240	128
100	058	250	130

1) 104 頁の脚註の文獻参照。

故に β は 0,000 058 乃至 0,000 370 の間に變化する。故に最大値に對する最小値の比は 1 : 6.4 となり、 β は定數とは考へられない。Schwarz-Rankine の法則に依れば、弾性範圍のバックリング應力は過大に、非弾性範圍のバックリング應力は過小になる。

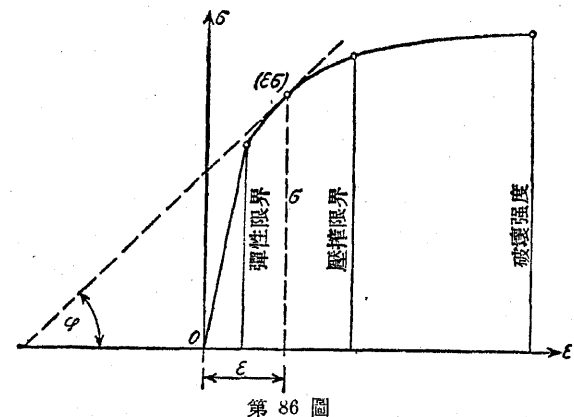
Schwarz-Rankine の法則の使用は鑄鐵に對し係數 $\beta = 0,0001$ として Bayern 州有鐵道の規定 (besondere Vertragsbedingungen für die Ausführung eiserner Brücken- und Hochbau-Konstruktionen vom 1. Februar 1903, München) 及 Württemberg 州有鐵道の規定 (Vorschriften für das Entwerfen eiserner Brücken und Hochbauten vom 14. April 1894 und Februar 1909) に規定されてゐる。

30. Engesser 及 Kármán の公式

Engesser は非弾性範圍に對しても變化する弾性能率を採用する事により、Euler 公式を用ふる事を考へた最初の人である。第 86 圖に構造材料の伸長線圖を簡單に示す。横距を伸長 ϵ とし、縦距を應力 σ とする。さて伸長増加に對する應力増加の比の増加零に對する極限值が即ち點 (ϵ, σ) に於ける弾性能率である。それ故

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \text{tg } \varphi$$

なる關係がある。此處に φ は點 (ϵ, σ) の切線と横軸の挟む角である。それ故慣性能率は ϵ 又は σ の函數であり、この函數は構造材料の壓縮圖から得られる。小さい歪に對しては直材の弾性線の方程式は任意の弾性法則によつて成り立つ、ただ不變の弾性能率の代りに變化する能率 T —Engesser はバックリング能率と稱す—を入れねばならない事を Engesser¹⁾ は示してゐる。最初の論文 (1889 年) には Engesser は能率 $T = \text{tg } \varphi$ と假定したが、完全には合つてゐない。1895 年に公にした論文に於て漸く Engesser は正しい連結を述べてゐる。弾性線の方



第 86 圖

程式から出發して Engesser は Euler 公式を次の一般形に導いた。

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{T}{(l/i)^2} \dots (8)$$

バックリング係數 T は弾性能率 E 及變化する能率 $E' = \text{tg } \varphi$ 並びに彎曲軸により分離された斷面の 2 部分の慣性能率 I' 及 I'' の函數である。夫故 T は斷面形にも關係するがその影響は著しくない。この關係の詳論は

35 に述べる。Engesser は斷面の形の影響を無視し、Tetmajer の實驗の結果を利用し、 T の法則を決定した。

式 (8) を次の形に書く。

1) Über die Knickfestigkeit gerader Stäbe. Z. Arch. Ing.-Wes 1889, Knickfragen. Schweiz. Bauz. 1895.

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{E}{(l/i)^2} \tau, \dots (8)$$

但し

$$\tau = \frac{T}{E}$$

夫れ故弾性バックリングの範圍では $\tau=1$ で、非弾性バックリングの範圍では $\tau < 1$ である。

鑄鐵に對する Tetmajer の直線公式

$$\sigma_k = 3.1 - 0.0114 \frac{l}{i}$$

及 Engesser 公式

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{E}{(l/i)^2} \tau$$

の二つから l/i を消去すれば $l/i < 105$ の値は

$$\tau = \frac{\sigma_k}{E} \left(\frac{3.1 - \sigma_k}{0.0358} \right)^2 \dots (9)$$

となる。 σ_k 及 E は t/cm^2 とす。式 (9) により値 τ —我々はバックリング係數と呼ぼう—をバックリング應力 σ_k の函數で與へ、又理論的の式 (8) と Tetmajer の經驗値との間の關係を與へた。附録第 III 表に式 (9) に基いて計算したバックリング係數 τ を示す。その意味と應用力を次に明かにしやう。

後に Kármán が Engesser の考へを再び拾ひ上げた。¹⁾ 弾性限界を超過しても彎曲理論の本質的の原理が成り立つ事を證明した Eugen Meyer²⁾ の新しい實驗に基いて、彼は次にある簡単な假定のもとに Euler 公式は非弾性バックリングの範圍に於ても成り立つ事を示した。Engesser のバックリング能率 T の代りに Kármán が用ひた「結果能率 M 」と壓縮圖との理論的考察より kármán の導いた關係が炭素鋼 ($\sigma_k = 6.8 t/cm^2$) の小さい矩形試験片による注意深い實驗とよく一致する事が見出された。この事とバックリング強度の根本問題の解明とに Kármán の論文の意味がある。これは Engesser の論文と同様に實際には直接餘り用ひられない數式であるが、簡単な壓縮實驗から各種の鐵材料に對する數値を容易に決定する方法を示した。併しバックリング問題の論文が非弾性の範圍に於ても、たゞ定數 E の代りに σ_k により變化する能率 T ³⁾ を入れる事により、弾性線の普通の微分方程式から出發出来る事が實驗により異議なく決定された事情に特にこの論文の價値がある。併し今迄缺けてゐたバックリング強度の纏れた問題の理論的討究の確かな原理が之により創造された。

尙更に 35 に述べるが、Kármán の研究の結果を要約すれば次の法則が得られる。

- 1) v. Kármán, Theodor: Untersuchungen über Knickfestigkeit. Mitteilungen über Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, herausgeg. v. Ver. d. Ing. II. 81, Berlin 1910.
- 2) Meyer, Eugen: Die Berechnung der Durchbiegung von Stäben, deren Material dem Hookeschen Gesetze nicht folgt Z. V. d. I. 1908, S. 167.
- 3) 今後 Kármán の符號 M の代りに Engesser の符號 T を用ふ。

a) 理論の假定をよく満足する様に実験装置を擇び又特に中心を合はすならば、バックリング應力が弾性限界の下にある非常に細い部材に對しては Euler 公式が非常に正確に合ふ。実験値と計算値との最大差が 1乃至2% である事を Kármán は見出した。

β) 短い部材に對しても同様の式が成り立つ。

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

茲に結果能率 T は斷面形により一定した方法により慣性能率 E と「全變形の能率」 $E' = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ との中間値として形成される。夫故バックリング應力は非弾性範圍に於ては細長比 l/i のみならず斷面形にも關係する。その影響は細長比の減少と共に増大する。Kármán は實驗に矩形斷面の部材のみを用いたから、斷面形の影響は Kármán により理論的に研究されたが、實驗に依つては確かめられなかつた。

γ) 力の作用點の偏倚は細長い部材のバックリング強度に少ししか影響しない。之に反して短柱の耐荷力は僅かの偏倚に依つても可成り減少する。

δ) 鍊鐵に對する Tetmajer の直線は理想のバックリング強度より下にある。それ故常に Kármán の公式よりも幾分大きな安全度を有す。

ε) 部材兩端の固定は非常に細い部材に對してはバックリング強度を著るしく高める。短柱に對しては左様でない。

31. ドイツ國有鐵道のバックリング規定

Euler 公式の無制限の使用は缺點のある事を知つて、新規定の制定にあたり Euler 公式を非弾性範圍に於て用ひない事になつた。

規定に依れば：

弦材にあつてはその自由バックリング長として理論長をとる。腹材(斜材及垂直材)にあつては、構平面に垂直なバックリングに對しては、一般に同様に自由バックリング長として理論長をとる。構平面内のバックリングに對しては一般に自由バックリング長として、部材の兩側の連結線の圖解による重心間の距離を以てする。横桁及横梁と彎曲率に堪える ラーメンを形成してゐる 垂直材にあつては、自由バックリング長として彎曲率に堪える連結の中心距離とする。弦材及腹材の中心が他の固定點に支へられる時は、自由バックリング長は相當減少する。一方が壓力、他方が張力を受ける交叉した部材にあつては、交叉せる部材が充分に連結してゐる場合には、交叉點は構平面及それに垂直に固定した點と考へる。自由バックリング長の兩端は鉸であると考へねばならない。

中心の合つた荷重を受けた時は 抗壓材の計算した軸應力は細長比 λ と構造材料により、それに相當した

1) 規定の中で ω Knickzahl へと呼ばれる。併し此處では Knickzahl との間違ひを避けるために上に用ひた Knickbeiwert を用ひる。

は、93 頁の第 12 表による數値で決定される抗張材と同様に取扱はれる。抗壓材の有効斷面を決定する時紙孔を控除しない。總ての抗壓材に對して數値 $\omega \cdot \text{重心應力} = \omega \cdot \frac{S_Q + \varphi \cdot S_P}{F}$ を證明し値 σ_{zul} と比較すべきである。

バックリングの瞬間の水平線から引かれたバックリング應力 σ_k 即ち重心應力の端點は $\lambda=0$ 及 $\lambda=60$ の間では横軸(第 87 圖)から距離 σ_Q (壓縮限界の應力)に引かれた平行線に、 $\lambda \leq 100$ の時は Euler 曲線 $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ に、 $\lambda=60$ 及 $\lambda=100$ の間では上の平行線と Euler 曲線とを結ぶ直線にあるとする。 $\sigma_Q = 2400$ kg/cm² の銻鐵に對しては第 87 圖に示すバックリング應力線が出来る。このバックリング應力線に相當するバックリング應力の値は $\sigma_Q = 2200$ kg/cm² の鍊鐵及 1895 年以前建設の銻鐵、 $\sigma_Q = 2400$ kg/cm² の新しい銻鐵例へば $\sigma_Q = 3800$ kg/cm² の銻鋼に對しては、0 から 170 間の種々の細長比に對し第 14 表に示す σ_Q の異なる銻鐵及例へ鋼に對するバックリング應力は容易に決定される。

ψ をバックリング安全率とすれば、バックリング應力 σ_k と抗壓材の許容應力 σ_{zul} との間に次の關係がある。

$$\psi = \frac{\sigma_k}{\sigma_{zul}}$$

許容張應力と許容彎曲應力 σ_{zul} の許容壓應力 $\sigma_{d zul}$ との關係に就ては、次の式が成り立つ。

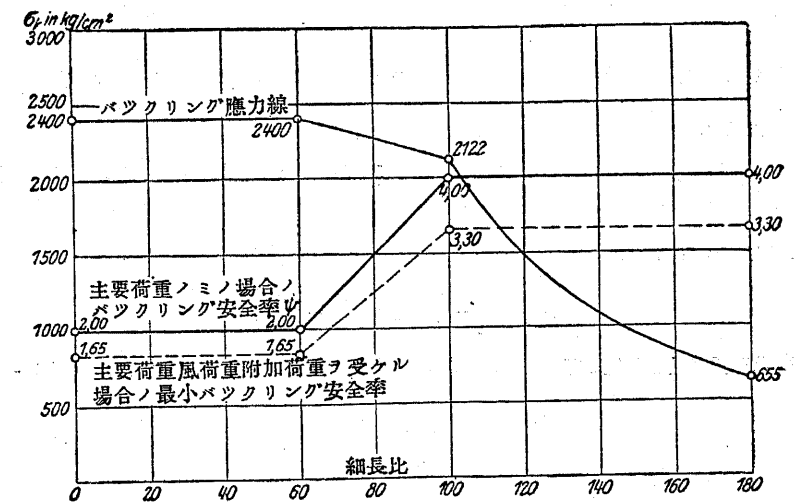
$$\sigma_{zul} = \omega \cdot \sigma_{d zul}$$

此處に ω は上のバックリング係數 >1 である。

兩式から次の如くなる。

$$\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d zul}} = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} \psi$$

銻鐵又は銻鋼の新しい橋に對しては、主要荷重のみ働く時は、安全率を λ が 0 乃至 60 の間では 2 とし、 $\lambda \leq 100$ に對しては 4 とする。 $\lambda=60$ 及 $\lambda=100$ の間では直線的に連結する。銻鐵及銻鋼の新しい橋に對しても同様である。



第 87 圖

ψ_0 乃至 $\psi_{60}=2,0$; $\psi_{70}=2,5$; $\psi_{80}=3,0$, $\psi_{90}=3,5$ 及 ψ_{100} 乃至 $\psi_{170}=4,0$

このバックリング安全度は主要荷重のみが働いた時、鍛鐵又は鑄鐵の 1895 年以前の古い橋に對しても同じとす。

第 14 表

細長比 $\lambda = \frac{L}{i}$	鑄鐵及 1895 年以前の鑄鐵のバックリング應力 $\sigma_q = 2200$ $\lambda \leq 60$; $\sigma_k = 2200$ λ が 60 乃至 100 $\sigma_k = 2539 - 5,65 \lambda$ $\lambda \leq 100$ $\sigma_k = \frac{19740000}{\lambda^2}$ kg/cm ²		バックリング係数 ω $\frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$	細長比 $\lambda = \frac{L}{i}$	新設及 1895 年以後の鑄鐵のバックリング應力 $\sigma_q = 2400$ $\lambda \leq 60$; $\sigma_k = 2400$ λ が 60 乃至 100 $\sigma_k = 2317 - 6,95 \lambda$ $\lambda \leq 100$ $\sigma_k = \frac{21220000}{\lambda^2}$ kg/cm ²		バックリング係数 ω $\frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$	細長比 $\lambda = \frac{L}{i}$	例へば $\sigma_q = 3800$ の鑄鐵のバックリング應力 $\sigma_q = 3800$ $\lambda \leq 60$; λ が 60 乃至 100 $\sigma_k = 6245 - 40,75 \lambda$ $\lambda \leq 100$ $\sigma_k = \frac{21700000}{\lambda^2}$ kg/cm ²		バックリング係数 ω $\frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$
	$\Delta \omega$	$\Delta \lambda$			$\Delta \omega$	$\Delta \lambda$			$\Delta \omega$	$\Delta \lambda$	
0				0				0			
10				10				10			
20				20				20			
30	2200	1,27		30	2400	1,17		30	3800	1,17	
40				40				40			
50				50				50			
60				60				60			
70	2143	1,63	0,036	70	2330	1,50	0,033	70	3392	1,64	0,047
80	2037	2,03	0,038	80	2261	1,88	0,036	80	2985	2,23	0,059
90	2030	2,41	0,040	90	2191	2,24	0,038	90	2577	3,02	0,079
100	1974	2,84	0,043	100	2122	2,64	0,040	100	2170	4,09	0,107
110	1632	3,43	0,059	110	1754	3,19	0,055	110	1793	4,95	0,086
120	1371	4,03	0,065	120	1474	3,80	0,061	120	1507	5,89	0,094
130	1168	4,79	0,071	130	1256	4,46	0,066	130	1284	6,92	0,103
140	1007	5,56	0,077	140	1083	5,17	0,071	140	1107	8,02	0,110
150	877	6,39	0,083	150	943	5,94	0,077	150	964	9,21	0,119
160	771	7,29	0,087	160	829	6,76	0,082	160	848	10,47	0,126
170	683	8,20	0,094	170	734	7,63	0,087	170	751	11,82	0,135

主要荷重のみを受ける時、鑄鐵の新しい橋に對しては

$$\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

とし、例へば $\sigma_q = 3800 \text{ kg/cm}^2$ の鋼の新しい橋に對しては $\sigma_{zul} = 1400 \cdot \frac{3800}{2400} = \text{約 } 2200 \text{ kg/cm}^2$ とし、鑄鐵又は 1895 年以前の鑄鐵の古い橋に對しては $\sigma_{zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ とす。式 $\omega = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} \psi$ により得たる ω の

値を第 14 表に示す。この ω の値は主要荷重に對しても、風荷重及附加荷重に對しても、又兩方の場合に對しても、又 1895 年以後建設の鑄鐵の古い橋に對しても成り立つ。小さいバックリング安全 ψ は此の高い許容應力 σ_{zul} に相當するものである。

ψ を前に示したバックリング安全率 (3 乃至 4) とすれば

$$\psi_1 = \omega \frac{\sigma_k}{\sigma_{zul_1}} = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_k} \psi \cdot \frac{\sigma_k}{\sigma_{zul_1}} = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{zul_1}} \psi$$

主要荷重、風荷重及追加荷重を考へた時、1895 年以後の鑄鐵の古い橋に對して最小バックリング安全率を次の如くす。

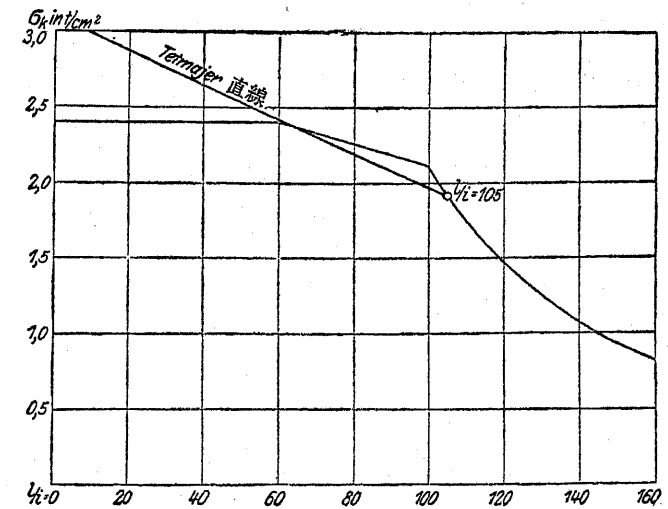
$$\psi_1 = \frac{1400}{1700} \psi$$

偏倚荷重を受ける抗壓材又は中心の合つた荷重の外に彎曲率を受ける抗壓材は次式

$$\sigma = \frac{\omega (\sigma_g + \varphi \sigma_p + \dots)}{F} + \frac{\omega l_g + \varphi \omega l_p + \dots}{R_3}$$

により計算した線維應力が相當した値 σ_{zul} を超過してはならない。

多部分から成る抗壓材に於ては、一部分の細長比は全部材の細長比より大であつてはならぬ。又 30 より大きくてはいけない。一部分の自由バックリング長としては兩繋鈑の中心間又は綫釘の隅鈑間の長さとする。綫釘の断面と連結とは全断面の最大壓力の 2% と假定せる剪力に對し計算する。



第 88 圖

第 88 圖に Tetmajer によるバックリング應力線と新しい規定によるバックリング應力線を比較のため示した。短柱の際には大きな違ひがある。規定の起草者は $\lambda/i < 60$ の部材にあつては、バックリング應力は降伏點を超過出来ないといふ考へから出發してゐる。集成部材に對する實驗の正しくない解釋から生じた見解による Tetmajer の數多くの實驗の結果及び Kármán の正確な算定と矛盾すると思ふ。同様に短柱と長柱とその安全率を變へる根據は少しもない。活荷重の動力學的作用の考慮に關しては均等に約 3 の安全率を用ひる事が出来よう。度々折れたバックリング線及び安全率の變化する事がこの理解を困難にし、又この妙なバックリング法則に基き抗壓材の事情を研究する事を殆ど不可能ならしめるが、併し事情によつては構造物設計の際生ずる問題に答へ得るために必要である事は今更指摘する必要がない。安全率の證明の代りに許容應力と比較すべき理想の應力の證明を求める事は遺憾な事である。それはバックリング問題の特質が之により完全に隠蔽されるからである。

32. 偏 壓 を 受 け る 部 材

a) 元 から 曲 つ た 部 材

細長比中位の部材は最初直線から偏倚してゐる事に對し非常に敏感である事を知り、信頼すべきバックリング公式又はバックリング表に基づく許容壓力の決定の外に、なほ假定の(起りさう

な) 偏倚に対する最大縁維應力の決定をなす必要を痛感する。實際の場合に部材軸が完全に直線ではなく又力の方向と正確には一致しない事を生ずるのは明白である。完全な製作に於てすら、例へば結構の二次應力は力の方向と部材の方向とを偏倚させ又結構部材の彎曲を引き起す。更に材料の不均一が部材軸に垂直の不測の力を生ずる。

Tetmajer は實際には軸に沿ひ荷重を受けてみると見られる部材の離心率の大きさの問題に目を付け、又試験所の實驗の如き最も都合のよい条件のもとに於てさ之も初めの離心率と断面決定間の一定の關係を述べる事が出来ない事を彼の觀察に基いて確めた。夫れ故適度のよい施工の際には超過しそうもないと思はれる偏倚の適當の値を決定し、之により縁維應力の起りさうな最大値を決定する事は實際的の考慮から出發してゐるに外ならない。

長い部材に於ては眞直にする事が短い部材に於けるよりも困難であるし、又荷重偏倚、剪力等の影響も長い部材に於ては短い部材に於けるよりも大きいから、偏倚 a を長さに比例するとおく事が出来る。併し元來細い部材は短い部材よりも支える事が困難であり、不測の荷重、二次應力又は同様の影響により強く曲げられるから、断面形もその大きさに影響を及ぼす事が認められる。それ故

$$a = \mu l \left(\frac{l}{i} \right)$$

とし、此處に l は部材の長さ、 i は最小環動半径とす。 μ は $l/i=100$ の細い部材に對して $a=l/300^1$ の如く選ぶ。それ故

$$\mu = \frac{1}{30\,000}$$

又

$$a = \frac{l}{30\,000} \left(\frac{l}{i} \right) \dots \dots \dots (10)$$

故に

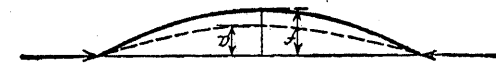
$l/i = 20$	50	100	150	200	に對し
$a = \frac{l}{1500}$	$\frac{l}{600}$	$\frac{l}{300}$	$\frac{l}{200}$	$\frac{l}{150}$	

初めの偏倚 a を有する荷重を受け、又は軸と一致する荷重を受ける部材の彎曲は荷重 P に比例しないから、使用荷重 P に對する彎曲とそれに相當する縁維應力を算定し、その縁維應力を普通の許容應力と比較する事は無意味な事である。許容張應力及び許容彎曲應力の決定の時降伏點の到達に對し 1.8 倍の安全率を有せしむる事より出發して、1.8 倍の荷重が掛つた時最大縁維應力が値 $\sigma_0 = 2.4 \text{ t/cm}^2$ を超過しない事が要求される。適當なバックリング公式例へば Tetmajer 公式を使用する時は、此の場合のバックリングに對する安全率を $\psi=3$ とするのが正當だから次の如く定める。即ち、 ψ をバックリングに對する安全率とすれば、部材の抗壓縁維に於いて彎曲の際降伏點に到達する事に對する安全率を 0.6ψ とする。

1) Müller-Breslau は細長比に無關係に $a=l/200$ とす。Müller-Breslau, Über exzentrisch gedrückte Stäbe und über Knickfestigkeit. Eisenbau, 1911, S. 339 參照。

第 89 圖に於てい a を部材中央の最初の彎曲とすれば、 $0.6\psi P$ の荷重の作用による彎曲 f は Föppl¹⁾ によれば

$$f = \frac{P_E}{P_E - 0.6\psi P} a,$$



第 89 圖

にして、茲に P_E は Euler による耐荷力即ち

$$P_E = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i} \right)^2}$$

を示す。

$$\frac{P_E}{\psi P} = t,$$

とすれば、

$$f = \frac{t}{t - 0.6} a$$

となる。若し F 及び W を問題の彎曲方向に對する断面積及び断面率とすれば、部材中央の決定的縁維應力は

$$\sigma = \frac{0.6\psi P}{F} + \frac{0.6\psi P f}{W}$$

となる。非對稱な断面にあつては、兩断面率のうち小なる方をとる。

$$\frac{W}{F} = \frac{i^2}{e}$$

とし、茲に i は環動半径、 e は部材軸から縁維迄の距離とすれば

$$\sigma = \frac{0.6\psi P}{F} \left(1 + \frac{f e}{i^2} \right)$$

となる。

(10) の關係を用ひて

$$f = \frac{l}{30\,000} \left(\frac{l}{i} \right) \frac{t}{t - 0.6}$$

となるから、結局縁維應力 σ は次の形になる。即ち

$$\sigma = \frac{0.6\psi P}{F} \left[1 + \frac{1}{30\,000} \frac{t}{(t - 0.6)} \left(\frac{l}{i} \right)^3 \frac{e}{l} \right] \dots \dots \dots (11)$$

鑄鐵に對しては

$$\sigma \leq 2.4 \text{ t/cm}^2$$

でなければならない。固定が問題となる處に於ては、その縁維應力に對する輕減作用を少くも

1) Föppl, A.: Vorl. ü. Techn, Mechanik, Bd. 3, Festigkeitslehre, 3. Aufl, 1905, S. 333.

近似的に考慮し得る様に、此處では l は實際の部材の長さでなく計算に入れるバックリング長を示す。

さて異つた断面形の偏壓に対する抵抗に関する作用を判断するために、全部バックリングにのみ使用される部材に対して

$$\frac{P}{F} = \frac{\sigma_k}{\psi}$$

とする。茲に σ_k はバックリング應力を示す。更に

$$e = \beta i$$

とおく。茲に係數 β は幾何學的に似た断面形に於ては少ししか違はない。それ故式 (11) は次の如くなる。

$$\sigma = 0.6 \sigma_k \left[1 + \frac{\beta}{30000} \frac{t}{(t-0.6)} \left(\frac{l}{i} \right)^2 \right]$$

σ_k 及び t は l/i に関係のある量であるから、前の式は安全率に無關係の β 及び l/i 間の關係を示す。此の式から $\sigma = \sigma_0 = 2.4 \text{ t/cm}^2$ とし上限 β_0 が l/i の函數として

$$\beta_0 = 30000 \left(\frac{\sigma}{\sigma_k} - 1 \right) \frac{t-0.6}{t} \left(\frac{i}{l} \right)^2 \quad (t \text{ 及 } \text{cm}) \quad \dots \quad (12)$$

の形で得られる。

β は環動半径に対する縁維距離の比を示す。對稱断面形に於ては環動半径に対する高さの半分の比である。もし抗壓縁維の應力が 2.4 t/cm^2 を超過していけないならば、使用断面の β は式 (12) から現在の細長比 l/i により計算した β_0 の値と同じか小でなければならない。

其れ故先づバックリング安全度を考慮して部材断面を決定し、比 $\beta = \frac{e}{i}$ が式 (12) により與へられた値に等しいかより小いかを吟味する。大きい時は断面はその彎曲方向に於て撓め難くする。結局式 (11) により縁維應力を計算する。

問題の断面が縁維應力の再計算を要するかどうかを迅速に判断するために、第 15 表に細長比 $l/i=50$ 乃至 200 に対する式 (12) による β_0 の値を示した。此處に σ_k は Euler-Tetmajer の法則により決定した。

第 15 表

l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0	l/i	β_0
50	5.72	70	3.07	90	1.80	110	1.97	130	1.55	150	1.73	170	1.85	190	1.93
55	4.81	75	2.63	95	1.58	115	1.35	135	1.60	155	1.76	175	1.87	195	1.95
60	4.05	80	2.34	100	1.39	120	1.43	140	1.65	160	1.80	180	1.89	200	1.96
65	3.54	85	2.05	105	1.22	125	1.49	145	1.69	165	1.83	185	1.91		

β_0 の大きさの變化によつて、細長比 $l/i=105$ (Euler 双曲線と Tetmajer 直線との限界) に於いて

1) β_0 は容易に了解出来る様に、完全に利用された部材に対しては安全率 ψ に無關係である

$$\frac{P_E}{F} = \sigma_E \text{ 又 } \frac{P}{F} = \frac{\sigma_k}{\psi} \text{ とおけば } t = \frac{\sigma_E}{\sigma_k} \text{ となり } \psi \text{ に無關係である。}$$

β_0 は最小値 1.22 に達するから、この點が偏倚壓力に対する安全率の最不利の場合である事を知る。

既に述べた様に β の大きさは一つの断面型に於いては、特に對稱の断面の時は變化が小さい。それ故次の如くなる：

脚幅 80 乃至 160 mm に対し $\beta = 2.22 - 2.33$

脚幅 80 乃至 160 mm に対し $\beta = 1.80 - 1.87$

N. P. Nr. 16 乃至 50 に対し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = 1.25 - 1.27 \\ \beta_y = 2.39 - 2.48 \end{array} \right.$

Diff. I Nr. 18 乃至 30 に対し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = 1.16 - 1.18 \\ \beta_y = 2.13 - 2.15 \end{array} \right.$

N. P. Nr. 12 乃至 30 ($J_x = J_y$) に対し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = 1.28 - 1.32 \\ \beta_y = 1.60 - 1.60 \end{array} \right.$

に對し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = 2.70 - 3.30 \\ \beta_y = 2.0 - 3.00 \end{array} \right.$

に對し $\left\{ \begin{array}{l} \beta_x = 2.00 - 2.50 \\ \beta_y = 1.60 - 2.00 \end{array} \right.$

第 15 表の助けによりこの總括は断面が偏壓に堪えるかどうか始めから判断する事を可能ならしめる。例へば四山形鋼から成る十字断面に對して最悪の場合の β は 2.33 である。それ故細長比 $l/i < 80$ の部材はバックリングに對する許容耐荷力を完全に用ひた時にも、1.8 倍の使用荷重の時 2.4 t/cm^2 より小なる縁維應力を持つ。材料使用の割合に断面率が小であるから、最後の二つの型が示す様に非對稱断面は特に不利である。

例：腹板距離 2.0 cm の $[[$ Nr. 30 からなる結構部材が安全率 3.5、バックリング長 $l=4.20 \text{ m}$ とし、使用荷重 $P=68 \text{ t}$ を与ける。第 90 圖。

即ち、 $F=117.6 \text{ cm}^2$ 、 $i_x=11.69 \text{ cm}$ 、 $i_y=4.70 \text{ cm}$ 。それ故 $l/i_y=420:4.70=89.4$ 、それ故附録第 1 表から $\sigma_k=2.081 \text{ t/cm}^2$ となり、 $\psi=3.5$ の時の Tetmajer の耐荷力は

$$P_k = \frac{2,031}{3,5} \cdot 117,6 = 69,6 \text{ t.}$$

となる。値 β は次の如くなる。即ち

材料軸に関して $\beta_x = \frac{15,0}{11,69} = 1,28,$

自由軸に関して $\beta_y = \frac{11,0}{4,70} = 2,34.$

第 15 表から $i_{iy} = 89,4$ に對する上限 $\beta_0 = 1,83$ である。それ故縁維應力は只 y -軸に垂直な彎曲に對してのみ決定すればよい。上の断面決定の時は $0,6\psi = 2,1$ 倍の使用荷重による自由軸に垂直の彎曲の時の縁維應力が降伏點を超過するから ($\beta_y > 1,83$), 兩]-鋼の距離を $3,2 \text{ cm}$ とし問題の方向に於て耐荷力を増大する。

今度は $i_y = 5,18 \text{ cm}$ であるから

$$\frac{l}{i_y} = \frac{420}{5,18} = 81,1$$

又

$$\beta_y = \frac{11,6}{5,18} = 2,24$$

であり、一方第 15 表により $\frac{l}{i_y} = 81,1$ に對し $\beta_0 = 2,28$ である。それ故 β は今度は限界値より下である。

次に縁維應力を式 (11) により決定する計算の正しい事を論證しよう。

先づ

$$P_E = 117,6 \frac{21,220}{81,1^2} = 379,5 \text{ t}$$

又

$$l = \frac{379,5}{3,5 \cdot 68} = 1,594.$$

であるから結局式 (11) により

$$\sigma = \frac{0,6 \cdot 3,5 \cdot 68}{117,6} \left[1 + \frac{1}{30000} \frac{1,594}{1,594 - 0,6} 81,1^2 \frac{11,6}{420} \right] = 2,39 \text{ t/cm}^2$$

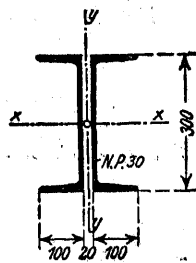
となり、縁維應力 σ は降伏點 $\sigma_0 = 2,4 \text{ t/cm}^2$ より小である。

b) 片側連結の部材

横構及對傾構、稀には主構に於て、片側に於て隅鋸に連結され、従つて軸壓力 P の外に e を部材重心の連結鋸の中心平面からの距離とする時、彎曲率 $M = Pe$ を受ける部材が屢ある。勿論左様な附加彎曲率を受けるその種の断面形を出来るだけ避けるが、避けられない場合が生ずる。そこで彎曲率は部材の耐荷力に著るしい影響があるから、その種の部材の安全度を解明しなければならない。壓搾限界を超過すると變形が著るしくなるから、抗壓縁維に於て壓搾限界を超過する時はこの耐荷力が減少する事は明白である。部材應力 P と部材中央の彎曲率 M とにより最大縁維應力は

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$$

となる。さて片側連結の部材の最大彎曲率は



第 90 圖

$$M = Pe \left(1 + \frac{4}{\pi} \frac{P}{P_E - P} \right)^{1)}$$

となる。茲に P_E は a) と同様の意味である。それ故

$$\frac{P}{F} + \frac{Pe}{W} \left(1 + \frac{4}{\pi} \frac{P}{P_E - P} \right) \geq 2,4 \text{ t/cm}^2, \dots \dots \dots (13)$$

でなければならない。この條件から P が決定され、次の二次方程式となる。

$$P^2 \left[1 - \frac{F}{W} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \right] - P \left[P_E \left(1 + \frac{F}{W} \right) + 2,4 F \right] + 2,4 F P_E = 0.$$

e を山形鋼の背、又は]-鋼に於ては腹鋸の背からの重心の距離、 i を断面の問題の環動半徑とすれば $\frac{F}{W} = \frac{e}{i^2}$ となり、若し上の如く $\frac{e}{i} = \beta$ とおけば $\frac{F}{W} = \frac{\beta^2}{i}$ となる。更に中央に於ける力臂 $\epsilon = e + \frac{\delta}{2}$ (δ = 隅鋸の厚さ) を $\frac{5}{4}e$ とおけば

$$\epsilon \frac{F}{W} = \frac{5}{4} \beta^2.$$

となる。さて β は一定の断面形に於ては少ししか變化しない。即ち次の如し。

1.		P. Nr. 6 乃至 16	$\beta = 0,92 - 1,01$
2.		N. P. Nr. 12 " 30	$\beta = 0,93 - 1,01$
3.		P. Nr. 6 1/2 / 10 " 10 / 15	$\beta = 1,05 - 1,09$
4.		P. Nr. 6 1/2 / 10 " 10 / 15	$\beta = 0,85 - 0,88$

その都度、最悪の断面決定の際の β の値を夫々の断面に一般的に成り立つと假定し二次式の係数を得る。

断面 1 及び 2	$1 - \frac{F}{W} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) = 0,65,$	$\left(1 + \frac{F}{W} \right) = 2,25;$
" 3	" = 0,60,	" = 2,49;
" 4	" = 0,74,	" = 1,97;

尙この二次式を F^2 で割り $\frac{P}{F} = \sigma$ 及 $\frac{P_E}{F} = \sigma_E$ とすれば σ に對する條件方程式が得られる。即ち

$$\left. \begin{aligned} \text{断面 1 及 2} & \quad 0,65 \sigma^2 - (2,25 \sigma_E + 2,4) \sigma + 2,4 \sigma_E = 0 \\ \text{" 3} & \quad 0,60 \sigma^2 - (2,49 \sigma_E + 2,4) \sigma + 2,4 \sigma_E = 0 \\ \text{" 4} & \quad 0,74 \sigma^2 - (1,97 \sigma_E + 2,4) \sigma + 2,4 \sigma_E = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

σ_E は t/cm^2 とすれば、 σ も t/cm^2 で得られる。

若し降伏點の到達に對する安全率はその部材が断面決定されたバックリング安全率の 0.6 倍

1) 此式の誘導は 59 に示す。

であるとすれば、 $\sigma_R = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$ により此の方程式から計算した σ の値は次の条件を満足する。

$$\sigma \leq 0,6 \sigma_k \dots \dots \dots (15)$$

式 (14) により σ は只 σ_k 即ち $\frac{l}{i}$ のみに関係するから、 σ は $\frac{l}{i}$ の函数で示される。之を次の第 15a 表に於て式 (15) により必要なだけを示す。どの断面形も $\frac{l}{i} = 140$ 乃至 160 の或

第 15a 表

$\frac{l}{i}$	0,6 σ_k t/cm ²	σ t/cm ²		
		断面 1 及 2	断面 3	断面 4
30	1,66	1,04	0,93	1,13
40	1,59	1,01	0,91	1,15
50	1,52	0,98	0,88	1,12
60	1,45	0,94	0,86	1,09
70	1,38	0,90	0,83	1,05
80	1,31	0,85	0,79	0,97
90	1,24	0,80	0,75	0,91
100	1,18	0,76	0,70	0,85
110	1,05	0,72	0,66	0,80
120	0,88	0,67	0,62	0,74
130	0,75	0,62	0,58	0,69
140	0,65	0,58	0,55	0,64
150	0,57	0,54	0,51	0,60
160	0,50	0,50	0,48	0,55

中間の値は直線補間法による

る限界細長比を超すと、 σ は常に $0,6 \sigma_k$ より大である事が解かる。それ故短い部材は相當補強されねばならない。 σ と $0,6 \sigma_k$ の比較を可能ならしめるために此の表に $0,6 \sigma_k$ を示す。この表の簡単な使用法は例に依り最もよく説明される。

例： $\text{---} \text{---} \text{---}$ 90・90・9 から成る抗壓材が左右に向ふ兩脚に於て片側連結される。そのバックリング長(全部材長)は $l = 260$ cm なり。3,5 倍のバックリング安全率の時使用荷重は 17,9 t とす

即ち $F = 31,0$ cm², $i = 2,74$ cm.

$\frac{l}{i} = \frac{260}{2,74} = 95$ から附録第 1 表により $\sigma_k = 2,017$ t/cm² となる。それ故 $0,6 \sigma_k = 1,210$ t/cm² である。

断面形 1 に對する上の表から $\frac{l}{i} = 95$ に對する値 σ を直線補間法に依り決定すれば、 $\sigma = 0,78$ t/cm² となり、 σ は非常に小で、部材は断面が足りない。

其れ故より大なる断面 $\text{---} \text{---} \text{---}$ 100・100・12 をえらふ。 $F = 45,4$ cm², $J = 2 \cdot 207 = 414$ cm⁴, $W = \frac{414}{2,90} = 142,8$ cm³ である。この部材は

$$0,6 \psi P = 0,6 \cdot 3,5 \cdot 17,9 = 7,6 t$$

の力を受けた時、抗壓線維に於て降伏點 2,4 t/cm² を超過してはならない。さて

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{9,87 \cdot 2150 \cdot 414}{260^2} = 129,8 t$$

である。 $e = 2,90 + 0,5 = 3,40$ cm とすれば、此の値から式 (13) により

$$\sigma = \frac{37,6}{45,4} + \frac{37,6 \cdot 3,40}{142,8} \left(1 + \frac{4}{\pi} \frac{37,6}{129,8 - 37,6} \right) = 0,83 + 1,36 = 2,19 \text{ t/cm}^2$$

となり、それ故 σ は降伏點より小となり、断面増大せる部材は充分である。