

全不静定系はその部材の不均等な加熱の際に事情に依つては全く著しい値に達し得る内部應力を生ずる、他の凡ての部材が直接に太陽光線をうけてゐるのに、一の部材例へば或る弦材が車道の蔭にあるために不均等な加熱が橋梁に於て起り得る。その温度差違は 15°C 迄昇り得る。1886 年及 1887 年 Lyon に於て、二つの鋼拱橋の築造の際温度差違が測定され、これが 140°C 迄昇りうる事を確定した。大抵の橋梁の規定には不均等の加熱を考慮する事に關した箇條を含まない。

ドイツ國有鐵道の新規定では各部分の不均等な加熱の温度差違を 15°C とす。

第五章 活荷重の動力學的作用

11. 序 論

橋梁上に及ぼす移動荷重の作用は根本に於て動力學的作用とみられる、何となれば平衡状態の變化が一時的の速度に伴ふからである。橋梁工の弾性問題を簡單ならしめる多くの概念によつてのみ静力學の意義に於て現はれる材料強弱の問題の取扱ひが可能である。それにも拘らず往々或る方法で動力學の現象を考慮する様強ひられてゐる。何となれば大抵計算に適する静力學的應力を増す事によつてそれを果してゐるからである。この事實は静止せる活荷重の假定のもとに計算した應力値に乘ずる増加係數、所謂衝擊係數を導き、又はこの基礎觀念に廣く従ふ事により、適當の方法で許容應力を減じ、又は安全度を相當に高める様な方法で橋梁工の實際に考慮されてゐる。それ故にもし橋梁工に於て普通の衝擊係數を批判的に吟味せんとすれば、實際に現はれる變形及材料應力の大きさに就き要點をうる爲めに鋼構桁に於ける動力學的過程に就て明らかにする事が先づ第一に必要である。この意味に於て、この章の詳論は安全度及許容應力に就て論じてゐる次々の章の説明への過程をなしてゐる。然し尙他の基礎から鋼橋の振動問題の詳細な議論が必要である。例へば行軍中の軍隊の同一歩調によつて危険な振動がおこる事實は、事情によつては周期的に作用する荷重によつて著しい共振現象がおこり得、その研究には鋼橋の固有振動數を知る必要のある事を認識せしめる。もし固有振動の周期が判つておれば、その橋梁に對して問題の律動的に作用する荷重によつて危険な共振を起す事が出来るかどうかを確定する事は容易な事である。萬一の場合には質量分布の修正、又は構桁の剛度の改正によつて改良に務め、最後には問題の活荷重の危険な速度を避けしめる。

橋梁への移動荷重の動力學的作用は全く違つた性質のものがあり種々の原因から起る、即ち

1. 荷重は橋梁上を無限に緩やかではなく、屢々かなりの速度で走る。これによつて生じた荷重及構桁の運動エネルギーは振動を起し、それによつて部分的に撓度及應力の増加を起す。
2. 活荷重の作用によつて線路が一部下向きに曲るから、荷重と同方向に作用する遠心力が起り、その遠心力は列車速度の増加と共に急激に増加し、小支間の桁に於ては著しく大きい値に増加する。

3. 周期的に作用する力又は衝撃は構桁の強制振動を生ずる、不完全な質量調節による機関車の働輪の軸壓の變化及等距離にある軌條繼手による周期的衝撃が之で、車軸が等距離にある時特に強い共振が起り得る。道路橋の際に著しい共振を起し得るのは行軍中又は同一の歩調で騎馬する軍隊の一團の律動的な衝撃である。

剛材の横振動の問題は Euler によつて 1773 年論ぜられてゐる。剛材の横振動の完全な微分方程式は Poisson によつて 1829 年立てられた。¹⁾

橋梁の撓度への轉動荷重の影響を定める問題を最初 Willis (1849) が研究した。彼は部材を質量のないものとし、轉動荷重による撓度は各點に於て靜力學的撓度と同じ關係で與へられると假定した。Stokes (1849) も同じ問題を研究した。Willis や Stokes と同様に又多くの他の研究者、例へば Résal (1882) Boussinesq (1883), Souleyre (1889), Delandres (1892), Glauser (1892) 及 1894), Zimmermann (1896) 及 Land (1899) 等は $x=ct$ (c は列車速度) の關係により、時間を消去して全微分方程式を定めた。彼等は斯様に一つの自由度をもつた系として載荷桁を考へた。²⁾

Phillips (1855) 及 Renaudot (1861) は彼等の研究に於て偏微分方程式を用ひ初めた最初の人々であつた。彼等によつて Bresse (1862) 及 Lebert (1893) がある。この二著者は既に凡ての影響を考慮した偏微分方程式に基き研究した。然し特に Lebert であるが、橋梁振動の凡ての問題を解かんとした解答の一部は異論をまぬかれなかつた。³⁾ 最近に於いて Kriloff (1905) 及

1) 古い文献に就いては Enzyklopädie d. math. Wiss. Bd. IV, 2, II. を参照

2) Willis: Report of the commission appointed to enquire into the application of iron to railways structures. London 1849.

Stokes: Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. Transactions of the Cambridge philos. Soc. T. VIII, 1849, S. 707.

Boussinesq: Sur le mouvement d'une charge roulante, le long d'une barre élastique horizontale appuyée à ses deux bouts et dont la masse est beaucoup plus petite que la sienne. Comptes rendus des séances de l'academie des sciences à Paris 1883, S. 897.

Souleyre: Action dynamique des charges roulantes sur les poutres rigides, qui ne travaillent qu'à la flexion. Ann. Ponts Chauss. 1889, S. 341.

Glauser: Dynamische Wirkungen bewegter Lasten auf eisernen Brücken. Ann. Glaser 1891 S. 113; 1892, I, S. 61.

Glauser: Dynamische Wirkung bewegter Einzellasten auf freien Balkenbrücken über einer Öffnung. Ann. Glaser 1891, I, S. 56.

Zimmermann: Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Zentralbl. Bauw. 1896, S. 264 ff.; in erweiterter Darstellung als Buch, Berlin 1896.

Land: Die Gleichungen der Bahn einer über einen Träger rollenden Last. Zentralbl. Bauw. 1899, S. 313.

3) Phillips: Calcul de la résistance des poutres droites, telles que les ponts, les rails, etc. sous l'action d'une charge en mouvement. Ann. des mines 1855, S. 467.

Renaudot: Études de l'influence des charges en mouvement sur la résistance des ponts métalliques à poutres droites. Ann. Ponts Chauss. 1861, S. 145.

Bresse: Cours de mécanique appliquée, I. 1862-66, S. 361.

Lebert: Etudes des mouvements vibratoires dans les ponts à poutres droites à une travée et dans les ponts suspendus à tablier continu simplement appuyés, aux culées Ann. Ponts Chauss. 1899, S. 215.

Stokes から Lebert 迄の著書の批判的叙述は Bühler の論文: Darstellung und Kritik der in der Literatur vorliegenden Untersuchungen über Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Ann. Glaser 1909, Bd. 65. Bühler の批判に對しては、多くの點で異論を立てる事が出来る。彼は就中 Lebert の業績を買破り Zimmermann の仕事を誤れるものと判断した。

Timoschenko (1911) は橋梁振動理論に價值ある研究を成しとげた。¹⁾

その後おそく結構の力學に就ての研究が初まつた。Reißner は結構を一つの自由度をもつた系と考へ、1899 年運動エネルギー保存の法則により結構の固有振動を定めた。結構の自由振動の詳細な研究を同著者は 1903 年公にした。然し Reißner の非常に功績ある事業も箇々の場合の固有振動を定める計算を殆ど爲しとげなかつたから實際的價值はない。Pohlhausen が 1921 年に發表した逐次近似法の可能な圖式方法は後に示す様に非常に早く目的を達する。²⁾ 結構橋に對する轉動荷重の影響の問題は、Melan (1893) の研究を除いては、全く着手されてゐないし、又 Melan の研究も見積り値が得られるのみである。³⁾

十分に綿密な撓度数を以て轉動荷重による運動を記録し、理論的計算の結果と比較する事は決して困難ではなかつたであらうに、實驗研究は橋梁の振動問題に就ては極く僅しか行はれなかつた。⁴⁾ 何となればこの公式が實際の橋梁に於て多くの場合吟味されない限り、當然の信用が得られないからである。一方この計算の數的結果は靜力學的計算に基く應力數の見積りに對しての最も重要な原則を築いた。そして橋梁工事の殆ど 100 年の間、少くとも活荷重の動力學的作用が問題になつて來る限り、實際の安全度の決定に對する異議のない原則が存在しなかつたのは残念な事である。

言ふ迄もなく最近轉動荷重の橋梁に對する作用の問題を實驗的方面から解くために實驗が行はれた。この實驗は 1907 年から 1909 年迄米國鐵道工業及道路維持協會⁵⁾ によつて、又 1919 及 1920 年英國に於て交通省によつて行はれた。⁶⁾ これらの實驗は應力測定によつて、急行の荷重列車の作用による應力の増大を斷定する結果となつた。そして總括に於て唯一の變數として徑間又は荷重の長さを含む所謂衝擊公式を定める事を得た。私の意見によれば、理論的研究から出發した目的を達する時のみこの種の實驗は議論の對稱が困難な時、理論の依つて立つ假定の正しさを吟味し、理論が必要とする經驗係數を與へ、最後に理論の發展に對する暗示を與へ得る見込がある。荷重の運動によつて生ずる追加應力の大きさに影響する種々の要素は、先づその作用を理論的熟考によつて評價し、計算に考慮されねばならぬ。目的に適ふ様に企てた

1) Kriloff: Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Math. Ann. 1905, S. 211.

Timoschenko: Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Z. Math. u. Phys. 1911, S. 163.

2) Reißner, Dr. H.: Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. Z. Bauw. 1903, S. 135. Pohlhausen: Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke. Z. angew. Math. u. Mech. 1921, S. 28.

3) Melan: Über die dynamische Wirkung bewegter Lasten auf Brücken. Z. öster. Ing.- u. Arch.- Ver. 1893, S. 293.

4) Paschen, E.: Ergebnisse von Durchbiegungsmessungen an belasteten Eisenbahnbrücken. Ann. Glaser 1891, Bd. 28, S. 115.

Hawranek, A.: Schwingungen von Brücken. Eisenbau 1914, S. 221.

5) Eisenbau 1910, S. 290. 参照

6) Ministry of Transport. Tests on Railway Bridges in Respect of Impact Effect. London 1921. Einen knappen Auszug findet der Leser im Bauing. 1922, S. 33.

1928年11月

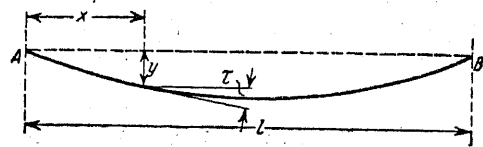
実験によつてその假定が吟味され又訂正される事が出来る。弾性的の介在物、例へば連続床の砂利層の作用等の様に特に難しく又は全く理論的には捕捉出来ない影響がある事は自から明かである。又應力増加に影響を與へる他の要素が既に研究されてゐる時にのみ実験は半ば満足な説明を與へる事が出来るであらう。動力學的作用の認識に對して上述の概要の實驗が、どれ程實際的意義に乏しいかと云ふ事は 66 頁の第 66 圖を一見すれば了解出来る。これらの骨折つた實驗の結果から精々、平均して衝撃作用は徑間が増加するにつれて減すると云ふ——確にすでに知られた——事實を發見する。然しそれ以上は何もないので、それでは何のための努力であつただらうか。

以下の章は鉸桁の自由振動及強制振動、斯る桁への轉動荷重及律動的衝撃の影響、最後に結構の自由振動を現在の理論が出来る限り、橋梁構造物の動力學的關係を深く究め得る様に論じた。得た公式を基にして鐵道橋に於ける動力學的影響の大きさに對する數值的の要點を得る事を目指とした。

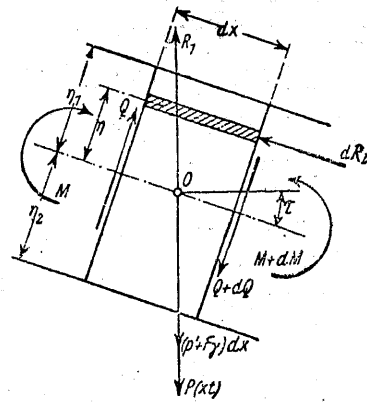
12. 角桁の横振動に對する偏微分方程式

第 60 圖に於て、 AB を断面主軸の面内で振動する不變断面 F の眞直な角桁とする。こゝに部材はその自重、又は或る法則に従つて分布せる外力 p の作用のもとに、並に x と t とに依つて變化する或る力 $P(x,t)$ の作用のもとにある。 y は時間 t 、座標原點からの距離 x の時、部材軸の無應力な最初の状態からの撓度とする。

運動の微分方程式を得るために、d'Alembert の法則に従つて動力學的反力(惰力)を外力として附加したる後、2 断面により部材から切り取つた長さ dx の部材要素の平衡を考察する。この限りなく薄い平板に(第 61 圖)働く力は外力 $p dx$ 、部材の重さ $F \cdot \gamma dx$ (こゝに γ は部材材料の比重、断面力 M と $M+dM$ 及 Q と $Q+dQ$ 、前述の變化する力



第 60 圖



第 61 圖

$P(x,t) dx$ ¹⁾ 及最後に惰力 R_1 と R_2 である。

y 方向の運動の動力學的反力は g を重力の加速度とすれば、

1) 荷重 $P(x,t)$ は常に(然し等布ではないが)桁に分布してゐるものとする

$$R_1 = \frac{p' + \gamma F}{g} dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

部材軸から η 離れた所にある纖維要素に對する撓力の動力學的反力は

$$dR_2 = \frac{\gamma dF}{g} dx \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \eta = \frac{\gamma dF}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2} \eta dx$$

但し x なる場所で断面が撓れた角を $\tau = \frac{\partial y}{\partial x}$ とす。部材軸の方向に於ける部材片の運動の動力學的反力は重要でないから無視する。

x 方向への凡ての分力の和は零でなければならぬ條件から

$$(p' + F\gamma) dx + P(x,t) dx + dQ - R_1 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

但し τ は小なる故に $\cos \tau = 1$ とおき $\sin \tau$ を 1 に對して無視する。

0 點に關しての力率方程式は第 2 の式を與へる。

$$Q dx - dM - \int_{\tau_1}^{\tau_2} dR_2 \eta = 0 \dots \dots \dots (2)$$

こゝに第三次的に小なる項は無視する。

さて

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} dR_2 \eta = \frac{\gamma}{g} dx \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \eta^2 dF = \frac{\gamma}{g} J \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx,$$

こゝに J は振動面に直角にある横断面の主軸に關する慣性能率を示す。彈性曲線の微分方程式から第一次の微分によつて

$$\frac{dM}{dx} = -EJ \frac{d^3 y}{dx^3}$$

となる。式(1),(2)中に R_1 , $\int_{\tau_1}^{\tau_2} dR_2 \eta$ 、及 dM の値を代入し $p = p' + F\gamma$ として

$$p + P(x,t) + \frac{dQ}{dx} - \frac{p}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$Q + EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\gamma}{g} J \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} = 0$$

となる。第 2 番目の式から $\frac{dQ}{dx}$ を求め、この値を最初の式に代入すれば、最後に振動の求むる微分方程式を得る。即

$$\frac{p}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{g} J \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p + P(x,t) \dots \dots \dots (3)$$

この方程式中左邊の第 2 項は廻轉慣性の影響を表はしてゐる。細い部材では振動周期へのこの項の影響は少ないからこれから先の研究の際はこれを無視する(50 頁脚註参照)。



13. 鈹桁の自由横振動

先づ桁が或る擾亂によつてその平衡状態を破られ、それからそれ自身で振動して行く場合を観察する。それは完全な自由振動である。ここでは固有振動の周期を確定するに留めよう。何故なればこの數を知れば橋に周期的に來る衝撃の共振作用を判断する事が出来るからである。振動してゐる橋梁が後から後へと新しい振動衝撃を受ける時は、これらの衝撃の作用は加算され、振幅は益々大きくなつて、共振作用が生ずる。充分多數のこれらの衝撃が繰返へされる際は振幅(彎曲)は危険な値に達し得る。衝撃の律動が固有振動の律動と異なり、特に衝撃が往復の時間に相當するよりも迅く連続して起る時は、衝撃は一部遲滞しつつ働き、先づ一種の振動の減衰が起る。單位時間の自由振動の數を ν で示せば、單位時間に $2\nu, 3\nu$ 回等の衝撃は起つてもよく、 ν 又は $\nu/2$ 回等の衝撃は危険な作用を起さしめる。

音響學から知れる様に各々の振動體に於て緩に振れる原音の外に、多くの振動の早い陪音が入つて來る。横振動をなす部材に於ては陪音の振幅は非常に早く減じ、例へば第一の陪音の振幅は原音の振幅の $1/10$ である。それ故に桁の動力學的状態を判断するためには通常原音の周期を知れば良い、何となれば高い形の振動は全變形には影響する事が少ないからである。

若し強制振動を起す外力がないならば $P(x) = 0$ 。そこで方程式(3)は廻轉能率を無視する事によつて

$$\frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho \dots \dots \dots (4)$$

となる。こゝにこの研究に於て ρ は一定であり、部材の自重及均等に分布する外力から生ずるものと假定する。

$$y = y_0 + y'$$

とすれば、但し

$$y_0 = \frac{\rho}{24 EJ} (x^4 - 2Lx^3 + l^2x)$$

は等布荷重 ρ の作用に於ける静力學的撓度で、極限條件を満足する方程式(4)の特解であるとすれば y' は同次方程式

$$\frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \dots \dots \dots (4')$$

の解を示す。

この同次方程式の特解は

$$y = CX \cdot e^{iat} \dots \dots \dots (5)$$

こゝに X は x の不定函数、 C は常數を示し、 $i = \sqrt{-1}$ である。 a は求めんとするパラメーターである。(5)を(4')に代入して

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = m^4 X \dots \dots \dots (6)$$

となる。但し簡單のため

$$m^4 = \frac{a^2 \rho}{g EJ} \dots \dots \dots (7)$$

とす。全微分方程式(6)の一般解は

$$X = A \cos mx + B \sin mx + C \cos h mx + D \sin h mx,$$

こゝに常數 A から D は周囲の條件(支承條件)によつて定められる、單桁では

$$x=0 \text{ に対して: } y=0 \text{ 及 } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$x=l \text{ に対して: } y=0 \text{ 及 } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

これらの極限條件によつて容易に

$$A = C = 0$$

となり。次の二つの方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} B \sin ml + D \sinh ml &= 0, \\ -B \sin ml + D \sinh ml &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

B, D の有限の値が存在するならば組(8)の分母のデターミナントは零となり、之により m に対して條件

$$\sin ml \cdot \sinh ml = 0$$

が出る。 $\sinh ml = 0$ に相當する根 $m=0$ (即ち $y=0$ にして静止の状態を示す)をのぞけば條件

$$\sin ml = 0$$

から他の根を得る。

即ち

$$m_k = \frac{k\pi}{l} \quad (k=1, 2, \dots, \infty) \dots \dots \dots (9)$$

これは無限に多い根 m の組であつて、同數の(6)式の特別解が存在する。 $\sin ml = 0$ により(8)式から $D=0$ となり B は唯一の任意の常數として残る。そこで(6)の k 番目の部分解は

$$X_k = B^{(k)} \sin \frac{k\pi}{l} x \dots \dots \dots (10)$$

なる形となる。

m を以て(7)を仲介としてパラメーター a が定められ、且 m の各値に対して a の二つの値を得る。即ち

$$a_k = \pm m_k^2 \sqrt{\frac{g EJ}{\rho}} = \pm b m_k^2,$$

となり、之により式(4')の k 番目の特解は

$$y_k' = C_1 X_k e^{im_k t} + C_2 X_k e^{-im_k t}$$

又は

$$y_k' = C_1' X_k \sin im_k t + C_2' X_k \cos im_k t$$

となる。結局、式(10)による X_k 及式(9)による m_k を代入すれば、與へられた偏微分方程式(4)の一般解を得る。即ち

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_1^{(k)} \sin b \frac{k^2 \pi^2}{l^2} t + B_2^{(k)} \cos b \frac{k^2 \pi^2}{l^2} t \right] \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (11)$$

函数 $\sin \frac{k\pi}{l} x$ を標準函数と呼ぶ、それ故 y は標準函数に展開した級数に展開出来る。この問題は橋梁工に於て重要でないから、無限に多い定数 B を始發條件に適合せしむる爲にとるべき方法に就ては別に述べない。式(11)により、全運動は平衡位置の周りの無限に多くの部分振動から成り、その箇々の周期は

$$\tau_k = \frac{2\pi l^2}{b k^2 \pi^2} = \frac{2 l^2}{\pi k^2} \sqrt{\frac{\rho}{g E J}} \quad (k=1, 2, \dots, \infty) \quad (12)$$

により與へられる事を知る。¹⁾ それ故 1 秒間の振動数は k 番目の固有振動に對して

$$\nu_k = \frac{1}{\tau_k} = \frac{\pi k^2}{2 l^2} \sqrt{\frac{g E J}{\rho}} \quad (12')$$

となる。

$k=1$ の時 ν_k は最小になる。この基本振動に對して

$$\nu_1 = \frac{\pi}{2 l^2} \sqrt{\frac{g E J}{\rho}} \quad (12'')$$

となる。

基本振動の振動数は彎曲抵抗 EJ が增大する時増大し、桁の質量及び外力の増加する時減少し、支間の二乗に逆比例する。

振動数の大きさに就いて判断を下し得るため、次の表(第4表)に支間 2 乃至 150 m の鐵道橋の主桁に對する振動数 ν_1 を示す。此處に構桁の自重は第1章第1表に示した公式により決定し、活荷重はプロシヤの荷重列車 „A“ とする。桁高は最小支間を除いては $l/10$ とす。支間の大なる時は主桁結構は同じ耐荷力の鋼桁により置き換へられたと考へた。縁維に於ける最大應力はプロシヤの橋梁規定に従つた。

1) 迴轉運動の惰性(偏微分方程式(3)の左側の第二項)を省略した事により、振動周期 τ_k は $\Delta\%$ だけ即ち

$$\Delta = 100 \frac{k^2}{2} \pi^2 \frac{\gamma l^2}{\rho} \left(\frac{l}{l} \right)^2, \text{ 但し } i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

だけ小さくなる。 $\frac{\gamma l^2}{\rho} = 1$ とし、即外力を桁の重量に比し微小であるとしても、 $k/l = 1/10$ の時 $(i/l)^2$ は略 $1/500$ であるから、基本振動に對する最悪の場合は、 $k=1$ とし

$$\Delta = 1.0\%$$

となる。即ち周期がその根に比例する弾性係数 E は 5% 以上精密には知り得ないから、實際上殆ど問題にならない量である。

第4表 種々の支間の鐵道橋の振動数

支間 l (m)	2	4	6	10	15	20	25	50	100	150
死荷重 p (t/m)	0,99	1,10	1,20	1,42	1,69	1,96	2,23	3,02	4,37	5,05
最大 $(M_p + M_0)$ (mt)	10,5	30,7	62,4	153,7	291,4	492,0	765,5	3067	12202	27710
h (m)	0,3	0,45	0,6	1,0	1,5	2,0	2,5	5,0	10	15
σ_{ml} (t/m ²)	8000	8000	8000	8000	8500	8500	9000	9500	10000	10500
$J = \frac{\text{最大}(M_p + M_0) \cdot h}{2 \sigma_{\text{ml}}}$ (m ⁴)		0,000864			0,0257		0,106			19,78
不載荷橋の1秒間の基本振動数 ν_1	81	40	28	19	12,5	10	8	4,7	2,7	2,0
載荷橋の1秒間の基本振動数 ν_1'	33	20	15	11	8	7	6	3,8	2,4	1,9

最後から第2行目は式(12')により計算した不載荷橋の1秒間の振動数を示す。最後の行は満載荷橋の振動数を示す。但し q を均等に分布したと考へた活荷重のスプリングに支へられない部分即ち車輪及び車軸とすれば、式(12')に於て l の代りに $l+q$ を置き換へたものである。轉動荷重のスプリングに支へられた部分の質量作用は、15に於て述べる様に、構桁の早い振動の時は特に小橋梁に於ては振動周期に著しい影響がない。スプリングにより支へられない重量は活荷重の重量の $1/4$ と考へた。

上述の数字により小橋梁に於ては振動が可成り早く、載荷橋と不載荷橋との差の大なる事を知る。振動の益々おそくなる大橋梁に於ては、その差も支間の増すに従ひ減少する。第4表の結果に就いては14に於て再考する。

上述の公式は柱状部材即鋼桁にのみ成り立つけれども、結構に對する簡単な公式がないから結構橋に對しても應用される。Hawranek は衝擊實驗により支間 46,4 m の曲弦構道路橋に於て振動数 ν_1 が 3,95 乃至 4,05 である事を確めた。¹⁾ Hawranek は橋梁の自重を $p = 1,08$ t/m (一結構につき) とし、曲弦構と同じ撓度を生ずる鋼桁の慣性能率を $J = 0,1696$ m⁴ とした。この値により $E = 2 \cdot 10^7$ t/m² とすれば式(12'')により

$$\nu_1 = \frac{\pi}{2 l^2} \sqrt{\frac{g E J}{\rho}} = 4,04$$

となり、實驗結果と非常によく一致する。上の如き好き一致を19に於ける結構橋の計算例にも見出すであらう。大鋼桁橋の主桁も振動する棒状體と考へる事により我々の研究が可能となるであらう。

14. 桁上の速度 c なる轉動集中荷重による強制振動

この振動問題の嚴密な解法はこれまでに知られてゐない。それ故にこゝでは簡単な説明で間に合はせよう、即ち荷重 P の質量は先づ桁の質量に對して小さいと考へる。そして轉動荷重の惰性作用の影響を近似計算に依つて少くとも概算出来る様に研究しよう。

微分方程式(3)に戻つて、第2項の無視によつて

1) 45頁の脚註4.に示した文献参照。

$$\frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho + P(xt); \dots (13)$$

こゝに項 $P(xt)$ は桁上の轉動荷重の影響を示す。この一次方程式の解は2部分に分れる。第一は $P(xt) = 0$ とおいた微分方程式に相當した y_1 で、既に知られてゐるもの(解11)であり、第二の y_2 は方程式

$$\frac{\rho}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P(xt) \dots (14)$$

を満足させるもので、こゝに $t=0$ に對する最初の條件、即ち $y=0$ 及び $\frac{dy}{dt}=0$ だけ考へればよい。何となれば残りの最初の條件は既に解 y_1 に於て考慮したからである。 y_1 は自由振動、 y_2 は強制振動を示し、之等はお互に重なり合つてゐるものである。

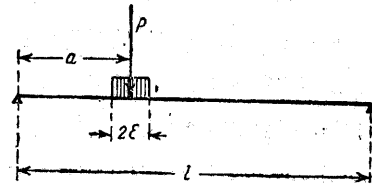
荷重法則 $P(xt)$ は集中荷重であるから不連続である。扱て數學的論説を完全にする爲めに、 $P(xt)$ を P が左側の支點から a 、だけ離れてゐる或る定まつた瞬間 t に對して標準函数に展開した級數 (Fourier の級數)¹⁾ に展開する。

即ち

$$P(xt) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

こゝに係數 A_k は定積分

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l P(xt) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$



第 62 圖

に依つて與へられる。第 62 圖で、 P が如何程でも小さく考へられる幅 2ϵ の範圍に等布してゐるものとすれば

$$\begin{aligned} x=0 & \quad \text{から} & \quad x=a-\epsilon \text{迄} & \quad P(xt) = 0 \\ x=a-\epsilon & \quad \text{''} & \quad x=a+\epsilon \text{''} & \quad P(xt) = \frac{P}{2\epsilon} \\ x=a+\epsilon & \quad \text{''} & \quad x=l & \quad P(xt) = 0 \end{aligned}$$

故に

$$A_k = \frac{2}{l} \frac{P}{2\epsilon} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{P}{k\pi\epsilon} \left[\cos k\pi \frac{a+\epsilon}{l} - \cos k\pi \frac{a-\epsilon}{l} \right]$$

極限をとつて $\lim \epsilon = 0$ とおけば括弧内は簡単になつて

$$A_k = \frac{2P}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l}$$

を得る。但し $a=ct$ とし、 c は荷重 P が橋梁上を轉動する速度とする。最後に $P(xt)$ に對して次式を得る

1) Fourier 級數への函数の展開に就ては Weber, H.: Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik, Bd. 1, 5. Aufl., Braunschweig 1910. 参照。

$$P(xt) = \frac{2P}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi ct}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

これで集中荷重は sine 型の連続荷重の無限級數に導かれた。そこで微分方程式 (14) は次の形となる、即ち

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJg}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{2Pg}{\rho l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi ct}{l} \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \dots (15)$$

この方程式の解は

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

こゝに T_k は定めんとする t の函数である。方程式 (15) に特解 $T_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ を代入し、 $\sin \frac{k\pi x}{l}$ で約せば

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial t^2} + \frac{EJg}{\rho} \frac{k^4 \pi^4}{l^4} T_k = \frac{2Pg}{\rho l} \sin \frac{k\pi ct}{l}$$

この全微分方程式の一般解は知られてゐる。即ち

$$T_k = G_k \cos m_k b t + H_k \sin m_k b t + \frac{2Pg l^3}{\rho} \frac{\sin \frac{k\pi ct}{l}}{k^4 \pi^4 b^2 - k^2 \pi^2 c^2 l^2} \dots (16)$$

但し前の様に

$$m_k = \frac{k\pi}{l}, \quad b = \sqrt{\frac{EJg}{\rho}}$$

とする。荷重が桁に入つて來る瞬間 $t=0$ では y 及び $\frac{dy}{dt}=0$ であるから¹⁾ 又 T_k 及 $\frac{\partial T_k}{\partial t}$ も $t=0$ に對して零となり、常數 G_k 及 H_k は

$$\begin{aligned} G_k &= 0, \\ H_k &= \frac{2Pg l^4 c}{\rho b \pi^3} \cdot \frac{1}{k^3 (k^2 \pi^2 b^2 - c^2 l^2)} \end{aligned}$$

となる。

方程式 (13) の完全な解は方程式 (11) の助けによつて、若し死荷重による靜力學的撓度 y_0 をこの研究に對して重要でないものとして省略すれば、

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{\infty} B_1^k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin b \frac{k^2 \pi^2 t}{l^2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_2^k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos b \frac{k^2 \pi^2 t}{l^2} \\ &\quad - \frac{2Pg l^4 c}{\rho b \pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \sin b \frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}}{k^3 (k^2 \pi^2 b^2 - c^2 l^2)} + \frac{2Pg l^3}{\rho \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l}}{k^2 (k^2 \pi^2 b^2 - c^2 l^2)} \dots (17) \end{aligned}$$

1) こゝに y は解の $P(xt)$ に關係する部分、即ち上に y_2 を以て示したものである。

となる。

更に荷重 P が桁にのる時間點にて部材がその静力學的平衡狀態で静止してゐたと假定すれば、全常數 B_1 及 B_2 は零で、解は $y = y_2$ の形に整約される、こゝに y_2 は方程式 (17) の最後の二つの總和式によつて與へられる。それ故

$$y = \frac{2 P g l^3}{\rho \pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi c t}{l}}{k^2 (k^2 \pi^2 b^2 - c^2 l^2)} - \frac{2 P g l^4 c}{\rho b \pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k^2 \pi^2 t}{l^2}}{k^3 (k^2 \pi^2 b^2 - c^2 l^2)} \quad (17')$$

となる。この兩總和の内第二のものは固有振動と同じ周期を示してゐる、(時間の項 $\sin b \frac{k^2 \pi^2 t}{l}$ に注意されたい) 最初の和の周期は荷重 P の速度 c に関係し、この項は固有強制振動を示し、どんな事情があつても尙自由振動を伴ふものである。

撓度 y に対して概要的な方程式を得るために方程式 (17') を Timoschenko¹⁾ の方法によつて變形する、こゝに分母に於ける $\pi^2 b^2$ を取出し且

$$\frac{cl}{\pi b} = a \dots \dots \dots (18)$$

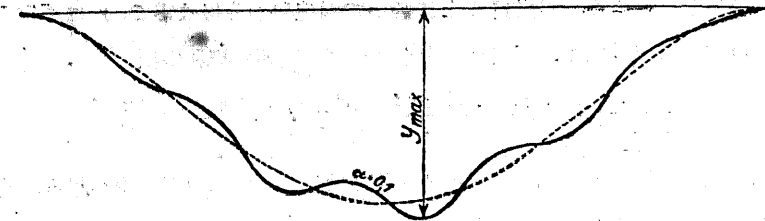
とおく。尙 b に対して括弧で括つた式を導く場合は

$$y = \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi c t}{l}}{k^4 (1 - \frac{a^2}{k^2})} - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi c t}{l}}{k^5 (1 - \frac{a^2}{k^2})} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

a は桁の動力學的状態を特徴づける大きさであつて、1 よりも遙かに小さく支間の増加につれて常に減少する。 $c=30$ m/秒 とし、又第4表の値を以て、 a の値を57頁の表(第5表)に計算した。支間 2m の際は a は約 $1/11$ で、支間 150m 迄に約 $1/20$ に減少する。

最初の總和の項で表はされた強制基本振動の周期は $\frac{2l}{c}$ で、即ち荷重が桁を轉動するに要する2倍の時間である。それ故この運動は第2番目の總和で表はされる自由振動に対して緩かである。桁の各點は荷重が桁に入つて來るならば撓み、この撓度は或る最大値に達して荷重が桁をはなれると又零に減ずる。それから桁は強制振動を以て振動し續ける。この運動の振幅は静止荷重のもとに於ける相當した撓度よりも極く僅か大きいのみである。その差は2%よりも小である。この運動に尙第2番目の總和によつて表はされた自由振動と周期は同じだが振幅の非常に小さい振動が加はる。それ故に各點はただ簡単な上下をするのみならず、又この上下する間の夫々の位置のまわりに相當した小さい振幅でかなり早く振動する。荷重 P が向側の支承に達すれば、減衰により強制振動及び自由振動は消へて、平衡状態になる。更に或る定まつた瞬間には凡ての點は同一の振動相にある、即ち桁は全體として振動する事に注意されたい。

1) Timoschenko, St. : Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe, Z. Math. u. Phys. 1911, S. 191.



第 63 圖

荷重の軌道曲線を畫けば同時に生ずる一定の沈下又は上昇中の迅い桁の往復運動を明かに認める事が出来る、即ち波形である。即ち方程式 (19) に於て $x=ct$ とおけば、この方程式は時間に於けるその時々荷重位置の撓度 y を與へ、又荷重點が動く曲線の幾何學的形狀を定めるのである。これは即ち

$$y = \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{k \pi x}{l}}{k^4 (1 - \frac{a^2}{k^2})} - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \sin \frac{k \pi c t}{l}}{k^5 (1 - \frac{a^2}{k^2})} \right\}$$

である。

第 63 圖に於ては $a=0.1$ に對する斯かる點の軌道を示してゐる。この曲線は桁の彈性曲線即ち、或る定まつた瞬間に於ける變形せる部材軸の形と混同してはいけない。第 63 圖の點線は最初の總和の項即ち強制振動を表はしてゐる。最大撓度は中央ではなくて、やゝそれから側方に起つてゐる。

さて $c=0$ とおけば、 $a=0$ となり y の第2の總和は零となる、そして $ct=a$ とすれば静止荷重に對して

$$y = \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \sin \frac{k \pi a}{l}$$

となる。方程式 (19) と比較すれば強制振動は(最初の項)大體、因數 $\frac{1}{1-a^2}$ だけ静力學的撓度と異つてゐる事が解る。

$a = \frac{1}{2}$ 及び $x = \frac{l}{2}$ に對しては

$$y = \frac{2 P l^3}{E J \pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right)$$

となる。括弧内の式は明らかに $\pi^4/96$ である、それ故

$$y = \frac{P l^3}{48 E J}$$

となり、桁の中央にある集中荷重に對して既知の撓度の式と一致する。

尙或る定まつた振動の形に對して

$$c^2 l^2 = k^2 \pi^2 b^2$$

である特別の場合を考察する。方程式(17')に於いて兩總和の分母は零で、 y は不定の形 $\infty - \infty$ をとる。既知の方法に依つてこの不定を取除くならば、問題の總和の項

$$y = \frac{Pgl}{k^2 \rho \pi^2 c^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l} - \frac{Pgl}{k\rho\pi c} t \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi ct}{l}$$

を得る。第2項は因数 t を含む故に y は t と共に増加し、即ち共振現象が起る。若し基本振動を最も緩かな振動と観察してよいとすれば、これに對しては

$$c^2 l^2 = \pi^2 b^2$$

でなければならぬ。この條件は原音の振動數

$$\nu_1 = \frac{\pi^2 b}{2\pi l^2} = \frac{\pi b}{2l^2}$$

を入れると、共振作用が可能であるためには

$$c = 2l\nu_1$$

でなければならぬ。第4表に與へた振動數により、危険な荷重速度 c は實際には現はれないが324 m/秒から600 m/秒迄である事を知る。それ故こゝに問題になつた共振現象は、少くとも充分な剛度を有する新しい橋梁に於ては、實際には除外される。

陪音の振幅は非常に速く減少する(方程式(19)の分母に因数 k^4 又は k^5 がある)から、簡単な式の誘導には單に基本振動を考へるだけでよい、そこで方程式(19)は著しく簡單になり即ち總和は第一項のみとなる。こゝに尙注意すべき事は y の2つの總和の第2のもの基本振動の周期は第1の總和の基本振動の周期の a 倍である事である。

$c = 0$ とすれば $a = 0$ となる、そして静力學的撓度(荷重は左の支承から $c = a$ の距離にある)に對して式

$$y_s = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi ct}{l}$$

を得る。これから $ct = l/2$ 即ち荷重 P が中央にある場合 x の撓度は

$$y_{sm} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l}$$

となる。 y_s 及 y_{sm} を方程式(16)に入れ、最初の總和の項にのみ注意すれば

$$y = \frac{y_s}{1-a^2} - \frac{a}{1-a^2} y_{sm} \cdot \sin \frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l} \dots \dots \dots (20)$$

を得る。桁上を荷重が轉動する時間内に於て $\sin \frac{k}{a} \frac{\pi ct}{l}$ は幾度もその符號を變へる——この振動の周期は時間 $\frac{l}{c}$ に對して小である——から $\sin \frac{k}{a} \frac{\pi ct}{l} = -1$ とおくならば y の最悪の値を得る。そこで y は簡単な形になる、即ち

$$y = \frac{1}{1-a^2} (y_s + a y_{sm}) \dots \dots \dots (21)$$

こゝに y_s は荷重 P が $a=ct$ にある時の横距 x なる點の静力學的撓度を、 y_{sm} は荷重が $a=l/2$ にある時の同點の静力學的撓度を示す。最大撓度は略荷重が桁の中央に達した時に起り

$$y_{max} = \frac{1}{1-a^2} (y_{sm} + a y_{sm}) = \frac{1}{1-a} y_{sm} \dots \dots \dots (22)$$

となる。吾々は $\frac{1}{1-a}$ を動荷重の動力學的因數と呼ぶ。方程式(22)を以て移動する集中荷重 P の作用による動力學的撓度に對する非常に簡單な式を得た。第5表に示す如く、動力學的作用は短支間の桁に於ても極端には大きくない。第5表は最後の行に於て静力學的撓度に對する全動力學的撓度の超過を静力學的撓度の百分率で表はしてゐる。

第5表 静力學的撓度の百分率で表はした荷重移動による静力學的撓度の増加 Δy_1

l (m)	2	4	6	10	15	20	25	50	100	150
$a = \frac{cl}{b\pi}$	0.0932	0.0939	0.0893	0.0800	0.0801	0.0764	0.0753	0.0636	0.0557	0.0498
$100 \cdot \frac{\Delta y_1}{y_s} = 100 \frac{a}{1-a}$	10.3	10.3	9.8	8.7	8.7	8.3	8.1	6.8	5.9	5.2

尙振動の際に起る應力 s と P によつて起る静力學的應力 s_s との間に方程式(22)に従ふ y と y_s 間に於けると同様な簡單な關係が成立するかどうかは決定すべき問題である。

彎曲を受けた桁の纖維應力 s は彎曲力率に比例し、各點に於ける彎曲力率はそこに生ずる部材軸の曲率 $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ に比例するから、先づ方程式(19)を2度微分して式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{2Pl}{EJ\pi^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l}}{k^2(1-\frac{a^2}{k^2})} - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{k}{a} \frac{k\pi ct}{l}}{k^3(1-\frac{a^2}{k^2})} \right\} \dots \dots (23)$$

を得る。 $a = 0$ として $a = ct$ なる距離にある P に對して静力學的曲率は次の様な形となる即ち

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_s = - \frac{2Pl}{EJ\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l}}{k^2} \dots \dots \dots (24)$$

方程式(23)の最初の項に於て凡ての總和の項の分母の因數 $1 - \frac{a^2}{k^2}$ の代りに $1 - a^2$ を置き換へれば、この總和の項の値は少し大きくなり、方程式(24)によつて

$$\frac{1}{1-a^2} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_s$$

なる形に書く事が出来る。方程式(23)の第2項の分母に k^3 があつて、この項は第一項よりも遙に小さいから、こゝでは第一項を考察するにとどめ、式(20)を立てた時と同様の考慮を基としてこの方程式の項の代りに

$$\frac{a}{1-a^2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

をおき得る。故に最後に

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{a}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^2} \right) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

又は

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{1-a} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

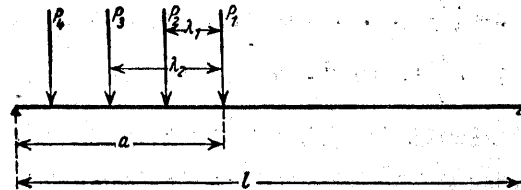
となる。即ち上と同じ動力學的因數となる。剪力に關しても亦同様の結果を得る。故に轉動荷重によつて生ずる動力學的撓度及應力の最大値は靜力學的撓度及應力の最大値に因數 $\frac{1}{1-a}$ を乗ずる事に依つて得られる。こゝに

$$a = \frac{cl}{\pi b} \quad \text{及} \quad b = \sqrt{\frac{EJg}{\rho}}$$

である。

移動集中荷重列車の動力學的作用

集中荷重 $P_1, P_2, P_3 \dots$ の連続が桁上に轉動するならば集中荷重の作用は集り、その作用は撓度が問題になる限り式(20)によつて定められる。¹⁾ 若し最初の荷重が $a=cl$ に達したならば(第64圖) x の位置の撓度 y は方程式



第64圖

$$y = \frac{1}{1-a^2} \left[y_s^{(1)} + y_s^{(2)} + y_s^{(3)} + \dots \right]$$

$$- a \left(y_{sm}^{(1)} \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} t + y_{sm}^{(2)} \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} \left(t - \frac{\lambda_1}{c} \right) + y_{sm}^{(3)} \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} \left(t - \frac{\lambda_2}{c} \right) + \dots \right)$$

で與へられる。

さて時間々隔 $\frac{\lambda_1}{c}, \frac{\lambda_2}{c} \dots$ が基本振動の周期 $T_1 = \frac{2l}{c} a$ — それを支間 100 m 以下の橋梁に於ける最悪の場合と考へねばならないが — の數倍であるとすれば

$$\sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} t = \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} \left(t - \frac{\lambda_1}{c} \right) = \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} \left(t - \frac{\lambda_2}{c} \right) = \dots$$

となり、それ故に

$$y = \frac{1}{1-a^2} \left[y_s^{(1)} + y_s^{(2)} + y_s^{(3)} + \dots - a \left(y_{sm}^{(1)} + y_{sm}^{(2)} + y_{sm}^{(3)} + \dots \right) \sin \frac{1}{a} \frac{\pi c}{l} t \right]$$

となる。従つて方程式(20)の形の方程式を得たので、この方程式の結果即ち方程式(21)及(22)も成り立つ。それ故最悪の場合に於て集中荷重列車の動力學的因數は $\frac{1}{1-a}$ の値をとる。又最大

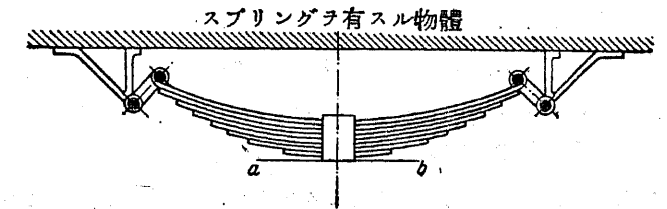
1) 微分方程式は一次である、従つて重疊の法則が成り立つ。

縁維應力に關しても同一の結果に達する。多くの場合、動力學的作用は因數 $\frac{1}{1-a}$ に相當するよりも小さくなるであらう。何となれば各荷重 P_1, P_2, \dots の作用は第2の總和の項に表はれて來る限り大抵互に妨げ合ふからである。それ故因數 $\frac{1}{1-a}$ は上の限界値である。

15. 荷重重心の軌道形に及ぼす轉動荷重のスプリングの影響

今迄轉動荷重の惰性作用を考慮しなかつた。併し惰力の影響を論ずる前に荷重の一部分のスプリングの作用を明らかにせねばならぬ。事情に依つては車輪と車體又は機關車自體との間にスプリングを挿入する事に依つてスプリングを有する荷重部分の質量作用を減少する事が出来るから之等の作用を實際には省略出来る。さて簡単な計算によりスプリングの影響を數字的に求めよう。

車軸に固定されたスプリングの底面 ab (第65圖) は車輪の轉動する橋桁に生ずる運動と同じ運動をする。スプリングの底面の振動は車軸荷重自體が固定されたスプリング端の強制振動を生ずる。



第65圖

ν をスプリング底面に生ずる振動様式

$$a \sin 2\pi \nu t \quad 1)$$

の振動數とし、 ν' を荷重 P を有するスプリングの自由振動の1秒間の振動數とすれば、スプリングを有する荷重 P は

$$a \frac{\nu'^2}{\nu^2 - \nu'^2} \sin 2\pi \nu' t \quad 2)$$

の形式で振動する。

其れ故スプリングを有する荷重の強制振動の振幅は桁振動の振幅に比例する。即ち

$$\mu = \frac{\left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2}{1 - \left(\frac{\nu'}{\nu} \right)^2}$$

さて ν が大で ν' が小であれば、比例係數 μ は1に對し小である。即ちスプリングを有する荷重はその臺、桁よりも小さい振幅を以て振動する。其れ故スプリングの作用は第63圖に示した荷重の波形軌道を平坦ならしめるにある。振動加速度も同じ割合で減少する。支間の

1) 14 に述べた如く桁の運動方程式は此の種の正弦項の和から成る。

2) Authenrieth-Ensslin: Technische Mechanik, 3. Aufl. S. 464. 參照

餘り大きくない橋梁にあつては既に述べた如く振幅及加速度の減少が著しいから、荷重々心の軌道は第 68 圖に示せる點線(附隨する自己振動を有しない動力學的撓度)と殆ど區分し難い。

荷重 P を有するスプリングの自由振動の周期は方程式

$$\tau' = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

で與へられる。1) 此處に f は荷重 P によるスプリングの靜力學的撓度とし、 g は重力とす。

f を通常の平均値 4 cm とすれば

$$\tau' = 0.402 \text{ 秒} \quad \text{それ故} \quad \nu' = \frac{1}{0.402} = 2.49$$

となる。

第 4 表に示した自己振動(基本振動)に對する値 ν を用ふれば次の關係あり。

第 6 表

l (m)	2	4	6	10	15	20	25	50
ν	81	40	28	19	12.5	10	8	4.7
μ	0,00178	0,00539	0,0100	0,0219	0,0492	0,0832	0,124	0,414

約 25 m 迄の小支間の橋梁にあつては μ は $1/8$ より小であつて、それから急激に μ は増大する。其れ故此の支間下に於てスプリングは強制振動に伴つた自由振動により生ずる荷重の惰性作用に著しい影響を與へる。

それ故支間小なる橋梁にあつては軌道曲率及び之により生ずる運動する質量の惰性力(遠心力)が重要であるから、小支間の橋梁に於ては車輛荷重のスプリングが特に重要である。支間大なる橋梁にあつては運動する質量の影響は小であるから、スプリングも重要でない。

今迄自由振動に依る質量作用に對するスプリングの影響のみを詳論した。この強制振動は極く緩やかに起るから、式(19)の第 1 項の示す運動に對し、スプリングは——支間小なる場合を除き——殆ど影響を及ぼさない。荷重々心は桁と同様に下り、重心軌道の曲率による遠心力が生ずる。

16. 轉動荷重の惰力の影響

$\frac{P}{g}$ を荷重 P の質量とし、 $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ をその加速度(但し μ はスプリングの影響を示す上述の輕減係数である)とすれば、轉動荷重が桁に及ぼす壓力 P' は荷重 P の惰性作用だけ減少される。それ故

$$P' = P \left(1 - \frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

$x = ct$ とおけば

1) Hütte, Bd. I. 參照

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{R}$$

となる。但し R は荷重點の軌道曲率を示す。それ故

$$P' = P \left(1 + \frac{\mu}{g} \frac{c^2}{R} \right)$$

この式に於て附加項は下向きに曲つた軌道に於ける荷重の運動による力率正の時下向きの遠心力を示す。

運動の微分方程式、式(14)は最初の式の P' を入れると

$$\frac{P}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P(x,t) \left(1 - \frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \dots \dots \dots (25)$$

此の方程式の嚴密な解は不可能である。それ故少くも $\frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ が 1 に對し小なる場合、惰性作用の影響を概算し得る近似計算に止める。

公式(25)に導いた加速度の第一次近似値を決定すれば積分する事が出来る。此處には 14 に於て見出した y の解即ち式(19)を用ふ。此處では振動の正確な研究が問題なのではなく、只桁中央の撓度又は應力に對する修正項の影響の概算が問題なのであるから、修正項の大きさの數字的算定に止め、——充分正確であるが——桁中央の撓度及應力は附加項の大きさに比例して増減し、それ故荷重 P は修正量だけ増減すると假定する。

この近似計算を更に簡単にするため、式(19)の第一級數項のみを考へる——この際生ずる誤差は小である——と、なほ分母に於て a^2 を 1 に對し無視すれば、 y は次の簡単な式となる。即ち

$$y = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \left[\sin \frac{\pi ct}{l} - a \sin \frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

t により 2 度微分を行へば

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2Plc^2}{EJ\pi^2} \left[-\sin \frac{\pi ct}{l} + \frac{1}{a} \sin \frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l}$$

となり又

$$a^2 = \frac{c^2 l^2 \rho}{\pi^2 EJg}$$

とすれば

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2Pg}{\rho l} \left[-a^2 \sin \frac{\pi ct}{l} + a \sin \frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l} \dots \dots \dots (26)$$

加速度は二部分からなる。即ち第一部分は強制振動の加速度であり、第二部分は自由振動の加速度である。スプリングの影響が異なるから、この二部分の作用を別々に研究しよう。

a) 強制振動の惰力

若し支間約 4 m 以内の桁を除けばスプリングは強制振動に著しい影響を及ぼさないから $\mu = 1$ とおく。それ故修正項は

$$\frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2P}{pl} a^2 \sin \frac{\pi ct}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$$

となる。もし荷重が桁中央に到達するならば、この點に於て加速度は最大となる。故に $x = ct = l/2$ とすれば

$$\frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2P}{pl} a^2 \dots \dots \dots (27)$$

となる。さて加速度の大きさは第一に荷重 P の桁重量 pl に対する比に關係する單一軸荷重を以て換算する——今逆行つたが——事は此處ではやらない。橋梁上に轉動する單一荷重列車を換算荷重列車と同一の最大力率を生ずる單一荷重で置換へる事の困難を避けるが、換算荷重が最も不利の場所に働くと假定するから、此際餘り不利に換算してゐる事は確かである。この假定により得られた加速度及相等する應力は實際には決して生じない上限と考へらるべきである。

桁の換算の基礎となる活荷重の最大力率 M をとれば、修正項は $P = \frac{4M}{l}$ として

$$-\frac{8M}{pl^2} a^2$$

となる。負符號は惰力が下向きに遠心力として働くでの桁に荷重のかゝる事を示す。従つて強制振動の振幅は係數 $1 + \frac{8M}{pl^2} a^2$ を乗すべきである。併し此振幅は靜力學的撓度より少ししか大きくないから、 $\frac{8M}{pl^2} a^2$ は略正確に遠心力の作用により靜力學的撓度の生ずる比例増加を示す。第7表は最後の列に種々の支間に對するこの附加作用の大きさの靜力學的撓度に対する百分率即ち

$$\Delta y_2 = 100 \frac{8M}{pl^2} a^2$$

を示す。

第7表 強制振動の惰力に依る靜力學的撓度の増加 Δy_2 の靜力學的撓度に対する百分率

l (m)	2	4	6	10	15	30	25	50	100	150
$\frac{8M}{pl^2}$	20,2	12,95	10,56	7,65	5,14	4,02	3,39	2,25	1,23	0,95
$100 \frac{\Delta y_2}{y_s} = 100 \frac{8M}{pl^2} a^2$	17,5	12,3	8,3	4,9	3,3	2,4	1,9	0,91	0,38	0,23

支間 2m の時は遠心力の作用は靜力學的撓度の 17.5% に達する。此の作用は支間の増大するにつれ急激に減少し、支間 50m 以上の場合は微細と考へられる。

b) 自由振動の惰力

自由振動の加速度に關係する修正項の第二の部分は、上の如く $x = l/2$ とすれば

$$\frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2P}{pl} a \sin \frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l}$$

となる。 $\frac{1}{a} \frac{\pi ct}{l} = \frac{\pi}{2}$ の時、附加加速度は最大となる。即ち

$$\frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{2\mu P}{pl} a \dots \dots \dots (28)$$

P として軸壓のみをとる。即ち大橋梁が疑ひもなく此の場合であるが、單一荷重列車が問題となる場合は、微分方程式 (25) の右側は

$$P_1 \left(1 - \frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) + P_2 \left(1 - \frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) + \dots = P_1 \left(1 + \frac{2\mu P_1}{pl} a\right) + P_2 \left(1 + \frac{2\mu P_2}{pl} a\right) + \dots$$

となる。それ故此際質量作用の影響は比 $\frac{2\mu p}{pl} : 1$ にのみ關係する。併しこの最不利の式に於て集中荷重の影響はその距離 λ が $\frac{\lambda}{c} = \frac{2al}{c}$ が自由振動の周期に等しい時にのみ増加する。これは極く稀な場合にのみ正しいから、集中荷重による遠心力は大抵互に打消し合ふ。それ故 P に最大軸壓を選び、式 (28) による修正項を算定すれば、之は實際には殆ど生じない最大値を得る。

支間の小なる場合はスプリングの影響が決定的であるから、次の表に於て荷重の大部分がスプリングに支へられる場合を考へよう。荷重の 80% がスプリングの上であり、假りに最高軸壓を 20t とすれば 16t はスプリングに支へられ、4t は直接桁と接觸してゐると見做されると假定する。次の第8表は前述の表に示した pl, a 及び μ に基き、靜力學的撓度の次の増加のそれ自身に對する百分率の計算を含む。茲に $\Delta y_3'$ はスプリングを有する荷重によるもので、 $\Delta y_3''$ はスプリングのない荷重によるものである。數列 Δy_3 の始め二つの數が括弧を有するのはこの數字が疑問であるからである。惰力が P に對し小であると言ふ假定は最早成り立たないから、この數字は大きさの程度が合つて居るのみである。

第8表 自由振動の惰力による靜力學的撓度の増加 Δy_3 の靜力學的撓度に対する百分率

支間 (m)	2	4	6	10	15	20	25	50	100	150
桁重量 (t)	1,98	4,40	7,20	14,2	25,4	39,2	55,8	151	437	758
スプリングを有する荷重の影響										
$100 \frac{\Delta y_3'}{y_1} = 100 \frac{2 \cdot 16}{pl} \mu a$	0,27	0,37	0,40	0,40	0,50	0,52	0,54	0,56	0,42	0,21
スプリングのない荷重の影響										
$100 \frac{\Delta y_3''}{y_1} = 100 \frac{2 \cdot 4}{pl} \mu a$	(37,6)	(17,0)	9,93	4,50	2,52	1,56	1,03	0,34	0,11	0,05
$100 \frac{\Delta y_3' + \Delta y_3''}{y_1}$	(37,9)	(17,4)	10,3	4,9	3,0	2,1	1,6	0,9	0,53	0,26
$100 \frac{\Delta y_3}{y_s}$	(41,8)	(19,2)	11,3	5,3	3,3	2,3	1,7	1,0	0,62	0,27

1) 動力學的撓度は y_1 式 (22) により $\frac{\Delta y_3' + \Delta y_3''}{y_1}$ だけ増大する。それ故靜力學的撓度に對する追加は $\frac{1}{1-\alpha} \frac{\Delta y_3' + \Delta y_3''}{y_1}$ となり、之を最後の行に示す。

スプリングを有する荷重の速い振動に対する作用 $\Delta y_s'$ は第 8 表から解る様に總ての支間に對し微小であつて、最高で活荷重の $1/2\%$ である。スプリングのない活荷重即ち車輪及び車軸は支間小なる時可成りの應力増大を生ずる。併しこの大きさは支間の増すにつれ急激に減少する。併し最不利の状態の假定により定めた數値は支間小なる場合を除き殆ど達せられる事のない上限を示す。

17. 機關車車輛の對重の動力學的作用

本質的に車軸に偏倚して分布する質量を示す機關車の働輪及び聯結輪に設備された栓、曲柄及働子は、車輪に取付けられた對重により質量の平均を計らない場合には、その進行中の急回轉の際著大なる遠心力を及ぼすであらう。併しこの質量の平均は完全ではないから、遠心合力はなほ残り、桁に交番に荷重を掛たり卸したりする。それ故桁に周期的に働く力を生じ、桁に強制振動を起し、事情によつては桁の固有振動の周期が交番する遠心力の周期と一致する場合には著しい共鳴作用を生じさす。併し幸ひにも減衰が著しく、他の規則的の衝撃（軌道衝撃等）に依るこの周期的の力の妨害及多數の車輪の同時作用の妨害の影響が大であるから、前述の周期的遠心力により生ずる著しい振動は新架設の橋梁では認められない。橋梁に於ける減衰係數に對する數値は全く存在しないから、此處に周期的に變化する動荷重により強制され減衰される振動の理論を述べても無益である。

Timoschenko は此處に述べる遠心力により生ずる非減衰振動を論じ¹⁾、 n を機關車働輪及び聯結輪の 1 秒間の回轉數とし、 ν を桁の基本振動の 1 秒間の振動數とすれば、 $\frac{n}{\nu}$ が 1 に近い時共鳴作用の起る事を見出した。車輪周囲約 6m の時 $c = 30$ m/秒 とすれば回轉數 $n = 5$ である。不載荷橋梁の固有振動を考慮する時、第 4 表からこの列車速度に對する危険支間は約 $l = 50$ m である。

それ故共振作用を度外視すれば過剰の遠心力による問題の機關車々軸の輪壓の増加のみが残りの問題となる。技術協定により各車輪の質量は過剰の遠心力 F の最大が靜止輪壓の 15% なる様平均せしめねばならない。この數値は次の表に基き、²⁾ 機關車の 5 車軸のうち 2, 3, 4. 及 5 の車軸が遠心力を示すと假定する。1 車軸に屬する 2 車輪の質量を 90° 變位せしむれば、この變位により 1 車軸の全作用は幾分輕減されるから、その變位は度外視する。次の第 9 表に以前のプロシヤの荷重列車 A に對する靜止してゐると考へた活荷重による彎曲率の百分率にて示せる彎曲率の増大を示す。

1) 54 頁の脚註 1 の文獻參照、

2) 之は間違つてゐるが對重の使命は他の偏倚せる質量の惰力を打消すものとして計算されてゐるから、橋梁參考書にはより大なる遠心力作用が與へられてゐる、で Landsberg は Hdb, d. Ing.-wissensch. II/III für die Fliehkraft F bei Schnellzuglokomotiven に於て一働輪に對し 400 乃至 500 kg としてゐる。

第 9 表 機關車の働輪及び聯結輪の遠心力による増大 ΔM の 靜止活荷重による彎曲率に對する百分率

l (m)	2	4	6	10	15	20	25	50	100	150
$100 \frac{\Delta M}{M}$	12,8	13,4	13,4	11,3	11,3	11,0	9,9	8,8	6,6	5,2

剪力に對しては幾分異つた増大係數を生ずるが、その差異は著るしくないから、比例係數 $\frac{\Delta M}{M}$ を一般に働輪及び聯結輪の遠心力の影響に對する動力學的要素とみたい。

18. 總括、衝擊係數

14, 16 及 17 節の研究及び數字的結果を概観すれば、單桁と考へられる鐵道橋にあつては—此場合のみを吟味する—動荷重の動力學的作用の影響は先づ第一に支間に關係し、この影響は支間増大すると共に減少する事を疑ひもなく認めるに至る。この減少の法則は其都度計算された數字から容易に導かれる。此數字は一定の交通機關を有する橋梁の一定の群にのみ限られてゐる事は明白である。支線の橋梁又は街路橋を考へるが如き他の基礎假定によれば同様に導いた影響係數は多少異なる。同様に吊橋に對しては桁橋に對すると全く異つた増大係數が問題となる。¹⁾ 前述の目的は一方に於ては純理論的考察の助けにより靜荷重の假定により達したる應力値の増大を數學的に決定する方法を示すにあり、又一方には一部は支間に應じ變化する應力數に、一部は通例の衝擊公式に現はれる現今通常の衝擊係數を批判的に吟味し得る根據を得るにある。

前節に $100 \frac{\Delta y}{y_s}$ により示せる附加は橋梁主桁の撓度に及ぼす動力學的影響による靜止荷重の靜力學的作用の増大の百分率を示す。大體に於て應力が撓度に比例する—例へば轉動荷重の動力學的作用に對しては充分正確に合つてゐる事を 14 に證明した—と假定すれば、増大係數 $100 \frac{\Delta y}{y_s}$ は又應力増大の靜力學的應力の百分率を示し、而も應力増大の方が問題である。實際の附加値の算定にあたり最不利の假定がなされる事、就中各種の橋梁車道もこの種の彈性體であるが如何なる状態に於ても交通機關の動力學的作用を弱める彈性中間物の影響が顧慮されて居ないらしいのは確かである。それ故計算された數値 $\frac{\Delta y}{y_s}$ は實際生ずる増大が超過しない上限とみられる。精確な理論に基く評價が漸く見出し得る車道の不平面や車輪の不完全圓による衝擊の如き影響を總括して評價し、小橋にあつてはその他の動力學的附加を約 20% と假定しよう。150 m の時はこの値 $\frac{\Delta y_4}{y_s}$ はその約半分即ち 10% である。それ故次の如くまとめられる。但し百分率とす。

$$100 \frac{\Delta y_4}{y_s} = 18 - \frac{l}{16}$$

上に計算した増大數値 $\frac{\Delta y_1}{y_s}$, $\frac{\Delta y_2}{y_s}$, $\frac{\Delta y_3}{y_s}$, $\frac{\Delta y_4}{y_s}$ 及 $\frac{\Delta M}{M}$ の總計

1) 44 頁の脚註 2 に示せる論文に Lebert は吊橋の動力學に就き詳細に論じた。

$$\varphi = \left(\frac{\Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4}{y_s} + \frac{\Delta M}{M} \right)$$

を作れば φ は通常活荷重の百分率にて與へられる所謂衝撃附加を示す。それ故静止してゐると考へた荷重の作用 W_s に係數 $(1 + \varphi)$ を乗ずれば、運動する荷重の全作用 W を得る。即ち次式の如し。

$$W = (1 + \varphi) W_s$$

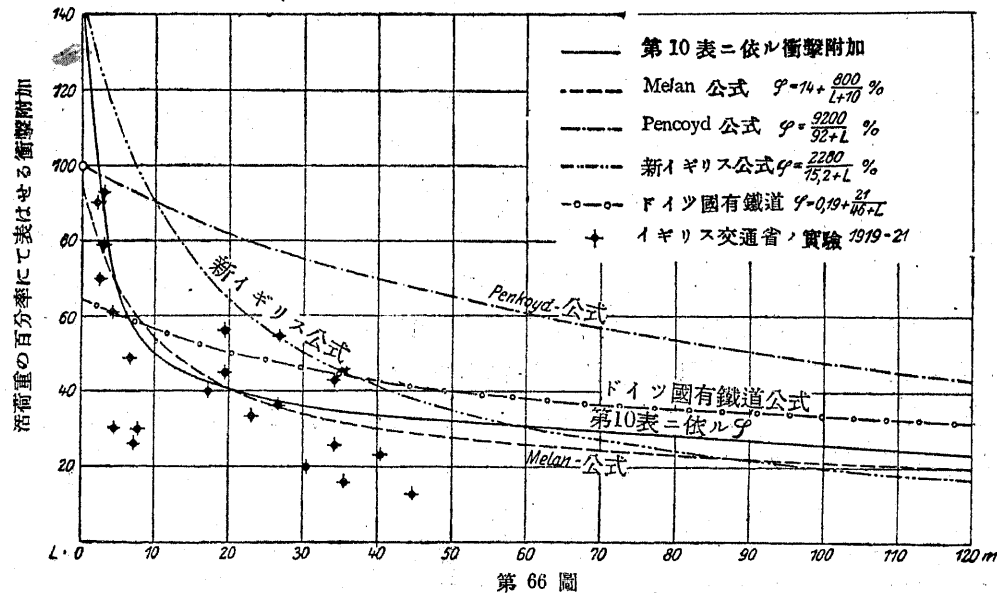
但し φ は支間の函數である。 $(1 + \varphi)$ を動力學的係數又は衝撃係數と云ふ。第10表に色々の支間に對する衝撃係數及びその下に前節に計算した部分附加を總括したその衝撃附加の活荷重に對する百分率を示す。

第10表 種々の支間に對する鐵道橋の衝撃係數

l(m)	2	4	6	10	15	20	25	50	100	150
衝撃係數 (1+φ)	2.00	1.73	1.61	1.48	1.44	1.41	1.37	1.32	1.26	1.20
衝撃附加 100φ	100	73	61	48	44	41	37	32	26	20

道路橋では φ は此の表の半分とするのが望ましい。

なほよく理解するために第66圖に φ の線を示す。初めの範圍では急激に降下してゐる事が目立つ。同様に理論的考察に基き決定された鐵道橋に對する Melan の公式は相似の線を示してゐる。イギリスの鐵道橋に於ける數多くの新實驗に基いた公式は支間約 60m 以内では常に大きい φ の値を示してゐる。支間小なる範圍では同様に急激な減少を示してゐる。¹⁾ この公式の根據となつた實驗結果の一部は第66圖にしるされてゐる。



第66圖

非連続横床を有する橋梁にて、實驗報告から推量出来る限り比較計量が主桁に對し行はれた實

1) 45 頁の脚註 6 文獻參照

驗結果である。何故ならば例へば横桁に於ける計量は實驗報告に於けるが如く無雜作に主桁の支間と關係附けられないから。更に新イギリス公式を示す線の上にある實驗結果が除外された。委員會はそれをこの衝撃公式に於て顧慮せず又その線は事實上計量した衝撃の上限と見られ得るから、この實驗を行つた委員會も亦この結果に異論のない譯でない。見た所隠れた副作用例へば二次應力の結果を取除く實驗が少しも行はれず、理論的討究と無關係に桁に對し計量された静止荷重及び運動荷重の應力比を動力學係數と考へたからイギリスの實驗結果に基いて衝撃問題の決定的批判をなす事は不可能である。

1922 年のドイツ國有鐵道規定は同様に衝撃附加を規定してゐる。第66圖により明かな如く徑間小なる場合の附加の小なる事は奇妙である。この衝撃係數が如何なる方法によるかは明らかでない。

19. 結構の固有振動

結構に於て部材の慣性質量は半分づゝその部材の兩端にある、それ故結構格點に集中し部材自身は質量がないと考へると、この結構はその間に格點に働く外力と共に部材應力が内力として働く質點の振動系を形造る。若し格點に働く荷重を慣性質量と考へるならば、その格點に於て其處に合する部材の半分の質量に格點荷重が加はるとしても同じ事である。彈性部材を有する實際の結構は無限の自由度を有するが、上述の結構に止め、不靜定の支點反力の數を s とすれば、上述の質點結構は n 格點の時 $2n-3-s$ の自由度を有する系となる。結構に於ける冗材の有無は此處に關係がない。

振動してゐる結構の質點のなす運動は本質的に 2 種類ある。箇々の部材片は部材軸を弦軸とし縦振動及横振動をなし、又部材は全體として變化する。その振幅が格點變位に比し極く小さい縦振動及横振動は躊躇なく省略出來、或程度固有の結構振動を行ふ小振動を示す。部材變位は又平行變位及回轉とに分かれる。格間數の多い結構に於ては部材の多くは回轉角が小で、この運動の運動エネルギーは省略出來る。 μ を 1 部材の質量、 y_s を垂直方向の部材重心の變位、 v を同方向の格點質量 m の變位、 g を重力加速度、 L は系の運動エネルギーとすれば、結構のエネルギー方程式は

$$\sum \mu g y_s + \sum m g v + \frac{1}{2} \sum S \Delta s = L$$

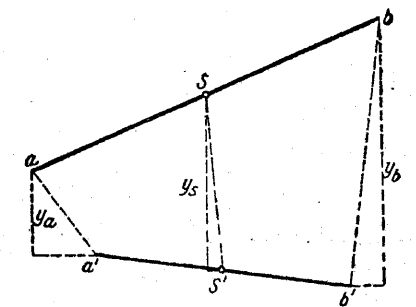
となる。 $y_s = \frac{y_a + y_b}{2}$ (第67圖參照) から

$$\sum \frac{\mu}{2} g \cdot \frac{y_a + y_b}{2} + \sum m g v + \frac{1}{2} \sum S \Delta s = L$$

となる。 y_a と y_b は格點變位であるから、はじめ二つの總和を縮めて

$$\sum M g y + \frac{1}{2} \sum S \Delta s = L$$

となる。但し $M = \mu + \sum \frac{\mu}{2}$ は格點に集まる部材(數 ρ)



第67圖

・半分の質量を増した格點質量である。其故結構の運動のエネルギーは各瞬間に第一次近似に於て上述の

質点系の運動エネルギーに等しい。夫故兩系は動力學的に略等しい。

夫故自由結構振動(固有振動)の問題は重力が外力として働き又簡単な中心力—部材連結の弾性力—がその間に働く質量 m_1, m_2, \dots を有する質点系の運動方程式を解く事にある。

此の問題は厳密に解きうる。

符號を

S_{hk}^0 を格点荷重の作用による静力學的平衡状態に對する部材 $h-k$ の部材應力、

S_{hk} を振動により生ずる部材應力、

α_{hk} を部材方向が水平にとつた x -軸となす角、

m_k を格点 k の質量、

x_k 及 y_k を k -格点の x -軸並に y -軸の方向の變位、

とすれば、各格点に對し次の2運動方程式が成り立つ(第68圖)

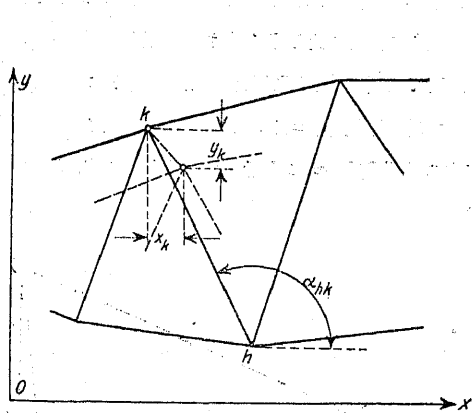
$$\left. \begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= - \sum_h (S_{hk}^0 + S_{hk}) \cos \alpha_{hk} = 0, \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= m_k g - \sum_h (S_{hk}^0 + S_{hk}) \sin \alpha_{hk} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

總計は格点 k に集る部材全部に行ふ。總計項の部材應力 S は變位 x 及 y により表はす事が出来る。

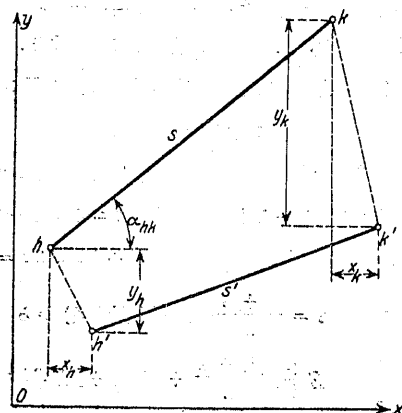
$h-k$ は元の位置と長さを有する部材とし、 $h'-k'$ はある變位で回轉をした部材とすれば、

第69圖により

$$S' = \sqrt{(s \cos \alpha + x_k - x_h)^2 + (s \sin \alpha + y_k - y_h)^2}$$



第68圖



第69圖

の關係が容易に得られ、又二乗の計算をし小さい項 $(x_k - x_h)^2$ 及 $(y_k - y_h)^2$ を省略すれば

$$s' = \sqrt{s^2 + 2s \cos \alpha (x_k - x_h) + 2s \sin \alpha (y_k - y_h)}$$

が得られる。二次微量の項は除外出来るから、二項定理により根を展開すれば、部材長の變化 Δs は

$$\Delta s = s - s' = (x_k - x_h) \cos \alpha + (y_k - y_h) \sin \alpha$$

の形となる、それ故振動變位 x 及び y の屬する部材應力 S_{hk} に對し方程式

$$S_{hk} = \frac{E F_{hk}}{s_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \dots \dots \dots (30)$$

を得る。

方程式(29)及び(30)から格点 k の運動方程式を得る。即ち

$$\left. \begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= - \sum_h S_{hk}^0 \cos \alpha_{hk} - \sum_h \frac{E F_{hk}}{s_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \cos \alpha_{hk}, \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= m_k g - \sum_h S_{hk}^0 \sin \alpha_{hk} - \sum_h \frac{E F_{hk}}{s_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \sin \alpha_{hk}, \end{aligned} \right\}$$

さて次の二つの關係は格点 k に對する静力學的平衡條件を示したに外ならないが

$$\sum S_{hk}^0 \cos \alpha_{hk} = 0 \quad \text{又} \quad m_k g - \sum S_{hk}^0 \sin \alpha_{hk} = 0$$

であるから、運動方程式は更に簡単になる。即ち

$$\left. \begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= - \sum_h \frac{E F_{hk}}{s_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \cos \alpha_{hk}, \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= - \sum_h \frac{E F_{hk}}{s_{hk}} [(x_k - x_h) \cos \alpha_{hk} + (y_k - y_h) \sin \alpha_{hk}] \sin \alpha_{hk}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

一般に支點を除いた總ての格点に對して同じ2方程式が成り立つ。固定支點に對しては $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 及 $\frac{d^2 y}{dt^2}$ が零になるから2微分方程式はなくなり、水平軌道を有する可動支點は $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ であるから、一方程式はなくなる。軌道の傾斜せる時は、 φ を x 軸に對する傾斜角とすれば、加速度の間に

$$\frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{tg } \varphi$$

の關係がある。

N をこの系の自由度とすれば、 N 方程式からなる聯立方程式(31)は特殊積分

$$x_k = u_k \sin(\rho t + \varphi) \quad \text{及} \quad y_k = v_k \sin(\rho t + \varphi)$$

により満足される。(31)による N 方程式に代入して振幅 u_k 及 v_k 並に振動數 ρ が決定される。即ち

$$\left. \begin{aligned} P_k u_k \frac{\rho^2}{E g} &= \sum_h \frac{F_{hk}}{s_{hk}} [(u_k - u_h) \cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h) \sin \alpha_{hk}] \cos \alpha_{hk} = 0, \\ P_k v_k \frac{\rho^2}{E g} &= \sum_h \frac{F_{hk}}{s_{hk}} [(u_k - u_h) \cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h) \sin \alpha_{hk}] \sin \alpha_{hk} = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

但し弾性係數 E で割つた格点質量 m_k は格点重量 P_k で表はされる。一次聯立方程式系(32)は未知數 u 及び v に對し同形であるから、分母行列式 Δ が零であれば、 u 及び v の有限の根が存在する。この條件 $\Delta = 0$ により P^2 に對し N 次の方程式を與へ、此の N 根は同數の特解を決定する。併し方程式 $\Delta = 0$ により得られる P の値は量 u 及び v 自身でなく、たゞ

その比が之により決定されるのみである。\$p_r\$ に属する比例係数を \$C_r\$ で示せば、\$r\$ 番の特解は式

$$x_{kr} = C_{kr} u_{kr} \sin(p_r t + q) \text{ 及 } y_{kr} = C_{kr} v_{kr} \sin(p_r t + q)$$

となる。それ故一般解は

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \sum_{r=1}^N C_{kr} u_{kr} \sin(p_r t + q), \\ y_k &= \sum_{r=1}^N C_{kr} v_{kr} \sin(p_r t + q), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

となる。

故に此の運動は \$N\$ なる主振動から成り立ち、常数 \$C\$ は開始条件により決定される。然し只振動数のみが重要なのであるから、更に此の解を論議する事はしない。

併し格点数 \$n\$ の多い時は行列式の計算は實際上不可能であるから、\$N\$ 箇の \$p\$ を行列式 \$A\$ から計算する事は形式的の解を與へるのみである。方程式系 (32) を逐次近似法により解く考へは尤もな事である。Pohlhausen¹⁾ は此の方法に成功した。此處に聯立方程式 (32) から \$p^2\$ を決定するのに彼により與へられた近似方法を用ひよう。

$$\frac{1 \cdot F_{hk}}{s_{hk}} [(u_k - u_h) \cos a_{hk} + (v_k - v_h) \sin a_{hk}] = \mathcal{E}_{hk}$$

とおけば、式 (32) の右側は式 (30) を顧慮すれば、部材應力の合計の形で書かれる。チメンションを一致させるため左側に弾性係数 1 を乗する。すると \$\lambda^2 = \frac{p^2}{Eg}\$ として

$$P_k u_k \lambda^2 = \sum_h \mathcal{E}_{hk} \cos a_{hk} \text{ 及 } P_k v_k \lambda^2 = \sum_h \mathcal{E}_{hk} \sin a_{hk} \dots \dots \dots (34)$$

の形の方程式を得る。式 (34) の總體は水平格点荷重 \$Pu\lambda^2\$ 及垂直格点荷重 \$Pv\lambda^2\$ を受けた時の與へられた結構の静力學的平衡条件を示す。

さて變位 \$u\$ 及 \$v\$ の任意の可能な系を擇び、之により \$\lambda^2 = 1\$ と假定して格点荷重 \$Pu\lambda^2\$ 及 \$Pv\lambda^2\$ を決定すれば、應力图によりこの格点荷重による應力 \$\mathcal{E}\$ が決定され (第一近似値として \$\mathcal{E}'\$ で示さう) Williot の變位圖により所屬の變位 \$u'\$ 及 \$v'\$ を決定し、この變位から Pohlhausen は

$$\lambda'^2 = \frac{1}{\sqrt{\Sigma(Pu')^2 + \Sigma(Pv')^2}}$$

の關係により第一近似値 \$\lambda'^2\$ を決定した。但し總計は全結構格点につき行はねばならない。

再びこの値 \$\lambda'^2\$ を以て格点荷重 \$Pu'\lambda'^2\$ 及 \$Pv'\lambda'^2\$ を計算し、應力图及變位圖を畫き、變位 \$u''\$, \$v''\$ 及新近似値

$$\lambda''^2 = \frac{1}{\sqrt{\Sigma(Pu'')^2 + \Sigma(Pv'')^2}}$$

を得る。この收斂は非常に著しいから、この方法は非常に早く極限に達する。第 3 の變位圖又は屢々第 2 の變位圖さへも通常實際上眞の値と殆ど異ならぬ \$\lambda\$ の値を示す。

この方法により得た \$\lambda\$ は \$N\$ 箇の起り得る値のうち最大のもので基本振動に相當する。同様の方法により \$\lambda\$ の他の値も決定されるが、柱状態の研究により知つた様に大した意味はない。

1) 45 頁の脚註 2 に示した文献参照。

この圖式近似法は又振動數と同時に變位及部材應力(勿論不定の係數を乗じた)を與へる利益を有する。

\$\lambda\$ から振動周期は

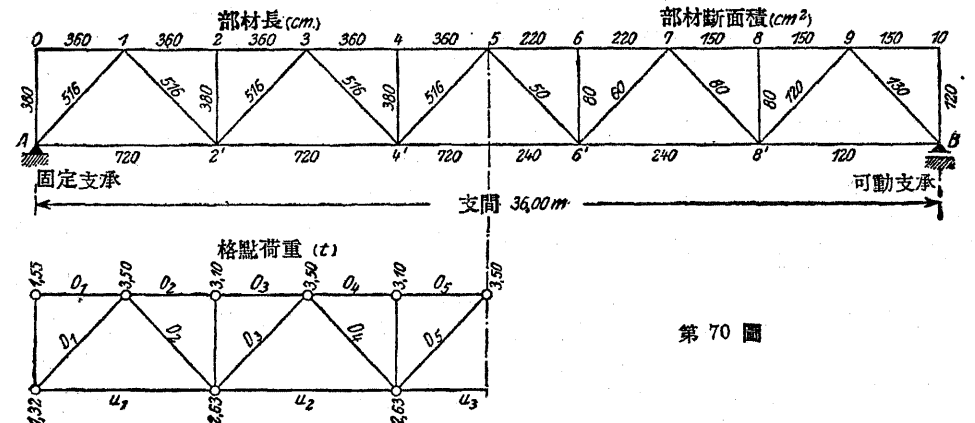
$$T = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{Eg}}$$

となる。又 1 秒間の振動數は

$$\nu_1 = \frac{\lambda\sqrt{Eg}}{2\pi} \dots \dots \dots (35)$$

となる。此處に述べた近似方法は更に簡單に出来るが、豫め一例に就いて説明しよう。

例：直弦橋主桁を有する鐵道橋に對し最大固有振動數を決定せよ。上路橋とす。第 70 圖に部材長を cm, 部材斷面を cm², 又不載荷橋梁の格点重量 \$P\$ を kg にて示す。下弦格点に於ては重量は單に集まる部材の半分の重量に對傾構及橫構が加はり、上弦格点に於ては尙各格点に車道による格点荷重を考慮する。橋梁斷面決定はプロシヤ規定の荷重列車 A の荷重によつた。全計算は 72 乃至 74 頁に表にして示した。先づ橋梁中



第 70 圖

心に格点荷重 1 を有する場合に對し變位 \$u'\$ 及び \$v'\$ が決定され 72 頁の第 I 表に示す(その應力图及變位圖は示してない)。\$v\$ 軸の正の方向即ち上方への變位、\$u\$ 軸の正の方向即ち右方への變位を正と考へる。この表は更に積 \$Pu'\$ 及 \$Pv'\$ 並にこの積の二乗を示す

$$\Sigma(Pu')^2 + \Sigma(Pv')^2$$

から第一近似値 \$\lambda' = 0,0369\$ が計算される。第 I 表の終りの 2 列は \$\lambda'\$ により決定された新格点荷重を示す。この格点荷重 \$\lambda'^2 Pu'\$ 及 \$\lambda'^2 Pv'\$ により第 71 圖の應力图 I を畫き、その部材伸長(第 72 圖の部材網を参照)に基き新變位 \$u''\$ 及 \$v''\$ を第 73 圖の變位圖 I により決定する。この格点變位 \$u''\$ 及 \$v''\$ は更に 73 頁第 II 表に示され、前の如く積及和を作り第二近似値 \$\lambda'' = 0,0223\$ を得る。この表の最後の二列は第三近似値の基礎となる格点荷重を示し; これにより第 74 圖の應力图 II 及第 76 圖の變位圖 II を畫く。更に 74 頁の第 III 表に計 \$\Sigma(Pu''')^2\$ 及 \$\Sigma(Pv''')^2\$ を計算し、第三近似値 \$\lambda''' = 0,0219\$ を得る。\$\lambda'''\$ は \$\lambda'\$ と極く少しか違はないから、近似計算は此處に中止する。\$E = 2150 \text{ t/cm}^2\$ 及 \$g = 981 \text{ cm/秒}^2\$ として \$\lambda'''\$ から 1 秒間の振動數、式 (35) が得られる。即ち

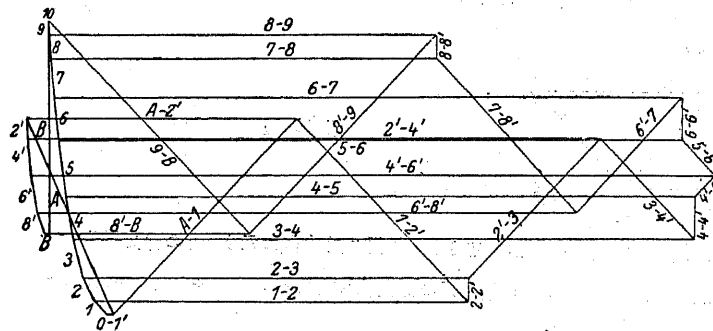
$$\nu_1 = \frac{0,0219\sqrt{2150 \cdot 981}}{2\pi} = 5,07.$$

第 I 表 近似値 λ' の算定

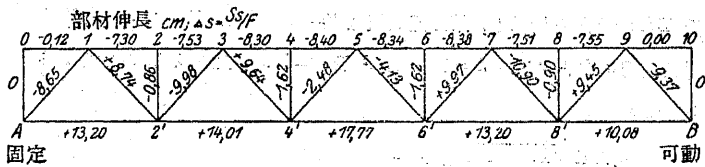
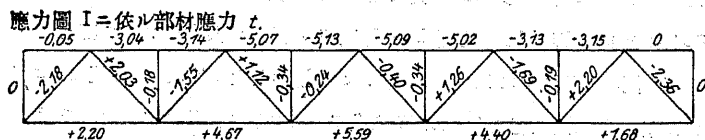
點	P t	v'		Pv'	Pu'	10 ⁻² (Pv') ²	10 ⁻² (Pu') ²	$\lambda'^2(Pv')$	$\lambda'^2(Pu')$
		cm	cm						
A	1,32	0	0	0	0	0	0	0	0
2'	2,63	-46	+3	-121	+8	146	1	-0,165	+0,011
4'	2,63	-83	+7	-218	+18	475	3	-0,297	+0,025
6'	2,63	-83	+14	-218	+37	475	14	-0,297	+0,050
8'	2,63	-46	+18	-121	+47	146	22	-0,165	+0,064
B	1,32	0	+21	0	+28	0	8	0	+0,038
0	1,55	0	+22	0	+34	0	12	0	+0,046
1	3,50	-24	+22	-84	+77	71	59	-0,114	+0,105
2	3,10	-44	+20	-136	+62	185	38	-0,185	+0,084
3	3,50	-65	+17	-228	+60	520	36	-0,311	+0,082
4	3,10	-80	+14	-248	+43	615	18	-0,338	+0,059
5	3,50	-96	+11	-336	+39	1129	15	-0,458	+0,053
6	3,10	-80	+8	-248	+25	615	6	-0,338	+0,034
7	3,50	-65	+5	-228	+18	520	3	-0,311	+0,025
8	3,10	-44	+3	-136	+9	185	1	-0,185	+0,012
9	3,50	-24	0	-84	0	71	0	-0,114	0,000
10	1,55	0	-1	0	-2	9	0	0	-0,003
						5153	236		

$\Sigma(Pu')^2 + \Sigma(Pv')^2 = 5389, \quad \lambda'^2 = \frac{1}{\sqrt{5389}} = 0,136 \cdot 10^{-2}, \quad \lambda' = 0,0369.$

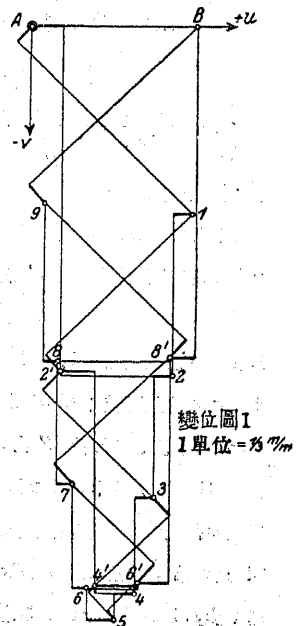
應力圖 I: $1t = \frac{1}{3} \text{ cm}$



第 71 圖



第 72 圖



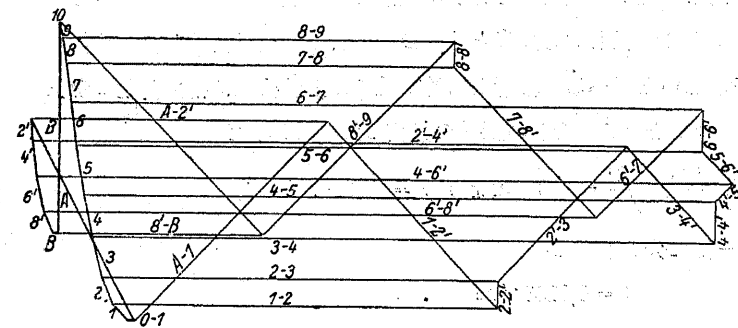
第 73 圖

第 II 表 第二近似値 λ'' の算定

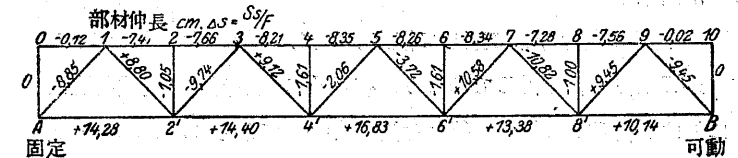
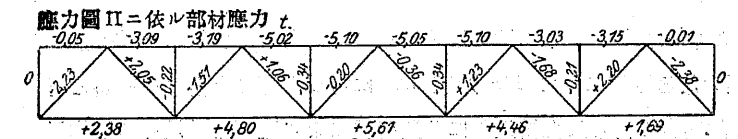
點	P t	v''		Pv''	Pu''	10 ⁻² (Pv'') ²	10 ⁻² (Pu'') ²	$\lambda''^2(Pv'')$	$\lambda''^2(Pu'')$
		cm	cm						
A	1,32	0	0	0	0	0	0	0	0
2'	2,63	-136	+13	-358	+34	1282	12	-0,178	+0,017
4'	2,63	-220	+27	-579	+71	3352	50	-0,287	+0,035
6'	2,63	-218	+45	-573	+118	3283	139	-0,284	+0,059
8'	2,63	-132	+58	-347	+153	1204	234	-0,172	+0,076
B	1,32	0	+68	0	+90	0	81	0	+0,045
0	1,55	0	+66	0	+102	0	104	0	+0,051
1	3,50	-75	+68	-263	+238	692	566	-0,130	+0,118
2	3,10	-139	+58	-431	+180	1858	324	-0,214	+0,089
3	3,50	-186	+50	-651	+175	4238	306	-0,323	+0,087
4	3,10	-222	+45	-688	+140	4733	196	-0,341	+0,069
5	3,50	-234	+37	-819	+130	6708	169	-0,406	+0,064
6	3,10	-221	+28	-685	+87	4692	76	-0,340	+0,043
7	3,50	-180	+23	-630	+81	3969	66	-0,312	+0,040
8	3,10	-133	+16	-412	+30	1697	25	-0,204	+0,025
9	3,50	-70	+9	-245	+32	600	10	-0,123	+0,016
10	1,55	0	+9	0	+14	0	2	0	+0,007
						33308	2300		

$\Sigma(Pu'')^2 + \Sigma(Pv'')^2 = 40663, \quad \lambda''^2 = \frac{1}{\sqrt{40663}} = 0,496 \cdot 10^{-3}, \quad \lambda'' = 0,0223.$

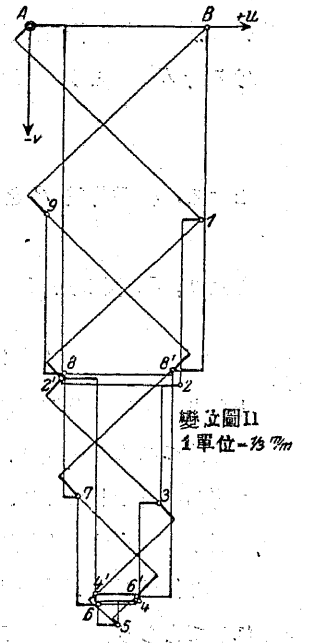
應力圖 II: $1t = \frac{1}{5} \text{ cm}$



第 74 圖



第 75 圖



第 76 圖

第 III 表 第三近似値の決定

點	P t	u''' cm		Pu'''	Pu'''	10 ⁻² (Pu''') ²	10 ⁻² (Pu''') ²
		u'''	u'''				
A	1,32	0	0	0	0	0	0
2'	2,63	-142	+14	-373	+37	1391	14
4'	2,63	-223	+29	-600	+76	3600	58
6'	2,63	-227	+46	-597	+121	3564	146
8'	2,63	-136	+59	-358	+155	1282	240
B	1,32	0	+69	0	+91	0	83
0	1,55	0	+68	0	+105	0	110
1	3,50	-78	+68	-273	+238	745	566
2	3,10	-143	+63	-443	+195	1962	380
3	3,50	-190	+55	-665	+193	4422	372
4	3,10	-230	+47	-713	+146	5034	213
5	3,50	-240	+39	-840	+137	7056	183
6	3,10	-231	+30	-716	+93	5127	86
7	3,50	-188	+23	-658	+81	4330	66
8	3,10	-138	+14	-428	+43	1832	19
9	1,50	-75	+7	-263	+25	692	6
10	1,55	0	+7	0	+11	0	1
						41087	2548

$$\Sigma (Pu''')^2 + \Sigma (Pu''')^2 = 43635, \quad \lambda''^2 = \frac{1}{43635} = 0,479 \cdot 10^{-5}, \quad \lambda''' = 0,0219$$

前例の振動数と、結構桁と同じ剛度の不變断面を有する鋼桁と置き換へたと考へた時得られる振動数と比較するのも一興である。但し同じ剛度とは前の様に等分布満載荷重による橋梁中央の撓度が結構桁と鋼桁とで等しいと考へる。結構桁に於て總ての上弦格點に格點荷重 1 を受ける時 $E=1$ とすれば $\delta=520$ cm となる。それ故同値の鋼桁の慣性能率 J は

$$\frac{5}{384} \frac{10 \cdot 3600^3}{1 \cdot J} = 520 \quad \text{により} \quad J = 1168 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

となる。格點荷重 P を桁に一樣に分布すれば

$$p = 0,0138 \text{ t/cm}$$

となり、50 頁の式 (12') により

$$\nu_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EJg}{p}} = \frac{\pi}{2 \cdot 3600} \sqrt{\frac{2150 \cdot 1168 \cdot 10^4 \cdot 981}{0,0138}} = 5,12$$

となり、上に得た値 5.07 とよく一致する。この結果は重大な意義がある。主桁が直弦結構と酷く違つてゐない限り、支間大なる橋梁に於て 13 乃至 17 に行つた様に主桁を柱状體と考へ得る事を示してゐる。其れ故其處で得られた結果殊に轉動荷重による強制振動及其副作用に對する斷定は全く信用する事が出来る。

若し第 I 表の基礎となる變位を實際の質量分布に應じて假定すれば、もつと早い收斂が得られるであらう、即ちその方法を第二近似で留め得るであらう。格點 5 の集中荷重の變位を決定する代りに、總ての下弦格點に於ける荷重 1 に對する變位を決定し得るであらう。これにより $\lambda' = 0,0213$ 及 $\lambda'' = 0,0218$ を得るに充分であらう。最初の假定が可成り不合理である場合にも、

この方法の適してゐる事は證明を要しない。

第 I 表、第 II 表及第 III 表の計 $\Sigma (Pu)^2$ 及 $\Sigma (Pv)^2$ を比較すれば、格間多き結構に於ては次々の λ の近似値に及ぼす水平變位の影響は非常に少ない。即ち

$$\text{水平變位を考慮したる場合} \dots \lambda' = 0,0369, \quad \lambda'' = 0,0223, \quad \lambda''' = 0,0219,$$

$$\text{水平變位を省略したる場合} \dots \lambda' = 0,0372, \quad \lambda'' = 0,0226, \quad \lambda''' = 0,0222.$$

その差は 1.5% より少であるから、實際上問題にならない。其れ故垂直變位が決定すれば足り、之は既知の方法による彎曲線に依り示される。之がため仕事は著るしく簡單になる。對稱の死荷重を持つた對稱の結構に於ては、全計算を單に結構の半分に行き行へばよいから、更に簡單になる。通常垂直材のある結構に於ては全質量が載荷弦の格點に集中されてゐると考へれば充分である。例へば拱桁の如き撓度に及ぼす腹材の長さの變化の影響が少い結構系に於いても、振動数を決定する時この影響を省略する事が出来る。

λ の算定にあたり變位 u を省略出来る事は、不靜定系の動力學的研究を非常に容易ならしめる。垂直荷重に對する不靜定値の影響線が解れば、 λ の計算は靜定系に於けると同じ方法で行ひ得る。その影響線により、格點荷重 $\lambda^2 P v$ に對する不靜定支點反力又は部材應力を決定すれば、靜定系に於けるが如く正確に荷重 $\lambda^2 P v$ の應力圖及 Williot の變位圖を畫き得る。又は全變形に對する腹材の影響を省略し得る場合は、彈性荷重の方法により簡單に弦の彎曲線を決定し、之から變位 v を讀む事が出来る。

説明の爲めに支間 60,72 m にして主桁は繫拱からなる道路橋の緩かな固有振動を、水平變位 u 及腹材の變形を省略し、彈性荷重の方法に依つて計算しよう。

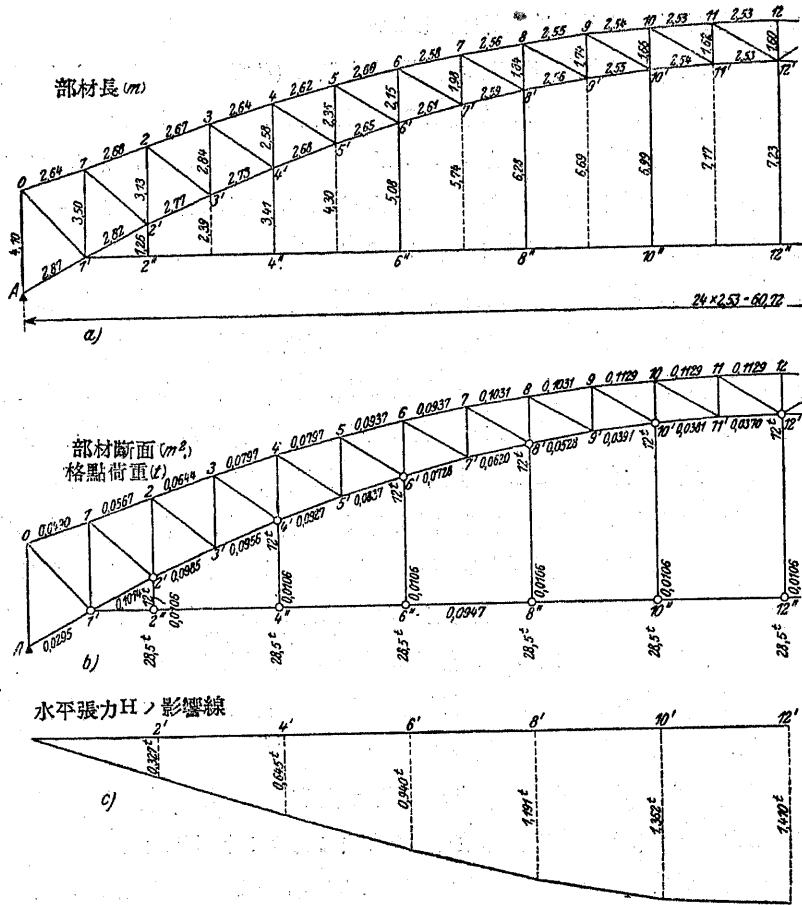
例：主桁の断面は第 77 圖 a 及 b により知られ度い。一次不靜定系の繫材の水平張力 H の影響線は第 77 圖 c に示されてゐる。調べれば解るが自重は全支間に可成り一樣に分布してゐるから總ての格點荷重は同一とする。表をその範圍に限る爲めに結構拱の重量及吊材の重量の半分は上弦格點 2', 4', 6', ... に集中し、吊材の残りの半分、繫材の重量及車道の重量が車道の吊架點 (横桁間隔 5,06 m) 2'', 4'', 6'', ... に集中するといふ様に假定がなほ簡單にされた。第 77 圖 b に假定の質量分布が小圓により示され、又格點荷重も kg でのされてゐる。

先づ點 2'', 4'', 6'', ... に任意に假定した荷重即ち 1t が架かる時の、慣性質量が占めてゐると考へられる點即ち點 2', 4', 6', ... 及 2'', 4'', 6'', ... の垂直變位 v' を決定する。之は影響線 (第 77 圖 c) により假定の荷重に對する水平張力 H を決定したる後、 \mathfrak{M} を桁彎曲率とする時、式 $M = \mathfrak{M} - Hg$ によつて格點彎曲率 M_k' 及 M_k'' を決定する事により行はれる。77 頁の第 I 表にこの彎曲率を示す。腹材の影響を無視し、式

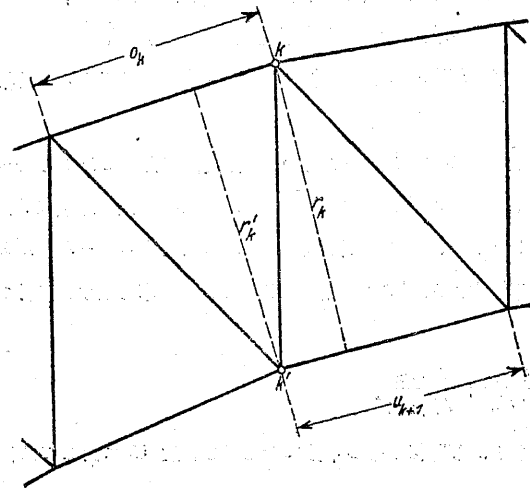
$$w_k = \frac{M_k' o_k}{F_k^0 r_k^2} + \frac{M_k'' u_k}{F_{k+1}^0 r_k^2}$$

によつて彈性荷重の算定を同表に行ふ。對稱であるから計算は桁の半分に行ひ、點 12 に對しては格點荷重の半分即ち

$w_{12} = \frac{M'_{12} \cdot 0.12}{\sqrt{I'_{12} \cdot 12}}$
 を 77 頁の第 I 表に入れる。荷重 w によつて、學者に廣く知られてゐる方法により點 1, 2, 3, ... に荷重 w を受けた桁の彎曲率として拱の下弦の彎曲線の縦距が計算される。之により變位 v' の第一の列が知られる。繫材格點 2'', 4'', ... の撓度の決定にあつては格點荷重による吊材の伸長を考慮する。總てに E は 1 とする。



第 77 圖



第 78 圖

77 頁の第 II 表に前例と同様に行つた第一近似値 λ' の算定を示す。
 第 II 表の最後の列に示した量 $\lambda'^2(Pv')$ は第二近似値の基礎となる。點 2'', 4'', 6'', ... に於ける荷重 1 の代りに格點 2', 4', 6' ... 及 2'', 4'', 6'', ... に於ける荷重 $\lambda'^2(Pv')$ が入る。他は垂直變位 v'' の算定方法は全く前と同様である。78 頁の第 III 表には第二近似値 λ'' の算定を示す。結局この表に計算した $\lambda'^2(Pv'')$ の値を第三近似方法の基礎とすれば、 λ'' と最早極く少ししか違はない値 λ''' が得られ (第 IV 表), 此處で仕事を中止し得る。

λ の逐次の値は

$$\lambda' = 0,925 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda'' = 1,382 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda''' = 1,370 \cdot 10^{-3}$$

となり。之から $E = 2150 \cdot 10^4 \text{ t/m}^2$ 及 $g = 9,81 \text{ m/秒}^2$ とし、振動数は

$$v_1 = \frac{0,00137 \sqrt{9,81 \cdot 2150 \cdot 10^4}}{2\pi} = 3,17$$

となる。

第 I 表 2'', 4'', 6'', ... に於ける荷重 1 に対する弾性荷重の計算

格點	M' mt	M mt	r' m	$\frac{o}{F \cdot 0, r'^2}$	r' m	$\frac{u}{F \cdot u, r'^2}$	$\frac{M' u_0}{F \cdot 0, r'^2}$	$\frac{M' u_{12}}{F \cdot u, r'^2}$	w
A	0	0	—	—	3,53	7,81	0	0	0
1	+13,92	+13,92	3,35	4,80	3,14	2,82	+ 66,82	+39,25	+106,07
2	+14,80	-17,56	2,95	5,30	2,86	3,36	+ 78,44	-59,00	+ 19,44
3	+14,50	-14,87	2,59	5,73	2,64	4,10	+ 83,09	-60,97	+ 22,12
4	+15,34	-11,34	2,47	5,43	2,43	4,90	+ 83,30	-55,57	+ 27,73
5	+15,00	-9,30	2,27	6,38	2,25	6,25	+ 95,70	-53,12	+ 37,58
6	+15,78	-6,25	2,10	6,29	2,08	8,28	+ 99,26	-51,75	+ 47,51
7	+15,29	-5,28	1,95	7,22	1,94	11,00	+110,39	-53,08	+ 52,31
8	+16,02	-3,00	1,82	7,50	1,82	14,63	+120,15	-43,99	+ 76,16
9	+15,59	-2,41	1,73	8,26	1,73	21,79	+128,77	-52,51	+ 76,26
10	+16,22	-0,94	1,66	8,16	1,66	24,19	+132,36	-22,74	+109,62
11	+15,62	-1,13	1,61	8,64	1,62	26,05	+134,96	-29,44	+105,52
12	+16,28	—	1,60	8,75	—	—	+142,45	—	+142,45

第 II 表 第一近似値 λ' の算定

格點	P t	$10^{-2} \cdot v'$ m	$10^{-2} P v'$	$10^{-6} (P v')^2$	$\lambda'^2 (P v')$
A	—	0	—	—	—
2'	12,0	38,9	467	2181	0,040
2''	28,5	40,1	1143	13064	0,098
4'	12,0	74,4	893	7974	0,077
4''	28,5	77,6	2212	48929	0,189
6'	12,0	105,8	1270	16129	0,109
6''	28,5	110,6	3152	99351	0,270
8'	12,0	133,5	1597	25504	0,137
8''	28,5	139,0	3962	156974	0,340
10'	12,0	153,5	1842	33930	0,158
10''	28,5	160,1	4563	203210	0,397
12'	6,0	163,2	979	9584	0,084
12''	14,25	170,0	2423	58685	0,208

680515

點 2'', 4'', 6'' ... に対する v' は點 2', 4', 6', ... に対する v'' に吊材伸長 Δl を添加し決定する。

$$\Sigma (P v')^2 = 2 \cdot 680515 \cdot 10^6 = 1,361 \cdot 10^{12}$$

$$\lambda'^2 = \frac{1}{\sqrt{1,361}} \cdot 10^{-6} = 0,857 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda' = 0,925 \cdot 10^{-3}$$

第 III 表 第二近似値 λ'' の算定

格 點	P t	$10^{-2} \cdot v''$ m	$10^{-2} P v''$	$10^{-6} \cdot (P v'')^2$	$\lambda''^2 (P v'')$
A	—	0	—	—	—
2'	12,0	+15,10	181	328	0,0344
2''	28,5	+15,22	434	1884	0,0828
4'	12,5	+29,78	358	1282	0,0746
4''	28,5	+30,39	866	7500	0,1653
6'	12,0	+45,20	542	2938	0,1036
6''	28,5	+46,50	1325	17556	0,2528
8'	12,0	+60,36	725	5256	0,1384
8''	28,5	+62,38	1778	31613	0,3391
10'	12,0	+72,68	872	7603	0,1665
10''	28,5	+75,30	2146	43053	0,4102
12'	6,0	+78,31	470	2209	0,0897
12''	14,25	+79,73	1136	12905	0,2168

$$\Sigma (P v'') = 2 \cdot 137127 \cdot 10^6 = 0,2743 \cdot 10^{12}$$

$$\lambda''^2 = \frac{1}{\sqrt{0,2743}} 10^{-6} = 1,909 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda'' = 1382 \cdot 10^{-3}$$

137127

第 IV 表 第三近似値 λ''' の算定

格 點	P t	$10^{-2} \cdot v'''$ m	$10^{-2} \cdot (P v''')$	$10^{-6} \cdot (P v''')^2$
A	—	0	—	—
2'	12,0	+14,23	179	320
2''	28,5	+14,25	406	1648
4'	12,0	+29,17	389	1149
4''	28,5	+29,78	849	7208
6'	12,0	+45,11	541	2927
6''	28,5	+46,41	1323	17503
8'	12,0	+61,26	736	5417
8''	28,5	+63,28	1803	32508
10'	12,0	+75,02	900	8100
10''	28,5	+77,62	2212	48921
12'	6,0	+81,04	486	2362
12''	14,25	+82,66	1178	13877

$$\Sigma (P v''') = 2 \cdot 141948 \cdot 10^6 = 0,2839 \cdot 10^{12}$$

$$\lambda'''^2 = \frac{1}{\sqrt{0,2839}} 10^{-6} = 1,877 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda''' = 1,370 \cdot 10^{-3}$$

141948

前述の 2 例は實際の目的に特に適合せる Pohlhausen の近似方法によつて結構の固有振動を決定する事の比較的簡單な例を示してゐる。この方法は任意の結構桁、各種の支承に對して就中各種の質量分布に對して利用し得るのが特に優れたる點である。