

第12章 肋 拱 諸 論

§1. 垂 面 應 力

直線梁の軸に直角なる断面に於て、其の圖心 g を通過する直角座標軸をとり (第12-1 圖)、 y 軸上に N なる推力が作用するものとすれば、断面に作用する垂面應力 (軸應力) は、

$$\sigma = B + C \cdot x + D \cdot y$$

而して、 $N = \int \sigma \cdot dA$; $M = \int \sigma \cdot dA \cdot y$; $\int \sigma \cdot dA \cdot x = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} N &= B \int dA + C \int x \cdot dA + D \int y \cdot dA \\ M &= B \int y \cdot dA + C \int xy \cdot dA + D \int y^2 \cdot dA \\ 0 &= B \int x \cdot dA + C \int x^2 \cdot dA + D \int xy \cdot dA \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \int x dA &= 0; \int y dA = 0; \int dA = A \\ \text{但し、} \int x^2 dA &= I_y; \int y^2 dA = I_x \\ \int xy dA &= I_{x \cdot y} \end{aligned}$$

依つて、

$$N = B \cdot A$$

$$M = C \cdot I_{x \cdot y} + D \cdot I_x$$

$$0 = C \cdot I_y + D \cdot I_{x \cdot y}$$

之から、定値 B, C, D を解いて σ の式に代入すれば、

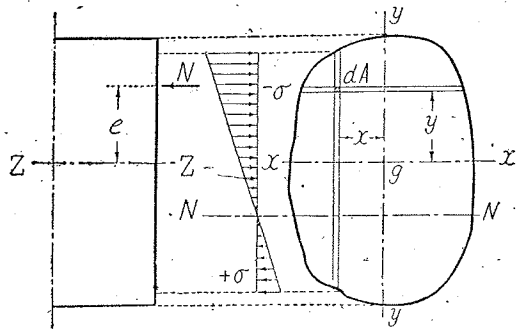
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M(I_y \cdot y - I_{x \cdot y} \cdot x)}{I_x \cdot I_y - I_{x \cdot y}^2} \quad \dots (12-1)$$

x, y 軸が主軸なるときは慣性相乗モーメント $I_{x \cdot y}$ が零であつて、

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M \cdot y}{I_x} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W_x}; \quad \frac{I_x}{y} = W_x \quad \dots (12-2)$$

N が断面上の任意點に作用する時は、

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y} \quad \dots (12-3)$$



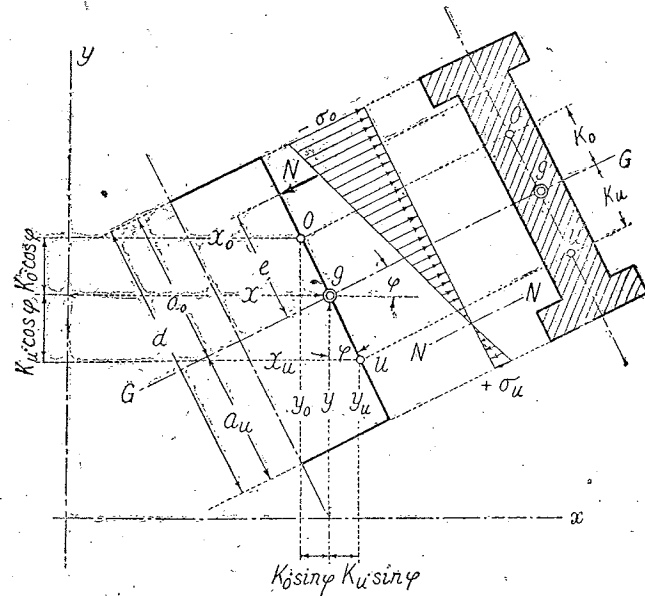
第 12-1 圖

第 12-2 圖の拱肋に於て推力 N は断面の主軸に作用するが、その作用點は重心 g から e だけ離れてゐるものとすれば、此の断面には、重心に N なる推力が作用すると共に

$M=N \cdot e$ なる曲げモーメントが作用するものと考へる事が出来る。 r を $G-G$ 軸の回轉半徑とすれば、 $I_g=A \cdot r^2$ であるから (第12-2圖),

$$\sigma_o = -\frac{N}{A} - \frac{M}{I_g} a_o = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{r^2} \cdot a_o\right)$$

$$\sigma_u = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I_g} a_u = -\frac{N}{A} \left(1 - \frac{e}{r^2} \cdot a_u\right)$$



第 12-2 圖

断面の核心 (Core ; Kern) を o 及び u となし、上下核心の位置が g から k_o 及び k_u だけ離れてゐるものとすれば、核心でとつた曲げモーメントは、

$$M^o = N(e - k_o) ; M^u = N(e + k_u) \dots\dots\dots(12-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{核心距離} \quad k_o &= \frac{r^2}{a_u} = \frac{W_u}{A} ; k_u = \frac{r^2}{a_o} = \frac{W_o}{A} \\ \text{断面係数} \quad W_o &= \frac{I_g}{a_o} ; W_u = \frac{I_g}{a_u} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{維應力} \quad \sigma_o &= -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{e}{k_u}\right) = -\frac{N}{A} \cdot \frac{k_o - e}{k_o} = -\frac{M^u}{A \cdot k_u} = -\frac{M^u}{W_o} \\ \sigma_u &= -\frac{N}{A} \left(1 - \frac{e}{k_o}\right) = -\frac{N}{A} \cdot \frac{k_o - e}{k_o} = -\frac{M^o}{A \cdot k_o} = -\frac{M^o}{W_u} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12-6)$$

$$\text{推 力} \quad N = \frac{M^u - M^o}{k_o + k_u} ; e = \frac{M^o \cdot k_u + M^u \cdot k_o}{M^u - M^o} \dots\dots\dots(12-7)$$

核心並に核心曲げモーメントを豫め算定しておけば、斯くして、第 12-6 式より維應力が求められ、若し必要があれば第 12-7 式から推力を求める事も出来るのである。

維應力を求めるには、普通は第 12-2 式を利用し、その爲には豫め M と N を算定しておくのであるが、第 12-6 式を利用する時は M^o 及び M^u を豫め算定するのである。手数から言へば大差は無いが、種類の違ふ N 及び M (同じ載荷状態の) を算定するのに対しては、同種の M^o 及び M^u を算定する方が簡易であつて誤差を生ずる原因が減少する。しかも核心を利用した方が影響線が示すやうに精密なる應力が求められるのである。

断面が上下對稱なる時 $a_o = a_u = \frac{1}{2} d$ であつて、

$$k = k_o = k_u = \frac{W_g}{A} = \frac{2 \cdot I_g}{A \cdot d} \dots\dots\dots(12-8)$$

$$\sigma_o = -\frac{M^u}{W} = -\frac{M^u}{A \cdot k} ; \sigma_u = \frac{M^o}{W} = \frac{M^o}{A \cdot k} \dots\dots\dots(12-9)$$

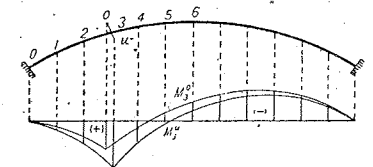
$$N = \frac{M^u - M^o}{2k} ; e = \frac{k(M^o + M^u)}{M^u - M^o} = \frac{M^o + M^u}{2N} \dots\dots\dots(12-10)$$

$$\text{重心軸曲げモーメント} \quad M^g = N \cdot e = \frac{M^o + M^u}{2} \dots\dots\dots(12-11)$$

拱軸線任意點 m の断面に於ける核心の座標は第 12-2 圖を参照して、

$$\left. \begin{aligned} x_o &= x - k_o \cdot \sin \varphi ; y_o = y + k_o \cdot \cos \varphi \\ x_u &= x + k_u \cdot \sin \varphi ; y_u = y - k_u \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12-12)$$

第 12-3 圖は或る固定拱の $1/4$ 點 (格點 3) の曲げモーメント影響線を示し、上核心曲げモーメント M_o^o と下核心曲げモーメント M_u^u とを比較したものであつて、若し断面の重心點で曲げモーメントをとれば之が影響線の中に入るのである。 M_o^o と M_u^u との差が既に斯うであるから、此の断面の (+) M による應力に対しては M_o^o をとり (-) M による應力には對して M_u^u に従ふ方が M_o^o に據るものより載荷長さが違ふからそれだけ精密なる結果を與ふる事茲に言ふ迄もないことである。

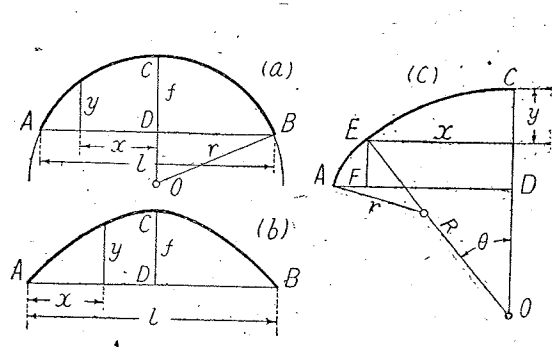


第 12-3 圖

§2. 拱 軸 線

橋梁その他の構造に用ひられるアーチ (拱) は之を歴史的に觀れば今より約 2,000 年前即ち西紀前後の羅馬時代に於て一應大成せられ、當時のアーチは切石を弧狀に疊んだ所謂石造拱であるが、其の曲線には缺圓を用ひるを普通とし、西アジア地方には 2 個の缺圓を拱頂に於て斷續せしめた尖頭拱を用ひるものが尠くなかつた。遙かに下つた文藝復興時代の石造拱を觀れば、構造技術に於ては大なる進歩の跡を發見し得ないが、拱形には三心圓或

は五心圓のやうに拱頂に於て扁平であつて起拱部に於て曲率半徑の小さい曲線を描ぶものが建造せられ、石造拱に於て古今の傑作と稱せられる伊太利ヒレンツェ市の聖トリニタ橋(1,567年建造)は橢圓的なる曲線から出来てゐてもなほ其の優雅なる姿をアルノ河の水面に映じてゐるのである。又、中世紀の石造拱として著明なる南佛蘭西アヅキニョンの聖ベネゼエ橋には長軸を拱矢の方向にとつた橢圓が用ひられてゐる。支那及び之が傍系に屬する日本の石造拱は缺圓を用ひるのを普通とする。之等歴史的橋梁に應用せられた曲線は、疊積し易い事及び外觀の美しかるべき事の二つに原因して撰定せられたものと觀られるのであつて、構造力學的なる根據から出發したものでは無く、従つて之等の曲線は常に其の内縁線 (*intrados*) の形狀に關して言はれてゐるのである。



第 12-4 圖

缺 圓 (第 12-4 圖 a)

$$r = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} ; y = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \dots (12-13)$$

拋物線 (第 12-4 圖 b)

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \dots (12-14)$$

拱頂點を $x=0, y=0$ とするとき、 $y = \frac{4f}{l^2} x^2$ 。

三心圓 (第 12-4 圖 c)

$$R = \frac{x^2 + y^2}{2y} ; r = \frac{1}{2} \cdot \frac{AK^2 + EF^2}{EF \cos \theta - AF \sin \theta} \dots (12-15)$$

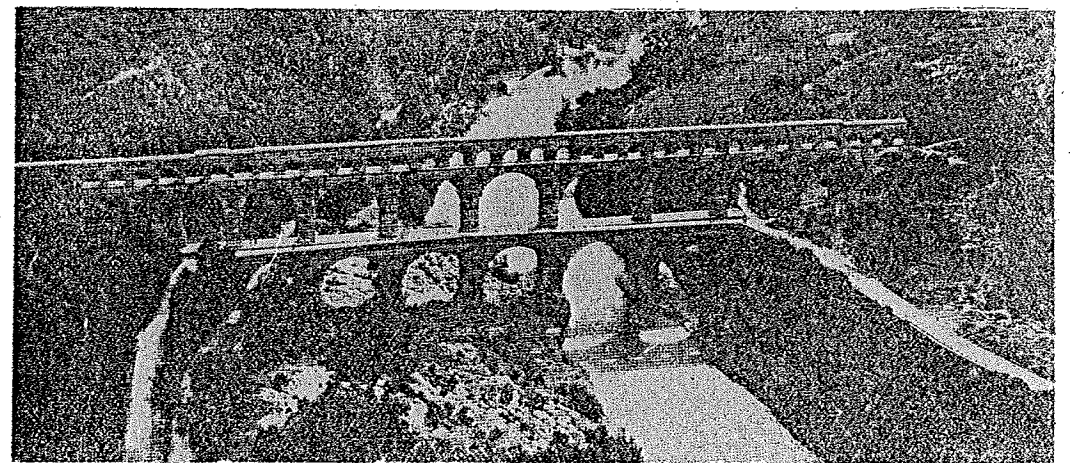
五心圓 (橢圓) (第 12-5 圖)

橢圓を畫くには (a) 圖に於て長軸 AD 短軸 CD を半徑として D を中心とする同心圓を畫き、次に D から共通の放射線を引き、放射線と兩圓との交點から鉛直線及び水平線を畫いて其の交點を求め、斯うして得られた諸點を結んだ曲線が橢圓である。五心圓を以て橢圓に代へる場合には (b) 圖に於て、橢圓に似た曲線 AJKC を豫め作圖して其の線上に K を適當に撰び、又、AC を結

び、次に B から AC に垂直に BE 線を引いて CD 線との交點 O を求め、KO 線を畫く。今、 $AE=KG$ なるやうに G を定めて EG 線を引き、EG の中點 F に垂直線を畫いて KGO 線との交點 H を求めれば、斯くして得られた O, E, H が近似橢圓を作圖すべき圓の中心である。

以上各種の曲線は過去 2,000 年間に建造された多くの石造拱に用ひられたのである。而して如何なる曲線が妥當性を有するかを問題とするに於ては、アーチの本質に基いて検討すべきであるが、アーチは材料の抗壓性を利用した構造であるから力線はアーチの軸から偏倚する事尠く拱肋に曲げモーメントを生ぜしめないやうな形狀を備へる事が第一に必要であつて、之が爲には拱肋に作用すべき壓力線が拱軸線と一致するやうにアーチの形狀を撰べば良いのであつて、若し兩者が全く一致すれば變形を無視する限りに於て、(1) アーチは單に壓縮力のみ作用せられるのみならず、(2) アーチの外縁 (*extrados*) 及び内縁 (*intrados*) の應力は共に相等しく、然るときは材料は最も經濟的に利用せられるのである。

拱肋に生ずる壓力線は、アーチに作用する荷重に對する釣合曲線であるから、經濟的なる拱軸線を定める爲にはアーチの釣合曲線を求める事が先決問題であつて、既に 19 世紀の中葉に於てランキンは之に相當する曲線が變垂曲線なる事を論じてゐる*。拱肋に作用する壓力線乃至釣合曲線は之を圖解的に求める事も出来るが、解析的に求める事も出来る。而して此の壓力線の性質を研究する事は石造拱、鐵筋コンクリート拱に於て重要な事勿論であるが鋼拱の形狀を定める上にも亦重要である。



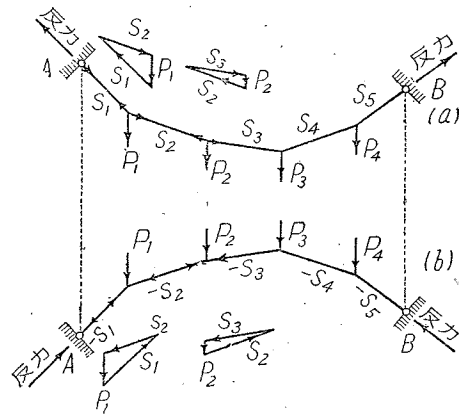
寫眞 12-1 南佛蘭西ガアル水道橋 (羅馬時代の代表的石造拱)

* Rankine, W. J. M. "Manual of Civil Engineering"

§3. 壓力線圖解法

2個の固定點 A 及び B から吊された細い綱に P_1, P_2, \dots の荷重が作用する時、綱の重量を無視すれば綱の形状は第 12-6 圖 (a) に示すやうな多角形となり、 $P_1, S_1, S_2;$

$P_2, S_2, S_3;$ ……は何れも 1, 2, ……の諸點で釣合状態に在つて閉塞した力多角形を畫く。此の綱によつて作られる多角形は静力學的には釣合多角形であると共に P_1, P_2, \dots に対する連力圖である。又、 S_1, S_2, \dots ……なる綱の應力は引張力である。今此の釣合状態に在る構造を (b) 圖の如く上下逆になし且つ多角形を形成する材料を壓縮材であるとすれば、此の構造は同じく釣合状態に在り、唯一の異なる所は材料の長さは同じ

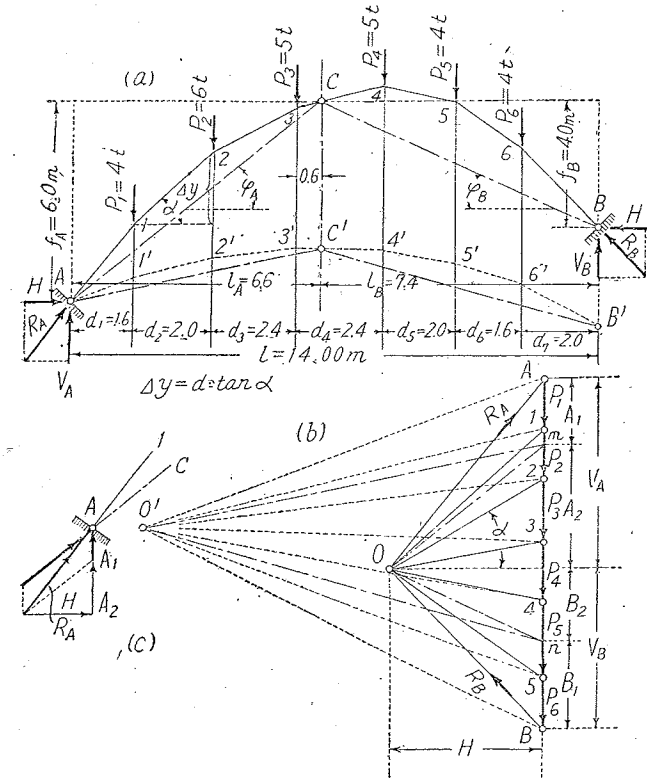


第 12-6 圖

であるが性質の反對なる應力、即ち壓縮力が生ずる事である。此の場合の多角形は釣合多角形であるが、 P_1, P_2, \dots の諸力の作る壓力線と呼ばれ、 P の代りに p なる分布荷重が作用する場合には壓力線は曲線となり、 P と p が共に作用する場合には不連続曲線となる。而して第 12-6 圖 (b) はアーチに於ける壓力線を説明するものである。

静力学の示す所に據れば、數多の力に対する連力圖は、2個の指定點を通過するものは無數に存在する。併し乍ら、條件を1個増加して連力圖線の長さ(綱の場合では綱の長さ)を一定とするか或は通過點を3個とするときは、連力圖は唯一つしか存在しないのである。アーチの釣合曲線を連力圖によつて示す時は其處に壓力線の通過すべき點を3點指定しなければならない。

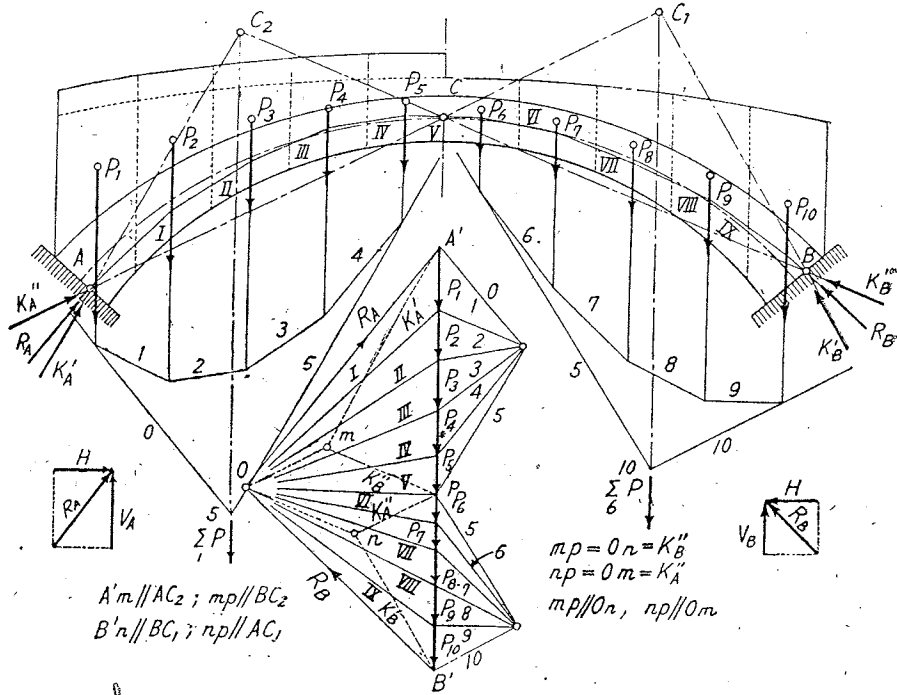
第12-7圖(I)に於て與へられた荷重 P_1, P_2, \dots, P_6 に対して A, C, B の3點を通過する連力圖(壓力線)を求めやうとするには (b) 圖に示すやうに任意點 O' を撰んで P_1, P_2, \dots, P_6 に対する力多角形を作圖し、此の力多角形によつて (a) 圖に示す如く A 點を通過する連力圖 $A'1'2' \dots 4'5' \dots B'$ を畫き、此の線と C からの鉛直線との交點 C' 點を定める。(a) (b) 兩圖に於て $AC' \parallel O'm$; $BC' \parallel O'n$ なる平行線を (b) 圖 O' 點より引いて m 及び n 點を定め、次に $AC \parallel Om$; $BC \parallel On$ なる平行線を m 及び n 點から引いて O 點を定めれば、 O 點は (a) 圖に於て3點 $A, C,$ 及び B を通過する連力圖に對しての



第 12-7 圖 (I)

力多角形の極であつて、 OAB なる力多角形を以て (a) 圖の $A12 \dots C \dots B$ なる連力圖を作圖すれば、之が求むる所の連力圖即ち P_1, P_2, \dots に對しての3點を通過する壓力線である。既に述べたやうに、若しアーチが $A12 \dots C4 \dots B$ の如き多角形の形を備へて居れば、アーチは P_1, P_2, \dots の作る壓力線に合致してアーチには壓縮力のみ生ずるのである。又、實際問題として壓力線が必ず A, C, B の3點を通過するやうに爲す場合には、 A, C, B の3點をヒンジの構造とし其の點では曲げモーメントが零 ($M=0$) となるやうな構造とするのである。

石造拱の設計及び照査に屢々用ひられる圖解法の一例は第 12-7 圖 (II) に示す通りであつて、本例は死荷重以外に左半分に等分布活荷重を載せた場合の壓力線を求め之が如何程拱軸線から偏倚するかを照査してゐるのである。此の場合、左支點には (-) M 、右支點に (+) M を生ぜしめる傾向があるので、然るときも尚ほ起拱點には引張應力零なる限界として、壓力線は左支點断面では下方3分點、右支點では上方3分點、拱頂點では中央點を通過するものと假定して、その假定の下の壓力線を求めてゐるのである。之等の詳點に豫めヒンジが設けてあれば兎も角、ヒンジの無い限りに於ては眞

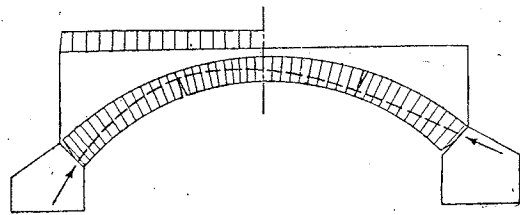


第 12-7 圖 (II)

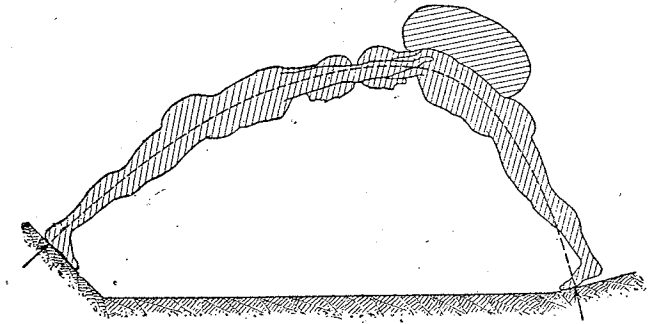
實性の無いものであるから、左右兩支點に於て壓力線が中央點或は上記と反對の3分點を通過すべき場合の作圖を併せて行ひ拱肋壓力線の作用状態を照査するを可とする。本作圖に於ては、左右を別個に取扱ひ然る後に組合せを行ふ。

かくの如き假定の下に作圖せられた第 12-7 圖 (II) の壓力線に關して注意すべき事は、左右兩側ともに 1/4 點附近に於て壓力線は屢々縁維側に相當近づいて作用する事であつて、石造拱に在つては壓力線が中央3分點より外れて作用すれば其處に引張應力の生ずる事止むを得ないのである。第 12-8 圖は斯くの如き不對稱荷重に基く壓力線の状態の一例を示し、壓力線は荷重の小なる個所に於て扁平となるを常態となし、従つて荷重の小なる個所で外縁に引張應力を、荷重の大なる個所では外縁に大なる壓縮應力を生じ易いのを普通とし、壓力線が斷面の核心（等質材料より成る矩形斷面では中央3分點）より外れれば、其の斷面に引張應力を生じ材料の抗張性が乏しければ引張側に龜裂を生ぜしめる事と成る。此の不對稱荷重に於ける變形（拱軸線の撓み）は、壓力線とは反對に荷重の大なる個所で扁平化する事を注意すべきである。

以上の關係を明にする意味に於てオツェン教授の描いた第 12-9 圖を茲に挿入したが、人體は曲げに對する抵抗が弱い



第 12-8 圖



第 12-9 圖

ので二人の人間は壓縮抵抗によつて荷を支へやうとし、従て其姿勢は壓力線に沿つてゐるのである。以上で解説した壓力線の圖解法は方法それ自身が簡易であるから広く用ひられてゐるのであるが、其の結果は粗雑たるを免れず、單にこの方法のみによつて應力照査をなす事は、蓋し不適當であつて、同様の事を計算によつて求める事は決して手数を必要としないのであるから、順序としては次節に述ぶる算法を第一とし、圖解法は計算法より得た結果の照査として用ふるを可とする。

§4. 壓力線の計算法

第 12-7 圖 (I) の壓力線に於て支點 A 及び B の反力は R_A 及び R_B である。之が水平分力 H 及び鉛直分力 V_A 及び V_B は圖解的にも解析的にも容易に求められるのであつて、(b) 圖力多角形に於ける水平の極距 H は水平反力を示し、極 O よりの水平線によつて $\sum P$ の力線を分割した V_A 及び V_B は鉛直反力を示すのであるが、壓力線の如何なる部分に於ても之が水平分力は恒に H に等しい事に注意すべきである ($\sum H=0$)。反力 R_A は (c) 圖に示すやうに AC 線と鉛直線の 2 方向に分力することも出来、その鉛直分力を A_1 とすれば、 $V_A=A_1+A_2$ 或は $A_2=V_A-A_1$ 、支點 B に於ても同様に分力し得るのであつて、この關係は (b) 圖記入の通りである。

中央鉸點 C で左側或は右側の諸力に關してモーメントをとれば、

$$\sum M_c = A_1 \cdot l_A - \sum_{P_1}^{P_3} M = 0 ; \quad \sum M_c = B_1 \cdot l_B - \sum_{P_4}^{P_6} M = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{l_A} \sum_{P_1}^{P_3} M ; \quad B_1 = \frac{1}{l_B} \sum_{P_4}^{P_6} M \dots \dots \dots (12-16)$$

AC 線及び BC 線の傾角を φ_A 及び φ_B とすれば、

$$A_2 = H \cdot \tan \varphi_A = \frac{f_A}{l_A} H ; B_2 = H \cdot \tan \varphi_B = \frac{f_B}{l_B} H \dots (12-17)$$

而して $A_2 + B_2 = \Sigma P - A_1 - B_1 = H(\tan \varphi_A + \tan \varphi_B)$ であるから、

$$H = \frac{\Sigma P - A_1 - B_1}{\tan \varphi_A + \tan \varphi_B} = \frac{\Sigma P - A_1 - B_1}{f_A/l_A + f_B/l_B} \dots (12-18)$$

今、第 12-7 圖 (I) の極射線が水平と爲す角を α とし、各極射線から支點迄の間に在る P を ΣP とすれば、

$$\tan \alpha = \frac{1}{H} (V_A - \Sigma P) ; V_A = A_1 + A_2 = A_1 + H \cdot \tan \varphi_A \dots (12-19)$$

然るときは壓力線の畫く多角形 $A_1 2 \dots C$ の各點の縦距の増加は、

$$\Delta y = d \tan \alpha \dots (12-20)$$

で示され、以上各式を利用すれば圖解法に依らずして反力の値を知り得ると共に壓力線の位置を正確に求め得るのである。

[算例] 第 12-7 圖 (I) に於て ACB の 3 點を通過する壓力線の位置を求む。

番號	荷重 t	腕長 m	$M_{t,m}$	A_1	番號	荷重 t	腕長 m	$M_{t,m}$	B_1
P_1	4	5	20	41 6.6 =6.212 t	P_4	5	1.8	9	45.8 7.4 =6.189 t
P_2	6	3	18		P_5	4	3.8	15.2	
P_3	5	0.6	3		P_6	4	5.4	21.6	
Σ	15		41		Σ	13		45.8	

$$\sum_1^6 P = 15 + 13 = 28 t. \quad H = \frac{28 - 6.212 - 6.189}{\frac{6.0}{6.6} + \frac{4.0}{7.4}} = \frac{15.599}{0.909 + 0.541} = 10.76 t$$

$$V_A = 10.76 \times \frac{6.0}{6.6} + 6.212 = 16.0 t ; V_B = 28 - 16 = 12.0 t$$

各點の縦距は支點 A の高さを基準とすれば、

作用點	荷重 P	ΣP	$V_A - \Sigma P$	$\tan \alpha = \frac{V_A - \Sigma P}{H}$	d	$d \cdot \tan \alpha$	縦距 y
1	4		16	1.4870	1.6	2.3792	2.379
2	6	4	12	1.1152	2.0	2.2304	4.609
3	5	10	6	0.5576	2.4	1.3382	5.948
4	5	15	1	0.0929	2.4	0.2229	6.171
5	4	20	-4	-0.3717	2.0	-0.7434	5.427
6	4	24	-8	-0.7435	1.6	-1.1897	4.238
B		28	-12	-1.1152	2.0	-2.2305	2.007

茲に $y_B = f_A - f_B = 6 - 4 = 2 m$ たるべき所 $y_B = 2.007 m$ 即 7 mm ちの誤差を生じたのは反力の値の小数點下を省略したのに原因する。

C 點の位置を 3 點及び 4 點の縦距から檢算すれば、

$$5.948 + \frac{0.6}{2.4} (6.171 - 5.948) = 5.994 ; f_A = 6 m \therefore \text{誤差 } 6 \text{ mm.}$$

上記算例は不對稱拱に關するものであるが、普通用ひられる對稱拱の場合は計算が更に簡易である。斯くして、對稱拱に於ける、(1) 死荷重のみの場合、(2) 活荷重の半徑間に載る場合、(3) 活荷重の全徑間に載る場合、等の壓力線の位置は、圖解法に據るものと同時間且つ、更に精確に求めらるのである。

§ 5. 壓力線の高次方程式化

壓力線の位置は、圖解法によるも解析法によるも容易に求め得る事既に述べた通りである。壓力線の作る多角形は分割荷重 P_1, P_2, \dots を小區分して數多く分割した方が曲線に近づくのであるが、多角形で表はされた壓力線を連續曲線を以て示さうとする (多角形壓力線を以て拱軸線としやうとするやうな) 場合には、此の曲線を多角形に内接せしむべきか或は外接せしむべきかの疑問が生ずる。併し乍らアーチの本質を考へれば、求むる曲線は外接曲線と内接曲線の間中に在る可き事が當然であつて、此の中立曲線の縦距は前節で求めた多角形頂點の縦距より稍短くある可きである。

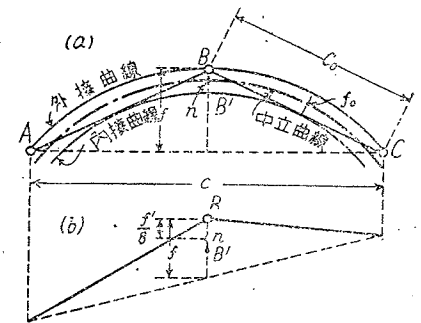
中立曲線の通過すべき位置は若し中立曲線の各分割部分を拋物線なりと假定すれば容易に定める事が出来る。第 12-10 圖に於て ABC を壓力線多角形の一部なりとすれば、

$$f = K \cdot c^2$$

BC 部分に對しては、 $c_0 = \frac{1}{2} c$ と看做し得る事が普通であるから、

$$f_0 = K \cdot c_0^2 = K \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{f}{4}$$

内接外接兩曲線の間隔は $\frac{f}{4}$ である。依て、頂點 B に就いて言へば中立曲線は B 點に於ては $\frac{f}{8}$ だけ下方の點 n を通過するのである。(b)圖は之が一般の場合を示す。



第 12-10 圖

壓力線多角形の位置から中立曲線の通過すべき位置を設定すれば、後に残る問題は中立曲線を如何なる曲線で示すべきかである。この曲線は變垂曲線或は之と近似の曲線に近い

性質を有するのであるから、今頂点を原点とするとき、實用上、

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots \quad (12-21)$$

なる高次方程式（高次拋物線）で示す事が出来る。此の式を微分すれば、

$$\frac{dy}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + \dots$$

$$x=0 \text{ なるとき } \frac{dy}{dx} = A ; \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = B$$

茲に A は原点に於ける曲線傾角の大きさを示し、原点を通過する軸の傾角が與へられておれば之より定値 A を求める事が出来る。左右對稱のアーチでは拱頂點に於て $dx/dy = \tan\phi = 0$ であるから $A=0$ であり、従つて、

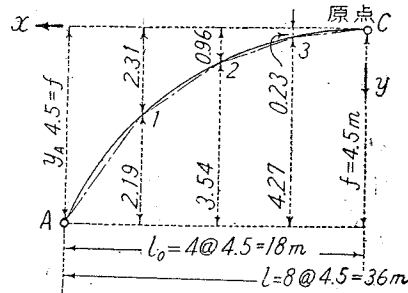
$$y = Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots \quad (12-22)$$

となる。

【算例】 支間 36 m, 拱矢 $f=4.5\text{m}$ なる對稱拱の壓力線座標が第 12-11 圖で示されるものとする。縦座標 y は 4 個與へられてゐるから B, C, D, E の未定値を含む 5 次方程式を作ることが出来る。

$$y = Bx_0^2 + Cx_0^3 + Dx_0^4 + Ex_0^5$$

座標は y は與へられた寸法で示し、 x_0 は格間が等分されてゐるから格間数で示すものとする。然るときは次の 4 個の式が得られる。



第 12-11 圖

點	x_0	$y = Bx_0^2 + Cx_0^3 + Dx_0^4 + Ex_0^5$	方程式番號
3	1	$0.23 = 1 \cdot B + 1 \cdot C + 1 \cdot D + 1 \cdot E$	(1)
2	2	$0.96 = 4 \cdot B + 8 \cdot C + 16 \cdot D + 32 \cdot E$	(2)
1	3	$2.31 = 9 \cdot B + 27 \cdot C + 81 \cdot D + 243 \cdot E$	(3)
A	4	$4.50 = 16 \cdot B + 64 \cdot C + 256 \cdot D + 1024 \cdot E$	(4)

此の 4 聯立方程式から B, C, D, E を解けば良い。

操 作	左 項	B	C	D	E	方程式番號
(1) × 4	0.92	4	4	4	4	(5)
(2) - (5)	0.04		4	12	28	(6)
(2) × 2.25	2.16	9	18	36	72	(7)
(3) - (7)	0.15		9	45	171	(8)
(3) × 1.7777	4.1065	16	48	144	432	(9)
(4) - (9)	0.3935		16	112	592	(10)
(6) × 2.25	0.09		9	27	63	(11)
(8) - (11)	0.06			18	108	(12)
(8) × 1.7777	0.2667		16	80	304	(13)
(10) - (13)	0.1268			32	288	(14)
(12) × 1.7777	0.1067			32	192	(15)
(14) - (15)	0.0201				96	(16)

$$\text{第 (16) 式 } 0.0201 = 96 E \quad E = 0.00021$$

$$\text{第 (12) 式 } 0.06 = 18 D + 108 E = 18 D + 0.08 \times 0.00021 \quad D = 0.00237$$

$$\text{第 (6) 式 } 0.04 = 4 C + 12 D + 23 E = 4 C + 12 \times 0.00237 + 28 \times 0.00021 \quad C = 0.00232$$

$$\text{第 (1) 式 } 0.23 = B + C + D + E = B + 0.00232 + 0.00237 + 0.00021 \quad B = 0.22540$$

$$y = 0.2254 x_0^2 + 0.00232 x_0^3 + 0.00237 x_0^4 + 0.00021 x_0^5$$

檢算. 第 2 格點は $x_0=2$ である。第 (2) 式より、

$$y_2 = 4 \times 0.2254 + 8 \times 0.00232 + 16 \times 0.00237 + 32 \times 0.00021$$

$$= 0.9016 + 0.01856 + 0.03312 + 0.00672 = 0.96 \text{ m}$$

横座標 x を長さで表す場合には、格間長を λ とするとき $x_0 = \frac{x}{\lambda}$ であるから ($\lambda=4.5\text{m}$)、之を代入して、

$$y = 0.0111309 x^2 + 0.000254 x^3 + 0.000031 x^4 + 0.0000001 x^5$$

斯くの如き壓力線が方程式で示されるときは、之の切線が水平と爲す角度は上式を x 或は x_0 で微分したのから容易に求められる。第 2 格點では、

$$\frac{dy}{dx_0} = 2 B x_0 + 3 C x_0^2 + 4 D x_0^3 + 5 E x_0^4$$

$$= 2 \times 0.225 \times 2 + 3 \times 0.00232 \times 4 + 4 \times 0.00237 \times 7 + 5 \times 0.00021 \times 16$$

$$= 0.9 + 0.03252 + 0.06556 + 0.0160 = 1.01588$$

$x = x_0 \cdot \lambda ; \lambda = 4.5 \text{ m}$ であるから

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx_0} \times \frac{1}{4.5} = 0.22575 \quad \therefore \phi = 12^\circ 43' 18''$$

設計に際しての注意 コンクリート或は鉄筋コンクリート拱等の拱軸線を決定する爲には先づ壓力線を明かにしなければならない。拱橋設計の準備作業としての壓力線決定に際しては、

- (1) 拋物線、缺圓、多心圓、變垂曲線、等の中から使用し易く且つ目的の拱橋に妥當する曲線を以て假に拱軸線を定め、之によつて拱橋の縦断面を定める。
- (2) 死荷重を計算して格點死荷重を定める。壓力線を以て拱軸線と爲す場合に一般の慣習は活荷重の影響即ち等分布活荷重の $\frac{1}{2}$ をとつて之を格點荷重の中に算入する。著者はコンクリート拱に於ては之を採らない方が良く考へるが、其の理由は後に述べる。
- (3) 圖解法と計算法とを用ひて壓力線の位置を求める。
- (4) 求められた壓力線と假定拱軸線との偏倚が尠くない場合には、求められた壓力線を以て拱軸線となし、茲に新しく拱橋縦断面を定め、(2) 及び (3) の作業を繰返へす。斯くすれば 1 回乃至 2 回の繰返し作業によつて壓力線と拱軸線は略ぼ一致する。
- (5) 拱軸線方程式を明かに爲し、之を基本に拱橋諸寸法を定める。
- (6) 應力計算には結果の精粗に應じて種々方法がある。最も簡單なものは各断面に作用する壓力線

から垂面應力を求める方法であつて、之は従来の石造拱設計に用ひられてゐる。其の他の方法は第 9, 10, 11 章に述べた通りである。

【算 例】 支間 24 m, 拱矢 5 m なるアーチの拱軸線を定めよ (第 12-12 圖)。

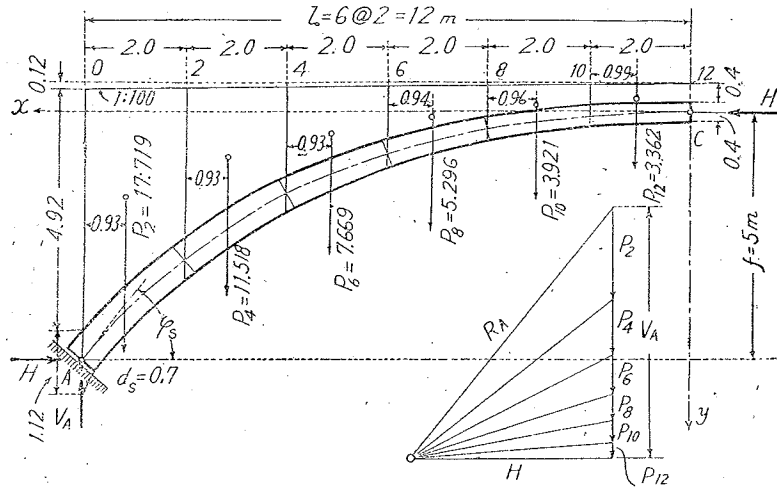
本例はシュトラースナーが變垂曲線拱に用ひた算例であるが、之を上述の方法で解くものとする。

先づ拱頂點及び起拱點肋厚を $d_c=0.40$ m, $d_s=0.70$ m とし拱頂點及び起拱點の荷重強度を算出する。拱肋材及び拱背填材の單位重量をそれぞれ 2.4 t/m³ 及び 1.7 t/m³ とし、起拱點拱肋の鉛直に測つた高さを試算的に求めて其の結果 1.10 m であるとする。

拱頂點荷重強度 $g_c=0.40 \times 2.4 + 0.40 \times 1.7 = 1.64$ t/m²

起拱點荷重強度 $g_s=1.10 \times 2.4 + 4.93 \times 1.7 = 11.02$ t/m²

荷重強度比 $m = \frac{g_s}{g_c} = \frac{11.02}{1.64} = 6.7 \approx 6.6 \sim 7.0$



第 12-12 圖

茲に m なる値を求めたのは、後述の變垂曲線を拱軸線として假りに用ひやうとするからである。 m の値が解れば此の曲線は容易に數値表から求められるのである (第 12-1 表参照)。若し變垂曲線を利用する便宜がなければ、與へられた支間及び拱矢に基く缺圖、三心圓をを以て假拱軸線とする (本例の如き側面の充填された拱即ち閉側拱では拋物線は不適當である)。

斯くして假に定めた拱橋を圖上に畫き、半徑間を 6 等分して各區劃の死荷重及び重心位置を求める (茲では橫幅を 1 m とする) のであるが、之が爲には豫め各部寸法を調べて置く。但し 本例では路面は圖示通り 1:100 勾配を有し、又、活荷重は算入しないものとする。

格 點	肋厚 d	平均肋厚	拱肋長 s	平均拱背高 h
12	0.400	0.408	2.01	0.41
10	0.417			
8	0.440			
6	0.469			
4	0.513			
2	0.582			
A	0.700	0.632	2.85	3.94

區分 12-10	$P_{12}=2.01 \times 0.408 \times 2.4 + 2.0 \times 0.41 \times 1.7 = 3.362$ t ; $Q_{10} = 3.362$ t
10-8	$P_{10}=2.03 \times 0.428 \times '' + '' \times 0.54 \times '' = 3.921$ t ; $Q_8 = 7.283$ t
8-6	$P_8=2.07 \times 0.450 \times '' + '' \times 0.90 \times '' = 5.296$ t ; $Q_6=12.579$ t
6-4	$P_6=2.16 \times 0.489 \times '' + '' \times 1.51 \times '' = 7.669$ t ; $Q_4=20.248$ t
4-2	$P_4=2.39 \times 0.544 \times '' + '' \times 2.47 \times '' = 11.518$ t ; $Q_2=31.766$ t
2-0	$P_2=2.85 \times 0.632 \times '' + '' \times 3.94 \times '' = 17.719$ t ; $V_A=49.485$ t

水平反力 H は、 $\sum M_{12}=0$ から求められるが、 $\sum M_A=0$ の方が反力 V_A が入らないから簡單であり、又、 $\sum M$ の算法は第 4-32 式に據るのも良いが、次の縦距計算に關係があるので次の如くして求める。

$$M_{12}=0$$

$$M_{10}= 3,362 \times 0.99 = 3,328 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$M_8 = 3,328 + 3,362 \times 2 + 3,921 \times 0.96 = 13,816$$

$$M_6 = 13,816 + 7,283 \times 2 + 5,296 \times 0.94 = 33,360$$

$$M_4 = 33,360 + 12,579 \times 2 + 7,669 \times 0.93 = 65,650$$

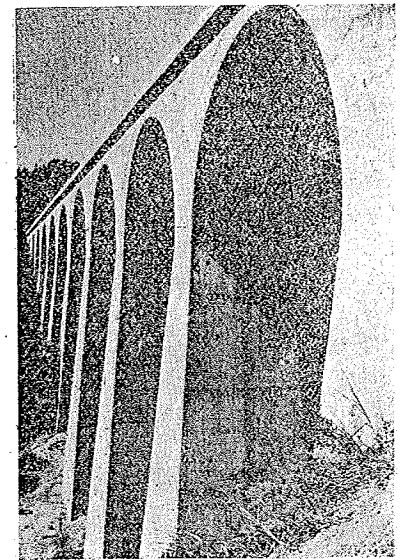
$$M_2 = 65,650 + 20,248 \times 2 + 11,518 \times 0.93 = 116,850$$

$$M_0 = 116,850 + 31,766 \times 2 + 17,719 \times 0.93 = 196,869$$

$$H = \frac{\sum M_A}{f} = 196,869 \div 5 = 39,374 \text{ t}$$

壓力線多角形頂點の座標

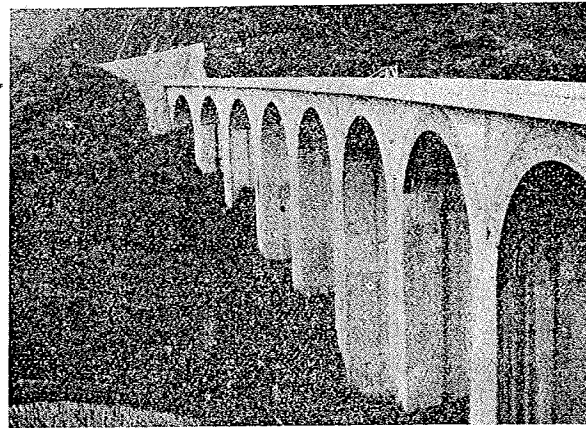
格點 12	$x=0$	$y=0$
10	$=2$	$= 3,328 + 39,374 = 0.085$ m
8	$=4$	$= 13,816 \div '' = 0.351$
6	$=6$	$= 33,360 \div '' = 0.843$
4	$=8$	$= 65,650 \div '' = 1.665$
2	$=10$	$= 116,850 \div '' = 2.968$
0	$=12$	$= 196,869 \div '' = 5.000$



寫真 12-2

省線宮原線菅邊橋梁 (10 m · 11 連)

此の値は圖解法による壓力線を以て照査するを可とする。圖解法に於ては既に水平反力 H の大きが求められてゐるから、此の大きを標距とすれば更に簡単に作圖なし得るのである。第 12-12 圖に於ては壓力線と拱軸線が甚だ接近してゐる圖が不明瞭となる爲に壓力線は特に抹消したのである。



寫眞 21-3 省線宮原線廣平拱橋 (7m・9連)

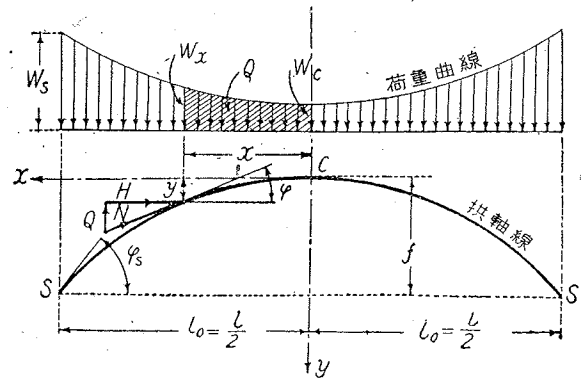
壓力線多角形の頂點を連ねて拱軸線とし、各點に生ずる死荷重應力を算定すれば、次の結果が得られる。

	斷面積 $A=b \cdot d$	斷面係數 $1/6 b \cdot d^2$	$\cos \varphi$	$A \cdot \cos \varphi$	應力 σ $H+A \cdot \cos \varphi$
起拱點	0.700	0.0817	0.622	0.435	- 90 t/m ²
1/4 點	0.469	0.0367	0.953	0.447	- 88
拱頂點	0.400	0.0267	1.000	0.400	- 98

上記應力は壓力線が各斷面の重心に作用するものとしたのであつて、然るときは斷面重心に作用する軸推力は $N=H \cdot \sec \varphi=H+\cos \varphi$ であり従て $\sigma=-\frac{N}{A}$ となるのである。拱軸線が壓力線を e だけ離れてゐれば、 $\sigma=-\frac{N}{A} \pm \frac{N \cdot e}{I} \cdot \frac{d}{2}$ となる。又、軸推力による拱肋收縮、材料の塑性變形、等を算入すれば應力は更に變化する。

§ 6. 變垂曲線としての壓力線 (對稱拱の場合)

1) 變垂曲線 SCS' なる對稱拱に於て S を起拱點 (Springing), C を拱頂點 (Crown) となし、之に作用する漸變分布荷重は S に於て w_s , C に於て w_c , その中間は壓力線の縱距 y に比例して變化するものとする (第 12-13 圖)。



第 12-13 圖

$$w_x = w_c + \alpha \cdot y$$

$$w_x = w_c + \alpha \cdot f ; \quad \alpha = \frac{1}{f} (w_s - w_c)$$

茲に、 $m = \frac{\text{起拱點荷重強度}}{\text{拱頂點荷重強度}} = \frac{w_s}{w_c}$ とすれば

$$w_x = w_c \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] \dots \dots \dots (12-23)$$

w_x なる漸變荷重の作る壓力線 (釣合曲線) の任意點 (x, y) に於て、此の點に作用する水平推力を H , 鉛直剪斷力を Q で示せば、壓力線傾角は、

$$\tan \varphi = \frac{Q}{H} = \frac{1}{H} \int w_x \cdot dx$$

拱は剛體であつて變形せず、且つ SCS' なる曲線が壓力線と合致するときは、

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \frac{1}{H} \int w_x \cdot dx \dots \dots \dots (12-24)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_x}{H} \dots \dots \dots (12-25)$$

本式は w_x なる漸變分布荷重の釣合曲線 (即ち壓力線) の微分方程式であつて、 $x = \xi \cdot l_0$ とすれば、

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{w_x}{H} = \frac{w_c}{H} \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] ; \text{ 或は } \frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{w_c}{H} l_0^2 + \frac{w_c \cdot y}{H \cdot f} (m-1) l_0^2$$

茲に、 $k^2 = \frac{w_c (m-1) l_0^2}{f \cdot H}$ とすれば

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - k^2 \cdot y - k^2 \frac{f}{(m-1)} = 0$$

此の解は

$$y = C_1 \cdot e^{\xi \cdot k} + C_2 \cdot e^{-\xi \cdot k} - \frac{f}{(m-1)}$$

拱頂點にては $dy/d\xi = 0$, 且つ $\xi = 0$; $y = 0$ なるを以て

$$C_1 = C_2 = \frac{f}{2(m-1)}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{f}{m-1} \left[\frac{(e^{\xi \cdot k} + e^{-\xi \cdot k})}{2} - 1 \right] \\ y &= \frac{f}{m-1} \left[\cosh \cdot \xi \cdot k - 1 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12-26)$$

上式は變垂曲線 (Transformed catenary) の方程式であつて、之を拱肋の軸線に撰ぶ場合

* 双曲線函数 $\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh \cdot x ; \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh \cdot x$

は $w_2 = w_0 + \alpha \cdot y$ なる曲線的變化をなす分布荷重が作用する限りに於て此の拱の壓力線は軸拱線に合致し、拱肋には軸推力のみ作用して何等の曲げモーメントは生じないのである。

第 12-26 式に於て、 $y=f$ なるとき $\xi=1$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \cosh \cdot k &= m \\ k &= \cosh^{-1} \cdot m = \log_a (m + \sqrt{m^2 - 1}) \dots m \geq 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12-27)$$

各種の m の値に對する k の値は第 12-1 表記載通りである。

第 12-26 式を利用するには双曲線函数表が必要である。此の式を

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{f} &= \frac{1}{m-1} (\cosh \cdot \xi k - 1) \\ &= K_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12-28)$$

と書き直して豫め其の右項だけを計算しておけば、その値に拱矢 f を乗することによつて變垂曲線縦距 y は容易に求められるのであり、茲に荻野福實氏の協力を得て第 12-1 表を作製した。 m の値が表に掲げた數の中間に在るときは、比例によつて求める事が出来るが、普通の拱では後に述べるやうに活荷重、溫度の變化、等に基く影響を算入するときは曲線は拱頂部で扁平となるやう換言すれば m の値は $(\text{死荷重} + \frac{1}{2} \text{活荷重})$ の如き荷重で定めたものより其の數を大とするやうに撰んだ方がよいから、中間値を比例で求めるやうな精度は意味を爲さないのであつて、例へば $m=2.95$ の如きは $m=3$ となして表を利用するを可とする。

變垂曲線の $x = \frac{1}{2} l$ 。即ち拱の支間の $\frac{1}{4}$ 點に於ける縦距 $y_{\frac{1}{4}}$ を求める事は壓力線の照査その他に屢々必要である。 $\frac{1}{4}$ 點では $\xi = \frac{1}{2}$ であるから第 12-26 式は、

$$\begin{aligned} y_{\frac{1}{4}} &= \frac{f}{m-1} \left(\cosh \cdot \frac{k}{2} - 1 \right) \\ \cosh \cdot \frac{k}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\cosh \cdot k + 1)} = \sqrt{\frac{1}{2} (m+1)} \end{aligned}$$

然るときは

$$\left. \begin{aligned} y_{\frac{1}{4}} &= \frac{f}{m-1} \left(\sqrt{\frac{1}{2} (m+1)} - 1 \right) = \frac{f}{2 + \sqrt{2} (m+1)} \\ m &= \frac{1}{2} \left(\frac{f}{y_{\frac{1}{4}}} - 2 \right)^2 - 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12-29)$$

2) 近似式 變垂曲線で示された拱軸線は双曲線函数を含む爲に第 12-1 表を使用しない場合は幾分煩雜であるが、之を避ける爲に $\cosh \cdot \xi k$ を展開すれば、

第 12-2 表 双 曲 線 函 數 表

x	$\sinh \cdot x$	$\cosh \cdot x$	x	$\sinh \cdot x$	$\cosh \cdot x$	x	$\sinh \cdot x$	$\cosh \cdot x$
0.01	0.01000	1.00005	0.41	2158	523	0.81	0.90152	4638
2	2000	020	2	3246	950	2	1503	5547
3	3000	045	3	4337	1.09388	3	2863	6468
4	4001	080	4	5434	837	4	4233	7404
5	5002	125	5	6534	1.10297	5	5612	8353
6	6004	180	6	7640	768	6	7000	9316
7	7006	245	7	8750	1.11250	7	8398	1.40293
8	8009	320	8	9865	743	8	9806	1284
9	9012	405	9	0.50984	1.12247	9	1.01224	2289
0.10	0.10017	500	0.50	2110	2763	0.90	2652	3309
1	1022	606	1	3240	3289	1	4090	4342
2	2029	721	2	4375	3827	2	5539	5390
3	3037	846	3	5516	4377	3	6998	6453
4	4046	982	4	6663	4938	4	8468	7530
5	5056	1.01127	5	7815	5510	5	9948	8623
6	6068	283	6	8973	6094	6	1.11440	9729
7	7082	448	7	0.60137	6690	7	2943	1.50851
8	8097	624	8	1307	7297	8	4457	1988
9	9115	810	9	2483	7916	9	5983	3141
0.20	0.20134	1.02006	0.60	3665	8547	1.00	7520	4308
1	1155	213	1	4854	9189	1	9069	5491
2	2178	430	2	6049	9844	2	1.20630	6389
3	3203	657	3	7251	1.20510	3	2203	7904
4	4231	894	4	8459	1189	4	3788	9134
5	5261	1.03141	5	9375	1879	5	5386	1.60379
6	6294	399	6	0.70897	2582	6	6996	1641
7	7349	667	7	2126	3297	7	8619	2919
8	8367	946	8	3363	4025	8	1.30254	4214
9	9408	1.04235	9	4607	4765	9	1903	5525
0.30	0.30452	534	0.70	0.75858	1.25517	1.10	3565	6852
1	1499	844	1	7117	6282	1	5240	8196
2	2549	1.05164	2	8384	7059	2	6929	9557
3	3602	495	3	9659	7849	3	8631	1.70934
4	4659	836	4	0.8094	8652	4	1.40347	2329
5	5713	1.06188	5	2232	9468	5	2078	3741
6	6783	550	6	3530	1.30297	6	3822	5171
7	7850	923	7	4838	1139	7	5581	6618
8	8921	1.07307	8	6153	1994	8	7355	8083
9	9996	702	9	7478	2862	9	9143	9565
0.40	0.41075	1.08107	0.80	8811	3743	1.20	1.50946	1.81066

x	sinh · x	cosh · x	x	sinh · x	cosh · x	x	sinh · x	cosh · x
1.21	2764	2584	1.61	2.40146	2.60135	2.01	66466	79865
2	4598	4121	2	2760	2549	2	70283	83549
3	6447	5676	3	5397	4990	3	74138	87271
4	8311	7250	4	8059	7457	4	78029	91032
5	1,60191	8842	5	2,50746	9951	5	81958	94832
6	2088	1,90454	6	3459	2,72472	6	85926	98671
7	4001	2084	7	6196	5021	7	89932	4,02550
8	5930	3734	8	8959	7596	8	3,93977	06470
9	7876	5403	9	2,61748	2,80200	9	98061	10430
1.30	9838	7091	1.70	4563	2832	2.10	4,02186	14431
1	1,71818	8800	1	7405	5491	1	06350	18474
2	3814	2,00528	2	2,70273	8180	2	10555	22558
3	5828	2276	3	3168	2,90897	3	14801	26685
4	7860	4044	4	6091	3643	4	19089	30855
5	9909	5833	5	9041	6419	5	23419	35067
6	1,81977	7643	6	2,82020	9224	6	27791	39323
7	4062	9473	7	5026	3,02059	7	32205	43623
8	6166	2,11324	8	8061	4925	8	36663	47967
9	8289	3196	9	2,91125	7821	9	41165	52356
1.40	1,90430	5090	1.80	4217	3,10747	2.20	45711	56791
1	2591	7005	1	7340	3705	1	50301	61271
2	4770	8942	2	3,00492	6994	2	54936	65797
3	6970	2,20900	3	3674	9715	3	59617	70370
4	9188	2881	4	6886	3,22768	4	64344	74989
5	2,01427	4834	5	3,10129	5853	5	69117	79657
6	3686	6910	6	3403	8970	6	73937	84372
7	5965	8958	7	6709	3,32121	7	78804	89136
8	8265	2,31029	8	3,20046	5305	8	83720	93948
9	2,10586	3123	9	3415	8522	9	88683	98810
1.50	2928	5241	1.90	6816	3,41773	2.30	93696	5,03722
1	5291	7382	1	3,30250	5058	1	98758	08684
2	7676	9547	2	3718	8378	2	5,03870	13697
3	2,20082	2,41736	3	7218	3,51733	3	09032	18762
4	2510	3949	4	3,40752	5123	4	14245	23879
5	4961	6186	5	4321	8548	5	19510	29047
6	7434	8448	6	7923	3,62009	6	24827	34269
7	9930	2,50735	7	3,51561	5507	7	30196	39544
8	2,32449	3047	8	5234	9041	8	35618	44873
9	4991	5384	9	8942	3,72611	9	41093	50256
1.60	7557	7746	2.00	3,62686	76220	2.40	45623	55695

x	sinh · x	cosh · x	x	sinh · x	cosh · x	x	sinh · x	cosh · x
1	52207	91189	9	33190	39978	6	62308	97489
2	57847	67739	2.70	40626	47347	7	72031	77161
3	63542	72346	1	48137	54791	8	81851	86930
4	69294	78010	2	55722	62810	9	91770	96798
5	75103	83732	3	63383	69905	3.00	10,01787	10,06766
6	80969	89512	4	71121	77578	1	11905	16835
7	86893	95352	5	78935	85328	2	22125	27005
8	92876	6,01250	6	86828	93157	3	32446	37277
9	98918	07209	7	94799	8,01065	4	42870	47654
2.50	6,05020	13229	8	8,02849	09053	5	53399	58135
1	11183	19310	9	10980	17122	6	64033	58722
2	17407	25453	2.80	18192	25273	7	74774	79416
3	23692	31658	1	27486	33506	8	85322	90218
4	30040	31927	2	35862	41823	9	96579	11,01129
5	36451	44259	3	44322	50224	3.10	11,07645	12150
6	42926	50656	4	52867	58710	1	18822	23282
7	49464	57118	5	61497	67281	2	30111	34527
8	56068	63646	6	70213	75940	3	41513	45885
9	62738	70240	7	79016	84686	4	53029	57357
2.60	69473	76901	8	87907	93520	5	64661	69946
1	76276	83699	9	96887	9,02444	6	76409	80651
2	83146	90426	2.90	9,05956	11458	7	88274	92474
3	90085	97292	1	15116	20564	8	12,00258	12,04417
4	97092	7,04228	2	24368	29761	9	12363	16480
5	7,04169	11234	3	33712	39051	3.20	24588	28965
6	11317	18312	4	43149	48436			
7	18526	25461	5	52681	57915			
8	25827	32683						

$$\cosh \cdot \xi^k = 1 + \xi^2 \frac{k^2}{2!} + \xi^4 \frac{k^4}{4!} + \xi^6 \frac{k^6}{6!} + \dots$$

$$y = \frac{f}{m-1} [\cosh \cdot \xi^k - 1] = \frac{f}{m-1} \left[\xi^2 \frac{k^2}{2!} + \xi^4 \frac{k^4}{4!} + \dots \right]$$

$$y = \frac{f}{2(m-1)} \left[\xi^2 \cdot k^2 + \xi^4 \cdot \frac{k^4}{12} + \dots \right] \dots \dots \dots (12-30)$$

本式は第 2 項まで採れば大差のない結果を得られる。k=arc · cosh · m の計算を省略する爲には、上式を y=f(a₁ · ξ²+a₂ · ξ⁴) で示すときは、

$$\xi=1; y=f, \therefore a_1+a_2=1 \quad \xi=\frac{1}{2}; y=y_1, \therefore \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{16} = \frac{y_1}{f}$$

上記双曲線函数表は Dr. Ing. K. Hayashi, "Théorie des Trägers auf elastischer Unterlage" による

之から a_1 及び a_2 を求めて代入すれば、

$$y = \frac{f}{3} \left[\left(16 \frac{y_1}{f} - 1 \right) \xi^2 - 4 \left(4 \frac{y_1}{f} - 1 \right) \xi^4 \right] \dots (12-31)$$

茲に y_1 は第 12-29 式を参照して、 $y_1 = \frac{f}{2 + \sqrt{2(m+1)}}$

拱軸線として 4 次乃至 6 次の拋物線を用ひる事は歐洲に於て時として行はれる所であつて、フレイシネは佛蘭西の Villeneuve-sur Lot 橋では、

$$y = 0.47619 \frac{x^2}{10} \left(1 + 0.00681819 \frac{x^2}{10} + 0.0000161006 \frac{x^4}{10} \right)$$

を用ひ、支間 210m を以て世界第一の鐵筋コンクリート拱なるを誇る西班牙のエスラ河橋では次式を用ひてゐる。

$$y = 206.7 (\xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4)$$

更に荷重曲線を 2 次拋物線と看做しうるものと假定すれば、

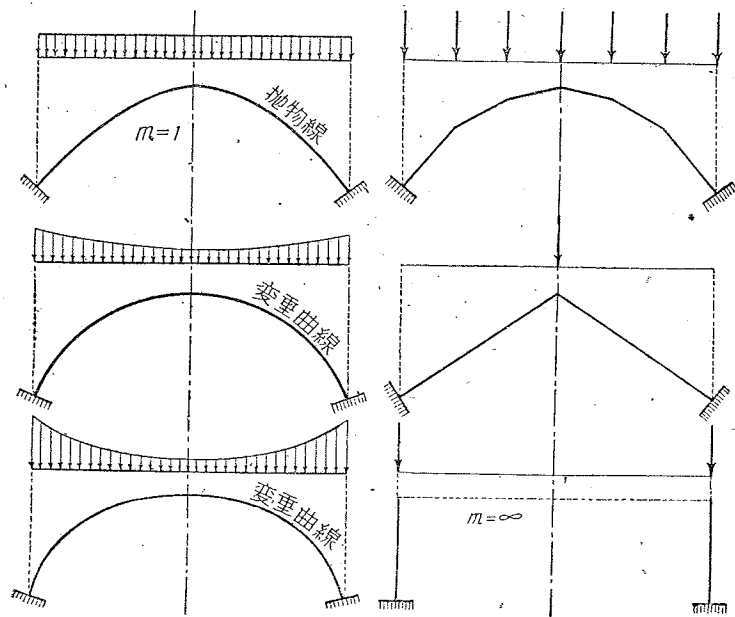
$$w_x = w_c + (w_s - w_c) \xi^2 \quad \text{或は} \quad \frac{w_x}{w_c} = 1 + (m-1) \xi^2 = 1 + (m-1) \left(\frac{x}{l_0} \right)^2$$

前記の變垂曲線を得たと同様の方法によれば、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w_x}{H} = \frac{w_c}{H} \left[1 + (m-1) \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right], \quad \text{或は} \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{w_c \cdot l_0^2}{H} \left[1 + (m-1) \xi^2 \right]$$

上式を積分し、拱頂點にて $\frac{dy}{d\xi} = 0$; $y = 0$ 、起拱點にて $y = f$; $\xi = 1$ なる條件を挿入

すれば、 $y = \frac{f}{m+5} \left[6\xi^2 + (m-1)\xi^4 \right] \dots (12-32)$



第 12-14 圖

$$H = \frac{w_c \cdot l_0^2}{2f} \left[1 + \frac{1}{6}(m-1) \right] \dots (12-33)$$

3) 特別荷重の場合 載荷重が等分布荷重なるときは、 $w_x = w = w_c = w_s$ 、依つて、 $m = \frac{w_x}{w_c} = 1$ である。第 12-24 式から、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w \cdot x}{H} \quad \therefore \quad y = \frac{w \cdot x^2}{2H}$$

然るに、 $H = \frac{w(m-1)l_0^2}{f \cdot k^2}$ 且つ $x = \xi \cdot l_0$ であるから、

$$y = \frac{f \cdot k^2 \cdot w}{2w(m-1)l_0^2} \cdot \xi^2 l_0^2 = \frac{[\log_n(m + \sqrt{(m^2-1)})]^2}{(m-1)} \cdot \frac{f}{2} \cdot \xi^2$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \frac{[\log_n(m + \sqrt{(m^2-1)})]^2}{(m-1)} = 2$$

$$y = f \cdot \xi^2 \dots (12-34)$$

即ち、等分布荷重満載のアーチに在つては其の壓力線は拋物線である。

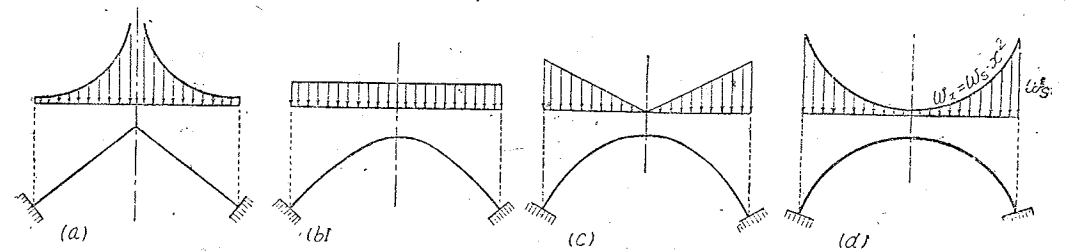
載荷重の様式如何によつて壓力線の形は變化する。既述したやうに集中荷重が數個載る場合の壓力線は多角形であつて、集中荷重が唯 1 個載る場合の壓力線は三角形であり、集中荷重が左右起拱點に作用する時はアーチ作用が解消される。分布荷重の場合は w_s が w_c に比して大なる程拱頂點附近は扁平化し橢圓的形狀となる。斯くの如く荷重の如何によつて壓力線が如何に變化するかを知る事は拱橋設計上必要であるから、次に荷重曲線を近似的に拋物線なりと假定して壓力線の變化を吟味する。

4) 拱軸線を $y = ax^n$ にて表す場合 變垂曲線を以て拱軸線とすると、この曲線は既に第 12-30 式で示したやうに、

$$y = \frac{f}{2(m-1)} \left[k^2 \cdot \xi^2 + \frac{k^4}{12} \cdot \xi^4 + \dots \right]$$

の如き形を持つてゐるが、假りに之を $y = ax^n$ で表すものとする。但し、 $1 < n < \infty$

$$y = ax^n = \frac{f}{l_0^n} x^n; \quad \frac{dy}{dx} = anx^{n-1}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a(n-1)nx^{n-2}$$



第 12-15 圖

之が第 12-25 式の $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w_x}{H}$ に合致するものとすれば、

$$\frac{w_x}{H} = a(n-1)nx^{n-2}$$

起拱點では $x = l_0$ 、 $w_x = w_s$ であるから、 $H = \frac{w_s}{a(n-1)nl_0^{n-2}}$ 、此の H を上式に代入すれば、

$$w_x = \frac{w_s \cdot x^{n-2}}{l_0^{n-2}} = w_s \cdot \xi^{n-2} \dots \dots \dots (12-35)$$

- (a) $n=1$ の場合 (拱軸線は直線) $\dots \dots \dots w_c = w_s \cdot \frac{1}{\xi}$ (荷重曲線は双曲線)
- (b) $=2$ " (" 二次拋物線) $\dots \dots \dots w_c = w_s$ (" 直 線)
- (c) $=3$ " (" 三次拋物線) $\dots \dots \dots w_c = w_s \cdot \xi$ (" 直 線)
- (d) $=4$ " (" 四次拋物線) $\dots \dots \dots w_c = w_s \cdot \xi^2$ (" 拋物線)

甚だ略算的ではあるが、之によつても壓力線と荷重曲線との間の関係の大略を窺知することが出来る (第 12-15 圖)。

5) 變垂曲線使用に對する注意 第 12-26 式に示した變垂曲線は獨乙に於てファーバー、シュトラアスナアが其の著書に掲げたものであるが、* 19 世紀英國に於てランキン**は既に之を石造拱に適用してゐる。著者は本式を東京八重洲橋に於て始めて使用した。

變垂曲線を以て鉛直分布荷重に對する壓力線と爲す事は數學的に正しい事である。之を拱肋の軸線に撰べば與へられた荷重に對して其の拱肋には軸推力のみ生じ經濟的に材料を使用しうるのであるが、之が適用に關しては次に摘記した諸項に注意すべきである。

(1) 拱肋に作用する荷重は多くの場合に於て一定ではない。従つて一定の荷重を以て定めた壓力線を以て拱軸線と爲しても、此の拱軸線は載荷状態の異つた場合には壓力線と合致しない。其所で問題となるのは、如何なる載荷状態の壓力線を以て拱軸線と爲すべきか、であるが之に對しては、(a) 死荷重のみを採るもの、(b) (死荷重 + $\frac{1}{2}$ 等分布活荷重満載) を採るものとの二つが在り、後者は満載等分布活荷重の影響を考慮に入れてあるから穩當であるとの見解の下に、後者即ち (b) が一般に用ひられてゐる。(a) を採れば $m = w_s \div w_c$ の數が大となるからアーチは中央部で扁平化し、溫度應力其他の縦荷重に對して順應する形となり、(a) を用ひる事は必ずしも不穩當では無いと考へられるのである。此事は活荷重影響に較べて死荷重、溫度變化、塑性流動、等の影響の大なる橋梁に於て考慮すべきである。

(2) 變垂曲線を作る分布荷重は第 12-23 式或は $w_x = w_c + \alpha \cdot y$ なる形を有し、荷重曲線と變垂曲線とは互に獨立したもので無いから、單に拱頂點荷重強度 w_c と起拱點荷重強度 w_s を求め之から $m = w_s \div w_c$ を決定して拱橋諸部分の構造を設計しても、若し其所

* Farber, R. "Neues Verfahren zur raschen Ermittlung der Formen und der Normalkräfte in Gewölbe". D. Bauzeitung, 1915, Nr. 3.

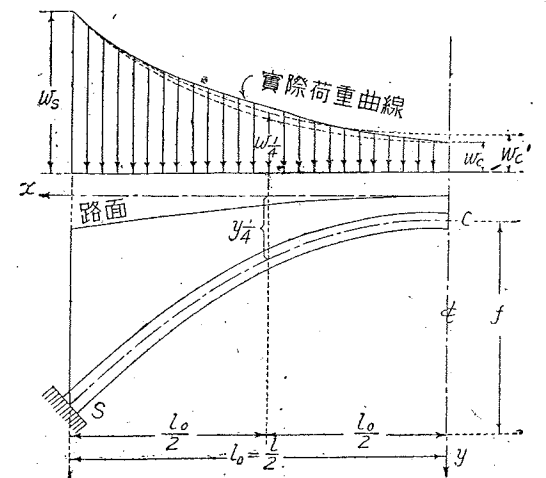
Strassner, A. "Neuere Methode". Band II, 1923, 1938.

** 第 12-26 式はランキンによれば、 $y = r \frac{\alpha}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} a^2$

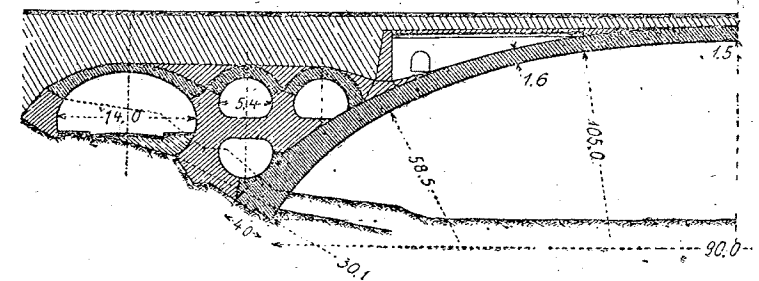
茲に a は變數、 r は $y = \frac{\alpha}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ なる垂曲線との縦距比である。

に $w_x = w_c + \alpha \cdot y$ 或は第 12-23 式の $w_x = w_c \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right]$ が成立しないやうな荷重曲線であるならば、求めた變垂曲線は全く意味なき曲線に終るのである。

之を第 12-16 圖の對稱拱で説明すれば、假に決定された拱軸線から出發して拱肋及び床部を定め、之に基いて各點の荷重強度を算出しその結果を圖示して荷重曲線を畫くのであるが、若し此の荷重曲線が凹凸のある曲線或は不連続なる曲線 (例へば、圖示のうちの實線) であるとすれば、それは明に $w_c = w_c + \alpha \cdot y$ を満足してゐないのであつて、斯くの如き荷重曲線に對しては變垂曲線は存在し得ないのである。 $m = w_s / w_c$ によつて求められる變垂曲線は下側點線の荷重曲線に對する變垂曲線であつて實際荷重曲線に對するものとは聊か違ふのである。上側の點線で示した荷重曲線は實際荷重曲線の平均値を抑えた曲線であつて、之による w_c' を用ひて m を定め、その m によつて變垂曲線を作れば、この變垂曲線は實際荷重に對する變垂曲線と見做しても實用上大差は無いであらう。如何にして w_c' を定むるかは技術的な問題である。場合によれば w_s に對しても之と同じやうに修正の必要な場合がある。



第 12-16 圖



第 12-17 圖 (I)

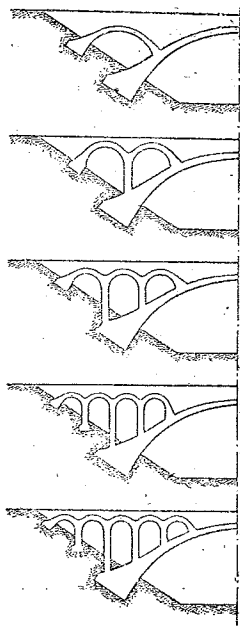
開側拱 (床部が支柱或は支壁にあるもの) では、 w_s を計算し難い事が屢々生ずる。斯くの如き場合には、起拱點を除いた各支柱 (支壁) 點の荷重強度を計算し、之によつて荷重曲線を畫き、この曲線を巧みに延長して起拱點上に及ぼし、之から w_s を推理的に求めても良いが、起拱點に支柱が無くて此所にも恰も支柱が在るやうに假想して w_s を算出し且つ全荷重曲線を畫いて前記の修正を行ふのは確實なる方法である。何れにせよ、單に w_s と w_c だけを計算し之から求めた m によつて變垂曲線を定め、この曲線を直に拱軸線とすることは不合理である。

荷重曲線に凹凸ある場合は、拱脊填材に單位重量の異なるものを用ひる事によつて (例へ

ば、曲線の凸部には軽コンクリートを部分的に使用し、或は内部に空洞を残す事、等によつて) 曲線を修正する事が可能であり、* 著者は此の方法を朽木縣境橋の設計に用ひた。

アーチの設計、特に鉄筋コンクリート拱の設計に於ける拱軸線決定に關しては、凡その次に示す順序の操作が必要である。

- (i) 與へられたアーチは其の様式(開側拱であるか、閉側拱であるか)が既に定められて在り、其の支間及び拱矢も亦定められて在るとする。
- (ii) 拱軸線を缺圓或は拋物線なりとして拱軸を畫き、之に基いて各部寸法を定め、斯くして起拱點及び拱頂點の荷重強度 w_s 及び w_c をそれぞれ算出する。
- (iii) w_s/w_c を定めて之により拱軸線を算定し(此の場合には拱軸線に前掲の近似式を用ひても差支えない)、この拱軸線に基いて各部寸法を定めた後、拱軸各點の荷重強度を算定する。
- (iv) 荷重曲線が果して使用した拱軸線に對して妥當であるか否かを判断する。第 12-16 圖に示したやうに不連続的、或は凹凸ある荷重曲線である場合には之を上述の方法によつて修正し、新しく m の値を求めて再び拱軸線を決定する。



第 12-17 圖 (II)

斯くして逐次試算的に定めた拱軸線は、拱軸線に變垂曲線を選ぶ限りに於ては、比較的合理的なものであるに違ひない。然し之が比較的正しいものであるか否かは次の方法によつて調べてみる必要がある。

$$\left. \begin{aligned} y_{\frac{1}{4}} &= \frac{f}{m-1} \left(\sqrt{\frac{m+1}{2}} - 1 \right) = \frac{f}{2 + \sqrt{2(m+1)}} \\ m &= \frac{1}{2} \left(\frac{f}{y_{\frac{1}{4}}} - 2 \right)^2 - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12-29)$$

(iv)で定められた拱軸線の $\frac{1}{4}$ 點の縦距 $y_{\frac{1}{4}}$ の値を上式に入れて、 m を求め、この m が假定の値に合致してゐるか否かを調べるのである。若し近似してゐなければ其の場合は、この m の値と w_s の値から、

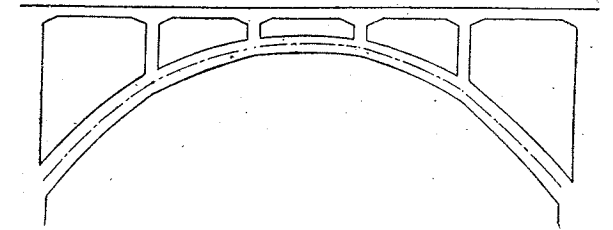
$$w_c = \frac{w_s}{m}$$

* 古來の石造拱には第 12-17 圖の如く、側壁に孔を明け或は凹部を設けたものが尠くない。之は重量軽減の爲であるか或は拱軸線を壓力線に合致せしめる爲か、其の眞意は測り難いが、上述の問題に對して一つの暗示を與へるものである。

によつて w_c の値を逆算し、この架空的な w_s を以て其のアーチの拱頂點荷重と看做すより外はないのである。但し、以上の操作を施してなほ且つ近似せず、精確を缺くやうに判断される場合には、

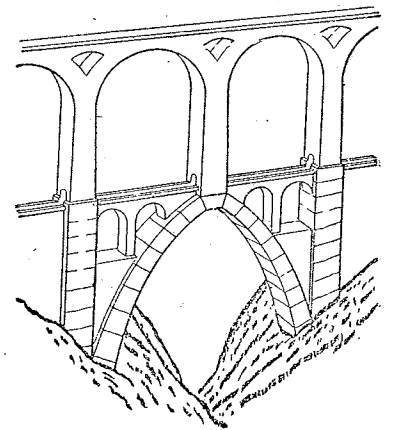
- (v) 拱脊填材の高さ及び比重、支柱の大きさ、床構造、等に互り設計を變更し、 w_s の値を變へて再出發する。
- (vi) 或は、變垂曲線公式を拋棄して、第 12-20 式により拱肋各點の縦距を求め、これを曲線定規で結んで圖上に拱軸線を定め、之に一步を進めれば第 12-22 式によつて曲線を定めるのである。

世上屢々散見する所の設計にあつては上述の (iv) 以下の修正を行はないものが多いが、理論公式たる變垂曲線は實際に合致しない所が多いのであるから之が實用には上述の諸注意が甚だ重要である事を特記するのである。歐洲の設計に於ては變垂曲線を用ひず §5. に示した方法によつて居るものが尠くないのであるが、之にはそれだけの理由が充分存在するのである。但し、第 12-20 式による場合、拱軸線切線の傾角は圖上より測角する事となるのであるが、第 12-22 式の曲線を用ひれば傾角は容易に求められる。



第 12-18 圖 (I)

開側型のアーチで床が支柱(支壁)で支えられてゐる場合には、拱肋は集中荷重に作用されると考へるか否かが一つの問題である。支柱から拱肋に傳えられる荷重は拱肋上に或る程度分布するから、之を理論的集中荷重として取扱ふのは不當であるが、それは決して等分布荷重ではない。然し、格點附近に偏在する分布荷重として扱ふことは實用上困難を生ずるので、普通は格點集中荷重を格間長で除し、之が等分布するものとして拱軸線を求めるのである。格間の長い(支柱の尠い)アーチで若し床からの荷重が各格點に或る程度集中するものと考へれば拱軸線は不連続曲線となる(第 12-18 圖(I))。



§7. 不對稱變垂曲線

左右起拱點の高さ不同，路面勾配は左右起拱點を結ぶ直線に平行なる第 12-19 圖の如き不對稱拱に對して，その變垂曲線としての壓力線は次の如くして求める事が出来る。茲に中心線に \bar{y} 軸をとり，拱頂點に於て路面に平行に \bar{x} 軸を採るものとし，縦横兩軸の挾角を $90^\circ - \theta$ とする。

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \lim_{d\bar{x} \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \{90^\circ - (\theta + \varphi)\}} = \frac{\sin \varphi}{\cos(\theta + \varphi)} = \bar{y}'$$

拱肋任意點に於て

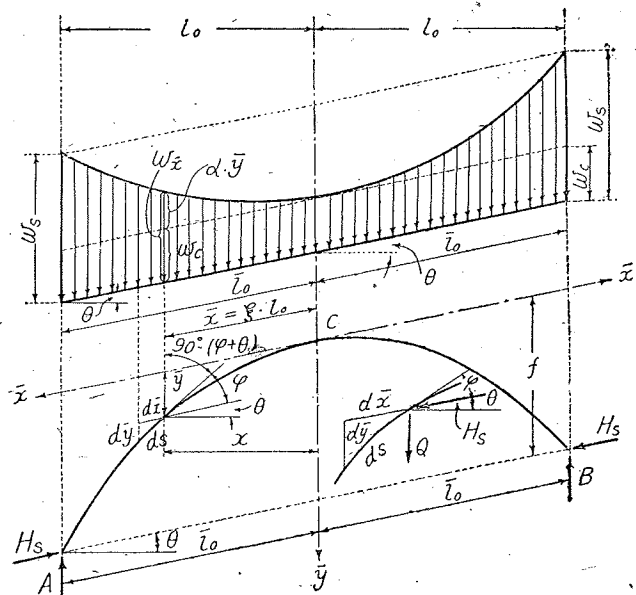
$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{Q}{H_s} = \frac{1}{H_s} \cos \theta \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} w_x \cdot d\bar{x} ; \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} \cdot H_s = \cos \theta \cdot w_x$$

荷重強度 w_x は對稱拱に於けると同様に (第 12-23 式参照)，

$$w_x = w_c + \alpha \cdot \bar{y} = w_c \left[1 + \frac{\bar{y}}{f} (m-1) \right]$$

$$H_s \cdot \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = w_c \left[1 + \frac{\bar{y}}{f} (m-1) \right] \cdot \cos \theta$$

對稱拱に於けるやうに



第 12-19 圖

$$\bar{x} = \xi \cdot \bar{l}_0 ; d\bar{x} = d\xi \cdot \bar{l}_0 ; d\bar{x}^2 = \bar{l}_0 \cdot d\xi^2$$

然るときは

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\xi^2} = \frac{w_c \cdot \bar{l}_0^2}{H_s} \cdot \frac{(m-1)}{f} \cdot \cos \theta \cdot \bar{y} = \frac{w_c \cdot \bar{l}_0^2}{H_s} \cdot \cos \theta$$

$$k^2 = \frac{w_c \cdot \bar{l}_0^2 \cdot (m-1)}{f \cdot H_s} \cdot \cos \theta \text{ とすれば}$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} - k^2 \cdot \bar{y} = k^2 \frac{f}{m-1} \dots \dots \dots (12-36)$$

此の壓力線微分方程式は，

$$\bar{y} = -\frac{f}{m-1} + C_1 \cdot e^{\xi k} + C_2 \cdot e^{-\xi k}$$

$\xi=0$; $\xi=1$; $\xi=-1$ の各場合から定値 C_1 及び C_2 を解けば，

$$\bar{y} = -\frac{f}{m-1} + \frac{f}{m-1} \cdot \frac{1}{2} (e^{\xi k} + e^{-\xi k})$$

或は

$$\bar{y} = \frac{f}{m-1} [\cosh \cdot \xi k - 1] \dots \dots \dots (12-37)$$

上式によつて示されるやうに，起拱點の高さが不同であつてもアーチが斜方向に對稱なる荷重を受けてゐる場合には，そのアーチの壓力線は前節の全く對稱なるアーチに對する壓力線と同様の變垂曲線で示され，唯違ふ所は傾角 θ の入る爲に \bar{x} , \bar{y} なる非直角座標が用ひられる事である。若し之を直角座標によつて表さうとすれば，

$$\bar{x} = x \cdot \sec \theta ; \bar{y} = y - x \cdot \tan \theta ; \xi = \frac{\bar{x}}{\bar{l}_0} = x/l_0$$

$$y = x \cdot \tan \theta + \frac{f}{m-1} [\cosh \cdot \xi k - 1] \dots \dots \dots (12-38)$$

以上に論じた片勾配路面は鐵道橋その他に於てアーチの起拱點が同高なる場合に於ても屢々施工せられるのである。第 12-20 圖に示す荷重強度圖は，左右起拱點の高さ同じく併し乍ら路面は片勾配を爲してゐるアーチの死荷重を示す。任意點荷重強度は，

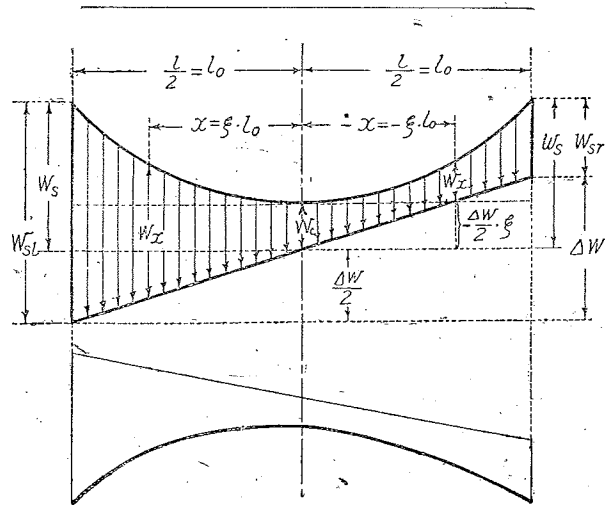
$$w_x = w_c + \alpha \cdot y + \frac{\Delta w}{2} \cdot \xi ; (\xi = 0 \sim \pm 1)$$

起拱點に於ては，

$$w_{sL} = w_c + \alpha \cdot f + \frac{\Delta w}{2} ; w_{sR} = w_c + \alpha \cdot f - \frac{\Delta w}{2}$$

或は

$$w_{sL} = w_s + \frac{\Delta w}{2} ; w_{sR} = w_s - \frac{\Delta w}{2}$$



第 12-20 図

茲に、 $\alpha = \frac{1}{f} (w_s - w_c) = \frac{w_c}{f} (m-1)$ であるから、

$$w_x = w_c \left[1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi + \frac{y}{f} (m-1) \right] \dots\dots\dots (12-39)$$

本式は對稱拱の第 12-23 式に相當する荷重強度公式である。此の場合に於ても第 12-25 式は成立すべきであるから、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_x}{H} = \frac{w_c}{H} \left[1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi + \frac{y}{f} (m-1) \right]$$

茲に $k^2 = \frac{w_c(m-1)l_0^2}{f \cdot H}$ とすれば、

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - k^2 \left[y + \frac{f}{(m-1)} + \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{f \cdot \xi}{(m-1)} \right]$$

之が解は

$$y = C_1 \cdot e^{+\xi k} + C_2 \cdot e^{-\xi k} - \frac{f}{(m-1)} \left(1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \right)$$

$\xi = \pm 1$ のとき $y = f$ なるを以て此の関係を上式に入れれば、

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{(m-1)} \left(1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{1}{\sinh \cdot k} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{(m-1)} \left(1 - \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{1}{\sinh \cdot k} \right)$$

之を上式に入れれば第 12-26 式を得たのと同じやうに、

$$y = \frac{f}{(m-1)} \left[\frac{1}{2} (e^{+\xi k} + e^{-\xi k}) + \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{1}{\sinh \cdot k} \cdot \frac{1}{2} (e^{+\xi k} - e^{-\xi k}) - 1 - \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \right] \dots\dots\dots (12-40)$$

$$= \frac{f}{(m-1)} \left[\cosh \cdot \xi k - 1 + \frac{4w}{2w_c} \left(\frac{\sinh \cdot \xi k}{\sinh \cdot k} - \xi \right) \right]$$

なる壓力線方程式を得るのである。

k の値は、 $\xi = 1$ のとき $y = f$ であるから、

$$m-1 = \cosh \cdot k - 1 + \frac{4w}{2w_c} \left(\frac{\sinh \cdot k}{\sinh \cdot k} - 1 \right) \therefore \cosh \cdot k = m$$

即ち第 12-27 式と同一の値である。以上の結果を綜合すれば、起拱點同高にして片勾配路面を有するアーチの壓力線は路面が左右對稱なるアーチの壓力線に比して、

$$\Delta y = \frac{f}{(m-1)} \cdot \frac{4w}{2w_c} \left[\frac{\sinh \cdot \xi k}{\sinh \cdot k} - \xi \right] \dots\dots\dots (12-41)$$

だけの差を持つてゐるのである。

$m = \frac{w_s}{w_c} = 1$ なる場合には、 $\frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{w_x \cdot l_0^2}{H}$ を 2 回積分して $y = f(\xi)$ を求めればよい。

即ち、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_x}{H} = \frac{w_c}{H} \left[1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \right], \text{ 或は } \frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{w_c \cdot l_0^2}{H} \left[1 + \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \right]$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{w_c \cdot l_0^2}{H} \left(\xi + \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{\xi^2}{2} + C_1 \right); y = \frac{w_c \cdot l_0^2}{H} \left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{4w}{2w_c} \cdot \frac{\xi^3}{6} + C_1 \cdot \xi \right) + C_2$$

$\xi = \pm 1$ のとき $y = f$ なる関係を入れれば、

$$C_1 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{4w}{2w_c}; C_2 = 0$$

$$y = f \cdot \xi^2 + \frac{f}{3} \cdot \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \cdot (\xi^2 - 1) \dots\dots\dots (12-42)$$

即ち $m = 1$ の場合は、 $\Delta y = \frac{f}{3} \cdot \frac{4w}{2w_c} \cdot \xi \cdot (\xi^2 - 1)$ だけの變化ある拋物線で示されるのである。

§ 8. 變垂曲線の傾角及び拱肋支點反力

壓力線切線の水平線に對する傾角 φ は、

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi \dots\dots\dots (12-43)$$

から求められる。拱軸線が第 12-26 式に示す變垂曲線の場合は、

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{f \cdot k}{l_0(m-1)} \cdot \sinh \cdot \xi k \\ \tan^2 \varphi &= \frac{4f^2}{l_0^2} \cdot \frac{k^2}{(m-1)^2} \cdot \sinh^2 \cdot \xi k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12-44)$$

起拱點に於ける傾角は、 $\xi=1$ であるから、*

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi_s &= \frac{f \cdot k}{l_0(m-1)} \sinh \cdot k \\ &= \frac{fk\sqrt{m^2-1}}{l_0(m-1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12-45)$$

スパンの $1/4$ 點の傾角は、 $\xi=0.5$ を挿入して

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi_{\frac{1}{4}} &= \frac{f \cdot k}{l_0(m-1)} \sinh \cdot \frac{1}{2}k \\ &= \frac{f \cdot k}{l_0\sqrt{2(m-1)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12-46)$$

$w_x = w_0 + \alpha \cdot y$ なる分布荷重を受ける變垂曲線拱の支點に於ける反力は、 V を鉛直反力とすれば、

$$V = \int_0^{l_0} w_x dx = l_0 \int_0^1 w_x \cdot d\xi$$

茲に第 12-23 式及び第 12-26 式から、

$$\begin{aligned} w_x &= w_c \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] \\ &= w_c [1 + \cosh \cdot \xi k - 1] = w_c \cdot \cosh \cdot \xi k \end{aligned}$$

依つて

$$\begin{aligned} V &= w_c \cdot l_0 \int_0^1 \cosh \cdot \xi k \cdot d\xi \\ V &= w_c \cdot l_0 \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} = w_c \cdot l_0 \cdot \frac{\sinh \cdot k}{k} \dots\dots\dots (12-47) \end{aligned}$$

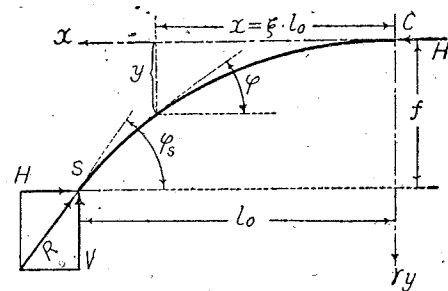
$k^2 = \frac{w_c (m-1) l_0^2}{f \cdot H}$ から、

$$H = w_c \frac{l_0^2 (m-1)}{f \cdot k^2} \dots\dots\dots (12-48)$$

拱軸線の軸推力 N は、

$$N = H \cdot \operatorname{cosec} \varphi = H \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \dots\dots\dots (12-49)$$

* $\sinh \cdot k = \sinh \cdot 2 \cdot \frac{k}{2} = 2 \sinh \cdot \frac{k}{2} \cdot \cosh \cdot \frac{k}{2} = 2 \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh \cdot k - 1)} \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh \cdot k + 1)}$
 $= 2 \sqrt{\frac{1}{2}(m-1)} \sqrt{\frac{1}{2}(m+1)} = \sqrt{m^2-1}$



第 12-21 圖

支點の合反力は

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{H^2 + V^2} = H \cdot \operatorname{cosec} \varphi_s \\ &= H \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_s} \\ &= H \sqrt{1 + \left\{ \frac{f \cdot k}{l_0(m-1)} \right\}^2 (m^2-1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12-50)$$

【算 例】 第 286 頁所載の支間 24 m、拱矢 5 m なる鉄筋コンクリート拱の拱軸線を變垂曲線によつて設計せんとす。

$m = w_s + w_c$ の略値は前算例によれば 6.7 であつたが、計算から求めた拱軸線に基いて新しく縦断面を製圖し、その結果から改めて荷重強度を求めれば、

$$w_c = 0.40 \times 2.4 + 4.40 \times 1.7 = 1.640 \text{ t/m}^2 \text{ (同前)}$$

$$w_s = 1.12 \times 2.4 + 4.92 \times 1.7 = 11.052 \text{ t/m}^2$$

$$m = w_s + w_c = 11.052 + 1.640 = 6.74$$

之によつて $m = 6.8$ を採用する (荷重曲線を畫き、之が第 12-23 式に妥當するか否かを照査する事は勿論必要である)。

$$\log_{10} (m + \sqrt{m^2-1}) = \log_{10} 13.526 \quad \therefore k = \log_n (m + \sqrt{m^2-1}) = 2.6061$$

變垂曲線縦距 $y = \frac{f}{m-1} [\cosh \cdot \xi k - 1]$; $\frac{y}{f} = \frac{1}{m-1} [\cosh \cdot \xi k - 1]$

變垂曲線概距 $\frac{1}{m-1} = 0.172114$

徑間 $1/4$ 點の縦距 $y_{\frac{1}{4}} = 0.843 \text{ m}$ から m の値を調べれば、

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{y_{\frac{1}{4}}} - 2 \right)^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{0.843} - 2 \right)^2 - 1 = 6.73 (\approx 6.74)$$

分 格 點	11	10	9	8
ξ	0.08333	0.16667	0.25000	0.33333
$\xi \cdot k$	0.21705	0.43410	0.65115	0.86820
$\cosh \cdot \xi k$	1.02363	1.09573	1.21960	1.40116
y/f	0.00407	0.01651	0.03786	0.06916
$y \text{ (m)}$	0.0201	0.0825	0.1893	0.3458
分 格 點	7	6 (1/4 點)	5	4
ξ	0.41667	0.5	0.58333	0.66667
$\xi \cdot k$	1.08525	1.30230	1.51936	1.73641

cosh ξk	1.64904	1.97484	2.39402	2.92657
y/f	0.11190	0.16858	0.24035	0.33217
y (m)	0.5595	0.8429	1.2018	1.6611
分 格 點	3	2	1	0 (起拱點)
ξ	0.75000	0.83333	0.91667	1
$\xi \cdot k$	1.95343	2.17051	2.38756	2.60461
cosh $\cdot \xi k$	3.59727	4.43843	5.48933	6.80001
y/f	0.44781	0.59283	0.77402	1.00000
y (m)	2.2395	2.9642	3.8701	5.0000

以上は第 12-2 表を使用して計算したものであつて、 y/f は第 12-1 表 $m=6.8$ の y/f 値と同値である。

拱軸線切線の傾角

$$\tan \varphi = \frac{k}{m-1} \cdot \frac{f}{l_0} \cdot \sinh \cdot \xi k \dots \dots \dots (12-44)$$

$$\frac{k}{m-1} \cdot \frac{f}{l_0} = \frac{2.60461}{6.8-1} \cdot \frac{5}{12} = 0.18711$$

分 格 點	10	8	6 (1/4 點)	4	2	0 (起拱點)
$\xi \cdot k$	0.43410	0.86820	1.30230	1.73641	2.17051	2.60461
$\sinh \cdot \xi k$	0.44799	0.98040	1.70293	2.75048	4.32432	6.72613
$\tan \varphi$	0.08382	0.18344	0.31864	0.51464	0.80012	1.25853
φ	4° 48'	10° 24'	17° 40'	27° 14'	40° 0'	51° 32'

§ 9. 鐵筋コンクリート無鉸拱の拱肋厚さ

鐵筋コンクリート拱の拱肋厚さは、如何なる部分に於ても壓縮應力が許容壓縮應力を超過せず且つ壓縮應力は小に失する事なく、まして引張應力の生じないやうな寸法を保つ事を理想とする。此の事に對して、若し載荷重が一定不變のものであれば吾々は容易に各断面各部の壓縮應力が丁度許容應力に等しいやうに断面を定める事が出来るのであるが、活荷重の偏在、溫度變化、コンクリートの變形、等の諸原因は此の寸法決定を困難たらしめるのである。拱肋断面は矩形たるを普通とするのであるが、各部分の厚さ d の變化する割合は、以上の要求に合致する事が第一に望ましいのであると共に、不靜定未知量の算定式に於て $\frac{ds}{I}$ 或は $\frac{dx}{I \cos \varphi}$ の取扱ひを簡單たらしめるものである事が望ましいのである。従つて拱肋厚さは、第一に拱頂點の厚さを決定し、第二に之に對する各部の厚さの割合を

決定するのが順序である。

1) 拱頂點厚さ 無鉸拱拱頂點厚さを定むべき方法の中で最も簡易なるものは過去の經驗に立脚して作製された所謂實驗公式であつて、その數は十指を屈して餘りがあるが、代表的なのは 1905 年ウェルドが作り其後改訂せられた米國の公式であつて、

$$\text{拱頂點拱肋厚さ } d_c = c \left(\sqrt{l} + \frac{l}{10} + \frac{w}{200} + \frac{w'}{490} \right) \dots \dots \dots (12-51)$$

$$\begin{aligned} \text{無鐵筋コンクリート拱に對し } c &= \frac{450}{\sigma_c} \\ \text{鐵筋 } \text{ " } \text{ " } &= \frac{450}{1.14\sigma_c} \end{aligned}$$

式中、 l =支間 (呎) w =等分布活荷重 (封度每平方呎)

c =定値 w' =拱頂點上の填材その他 (封度每平方呎)

σ_c =許容壓縮應力 (封度每平方呎)

本式は其の形から自明であるやうに拱矢 f に直接の關係なく略値を與へるに過ぎないのである。

荷重が一定不動であれば拱肋を壓力線に合致せしめる事によつて拱頂點の推力を其の重心に作用させる事が出来るから、拱頂斷面の壓縮應力は上下兩縁共均一化し肋厚の決定は簡單であるが、荷重の偏在、殊に肋縮影響を考慮するときは上下兩縁の應力に差異を生じ、荷重の組合せ如何によつては下縁に引張應力が生ずるのである。斯うした事を考慮して拱肋厚さを定めるには断面の上下兩縁に生ずべき應力の大きさを先づ決定し、次に之に對して適當な断面を定むべきであり、此の點から出發した拱頂點肋厚決定法にはトルクミット及びシュトラアスナアの方法がある。*

トルクミット公式は

$$d_c = \left[0.15 \frac{l^2}{f} \left(e + \frac{p}{2} + \frac{f}{10} \right) \right] + \left(q - 0.15 \frac{l^2}{f} \right) \dots \dots \dots (12-52)$$

式中、 l =支間 (m) ; f =拱肋下縁線拱矢 (m) ; e =拱背填材換算高 (m)

p =分布活荷重換算高 (m) ; q =平均壓縮強度換算高 (m)。換算高とは該荷重を拱肋材料單位重量で除した商を謂ひ、 q は $p/2$ 滿載時に於ける拱頂斷面壓縮應力と同等或は之以下の大きとする。此の厚さは $\left(\text{死荷重} + \frac{1}{2}p \right)$ を滿載したときの必要値であつて、 p を半徑間 (片半分) に滿載したときの次式による d_c を併せて計算し、その孰れか大なるものを探るべきものとしてゐる。

$$d_c \equiv \sqrt{\left(\frac{e}{4} + \frac{p}{20} + \frac{f}{20} \right)^2 + 0.4pf} - \left(\frac{e}{2} + \frac{p}{4} + \frac{f}{20} \right) \dots \dots \dots (12-53)$$

* Tolkmitt. " Berechnung Gewölbter Brücken ". 1912. S. 39~47.

Strassner. " Neuere Methoden " 前掲, S. 122.

シュトラアスナアは、拱頂断面に作用する推力及び曲げモーメントの最大及び最小値を彼の作製した数表から最も影響を與へる場合に就て求め、 $\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} y$ の公式によつて應力を定める公式を作り、此の應力に對して適當な肋厚を與ふるべき d_c の公式を導いてゐる。

死荷重推力は第 12-48 式から、

$$H_d = w_c \frac{l_0^2(m-1)}{f \cdot k^2} = k_g \cdot \frac{w_c \cdot l^2}{f} \quad \text{茲に } k_g = \frac{(m-1)^2}{4k^2}$$

k_g は m の大きと共に變化するが、肋厚變化が $n=0.3$ の場合には、

$$k_g = 0.108 + 0.019m - 0.0005m^2$$

で示す事が出来る。分布活荷重による推力は同様の方法で、

$$H_l = k_p \cdot \frac{p \cdot l^2}{f} ; k_p = 0.0579 + 0.0035m$$

分布活荷重によつて生ずべき曲げモーメントは、

$$M_l = u_p \cdot p l^2 ; u_p = 0.00426 + 0.00037m$$

同様にして温度變化並に死荷重肋縮作用に基く推力及び曲げモーメントの大きを定める事が出来る。

拱肋断面に生ずべき應力は、幅 $b=1m$ に對して

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \pm \frac{6M}{d^2} = \frac{H}{A \cdot \cos \varphi} \pm \frac{6M}{d^2} \quad \text{茲には (+) を壓縮とす。}$$

各原因による H 及び M の値を此式に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{拱頂断面 } \sigma_o \} &= K_1 \cdot \frac{l^2}{d_c \cdot f} + K_2 \cdot \frac{d_c^2}{f^2} + K_3 \cdot \frac{l^2 d_c}{f^3} \pm 6 \left(U_1 \cdot \frac{l^2}{d_c^2} + U_2 \cdot \frac{d_c}{f} + U_3 \cdot \frac{l^2}{f^2} \right) \\ \sigma_u \} & \\ \text{起拱断面 } \sigma_o \} &= K_1 \cdot \frac{l^2}{d_s \cdot f \cos \varphi_s} + K_2 \cdot \frac{d_c^2}{d_s \cdot f^2} \cdot \cos \varphi_s + K_3 \cdot \frac{l^2 \cdot d_c^2}{d_s \cdot f^3 \cdot \cos \varphi_s} \\ \sigma_u \} & \pm 6 \left(U_1 \cdot \frac{l^2}{d_s^2} + U_2 \cdot \frac{d_c^2}{d_s^2 \cdot f} + U_3 \cdot \frac{l^2 \cdot d_c^2}{d_s^2 \cdot f^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

式中 $K_1 = k_g \cdot w_c + k_p \cdot p$ 死活兩荷重の H に對する係數

$K_2 = k_t \cdot t ; K_3 = k_e \cdot w_c$ 温度變化及び肋縮の H に對する係數

$U_1 = u_p \cdot p ; U_2 = u_t \cdot t ; U_3 = u_e \cdot w_c$ 活荷重、温度變化、肋縮の M に對する係數

之等の中で、 K_2 及び K_3 の關係項は断面應力に (\pm) の影響を與へる特別のものであるから之を除外し、その代りに U_2 及び U_3 に別の係數を乗ずる事とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{拱頂断面 } \sigma_o \} &= K_1 \cdot \frac{l^2}{d_c \cdot f} \pm 6 U_1 \cdot \frac{l^2}{d_c^2} \pm 6(1 \mp \psi_c) \left[U_2 \cdot \frac{d_c}{f} + U_3 \cdot \frac{l^2}{f^2} \right] \\ \sigma_u \} & \\ \text{起拱断面 } \sigma_o \} &= \frac{K_1}{\cos \varphi_s} \cdot \frac{l^2}{d_s \cdot f} \pm 6 U_1 \cdot \frac{l^2}{d_s^2} \pm (1 \pm \psi_s \cdot \cos \varphi_s) \left[U_2 \cdot \frac{d_c^2}{d_s^2 \cdot f} + U_3 \cdot \frac{l^2 \cdot d_c^2}{d_s^2 \cdot f^2} \right] \\ \sigma_u \} & \end{aligned} \right\} \dots (12-54)$$

$$\psi_c = \frac{4}{5} \cdot \frac{d_c}{f} ; \psi_s = \frac{2}{9} \cdot \frac{d_s}{f} \dots (n=0.3 \text{ なるとき})$$

今、 $n=0.3$ (第 12-64 式) の場合に、

$$k_g = 0.1080 + 0.0190m - 0.0005m^2 ; k_p = 0.0579 + 0.0035m$$

$$u_p = 0.00426 + 0.00037m ; u_t = -9.10 + 0.04m ; u_e = 0.0408 + 0.006m$$

σ_o 或は σ_u の許容値を σ_a とすれば、上式から d_s 及び d_c が求められる。

$$\text{拱頂點厚さ } d_c = \frac{K_1 \cdot l^2}{2f\sigma_a} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{24\sigma_a \cdot U_1}{(K_1 l + f)^2}} \right] \dots (12-55)$$

$$\text{式中 } \sigma_a' = \sigma_a - 6(1 - \psi_c) \left[U_2 \cdot \frac{d_c}{f} + U_3 \cdot \frac{l^2}{f^2} \right]$$

$$\text{起拱點厚さ } d_s = \frac{K_1 \cdot l^2}{2f\sigma_a \cdot \cos \varphi_s} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma_a \cdot C}{(K_1 l + f \cdot \cos \varphi_s)^2}} \right] \dots (12-56)$$

$$\text{式中 } C = 6U_1 + 6(-\psi_s \cdot \cos \varphi_s) \left[U_2 \cdot \frac{d_c^2}{f^2} + U_3 \cdot \frac{d_c^2}{f^2} \right]$$

上式の U_2 に於ては温度下降 ($-t$) を採るものとする。

茲に興味ある問題は、拱肋の厚さと其の断面に於ける應力との關係である。梁の場合にあつては、断面が小であるときは應力は大となり、動ともすると許容應力の限度を超過するのであるが、断面が大であれば強度も亦大であると言ふ觀念は併し乍ら不靜定拱 (特に無絞拱) の場合には決して當て嵌らないのであつて拱頂断面が過大であると之に比例して應力も亦大となる現象を惹起するのである。拱頂断面に於ける此の現象を明にする爲に、 $w_c = w_c' + \gamma \cdot d_c$ とすれば (γ = 拱肋材料單位重量)、

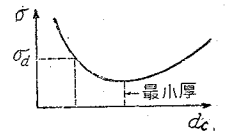
$$K_1' = k_g \cdot w_c' + k_p \cdot p ; K_1'' = k_g \cdot \gamma$$

$$U_1 = u_p \cdot p ; U_2 = u_t \cdot t ; U_3' = u_e \cdot w_c' ; U_3'' = u_e \cdot \gamma$$

然るときは拱頂断面縁推應力は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_o \} &= K_1' \cdot \frac{l^2}{d_c \cdot f} + K_1'' \cdot \frac{l^2}{f} \pm 6U_1 \cdot \frac{l^2}{d_c^2} \pm 6(1 \mp \psi_c) \left[U_2 \cdot \frac{d_c}{f} + U_3' \cdot \frac{l^2}{f^2} + U_3'' \cdot \frac{l^2 \cdot d_c}{f^2} \right] \dots (12-57) \\ \sigma_u \} & \end{aligned} \right\}$$

本式に基いて $\sigma_o = \sigma_u$ と d_c との關係を圖表化すれば第 12-22 圖が得られ、或る厚さに於て應力は最小となり (σ_{min})、その他の厚さでは應力が増大する事が分るのである。



第 12-22 圖

上式の第 1, 2, 3 の諸項は死活兩荷重による應力を、括弧の項は温度變化と死荷重肋縮による應力を夫れ夫れ示すのであるが、第 1, 第 3 の兩項

は d_c に反比例して増減し、括弧内の第 1, 第 3 項は d_c に正比例して増大する。此の關係が第 12-22 圖の曲線を作るのである。

如何なる厚さが σ_a を最小たらしめるかは、 $\frac{d\sigma_a}{dd_c} = 0$ から求められ、即ち、

$$\left. \begin{aligned} \text{最小壓縮力を生} \} & \\ \text{ずる拱頂點厚さ} \} & d_c = \sqrt[3]{\frac{(12U_1 \cdot f + K_1' \cdot d_c) l^2}{6(1 - \psi_c) [U_2 + U_3'' l^2 + f]}} \dots (12-58) \end{aligned} \right\}$$

最小の d_c は本式から試算的に求められる。

同様の事は下縁に生ずべき引張應力 σ_u に就いても起るのである。

$$\left. \begin{aligned} \text{最小引張力を生} \} & \\ \text{ずる拱頂點厚さ} \} & d_c = \sqrt[3]{\frac{(12U_1 \cdot f - K_1' \cdot d_c) l^2}{6(1 + \psi_c) [U_2 + U_3'' l^2 + f]}} \dots (12-59) \end{aligned} \right\}$$

$w_c = w_c' + \gamma \cdot d_c$ に於て w_c' のみ與へられてゐるときは第 12-57 式から

$$\left. \begin{aligned} d_c &= \frac{K_1' \cdot l^2}{2f\sigma_a''} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{24\sigma_a'' U_1'}{(K_1' \cdot l + f)^2}} \right] \\ \sigma_a'' &= \sigma_a - K_1'' \cdot \frac{l^2}{f} - 6(1-\psi_c) \left(U_2 \cdot \frac{d_c}{f} + U_3' \cdot \frac{l^2}{f^2} + U_3'' \cdot \frac{l^2}{f^2} \cdot d_c \right) \end{aligned} \right\} \dots (12-60)$$

【算例】 支間 $l=30\text{m}$, 拱矢 $f=6\text{m}$ の鉄筋コンクリート無鉸拱に於て, $m=w_s+w_c=6$; $n=0.3$; 拱頂填材重量 $w_c'=0.6\text{ t/m}^2$; $\gamma=2.4\text{ t/m}^3$; $\nu=1\text{ t/m}^2$; $t=\pm 20^\circ\text{C}$ となし, 今假りに $d_c=34\text{ cm}$ とすれば:

$$\begin{aligned} w_c &= 0.60 + 2.4 \times 0.34 = 1.42\text{ t/m}^2 & k_g &= 0.1080 + 0.0190 \times 6 - 0.0005 \times 6^2 = 0.2040 \\ k_p &= 0.0579 + 0.0035 \times 6 = 0.0789 & u_p &= 0.00426 + 0.00037 \times 6 = 0.00648 \\ u_c &= -9.1 + 0.04 \times 6 = -8.86\text{ t/m}^2 & u_s &= 0.0403 + 0.0046 \times 6 = 0.0684 \end{aligned}$$

$$\psi_c = \frac{4}{5} \cdot \frac{0.34}{6} = 0.045; \quad 6(1-\psi_c) = 5.73; \quad 6(1+\psi_c) = 6.27$$

許容壓縮應力 $\sigma_a = 550\text{ t/m}^2$ (55 kg/cm^2) とし, 前記假定 $d_c = 34\text{ cm}$ が妥當なるか否かを検査すれば,

$$K_1 = 0.2040 \times 1.42 + 0.0789 \times 1.00 = 0.369\text{ t/m}^2; \quad U_1 = 0.00648 \times 1.00 = 0.00648\text{ t/m}$$

$$U_2 = -9.86(-20^\circ) = 177.2\text{ t/m}^2; \quad U_3 = 0.0684 \times 1.42^2 = 0.0971\text{ t/m}^2$$

第 13-55 式を用ひて,

$$\sigma_a' = 550 - 5.73 \left(177.2 \times \frac{0.34}{6.0} + 0.0671 \times \frac{30^2}{6.0^2} \right) = 479\text{ t/m}^2$$

$$d_c = \frac{0.369 \times 30^2}{2 \times 6 \times 479} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{24 \times 479 \times 0.00648}{(0.369 \times 30 + 6)^2}} \right] = 0.33\text{ m}$$

即ち $d_c = 0.33\text{ m}$ なる假定には大なる誤がない。 $\sigma_a = 550\text{ t/m}^2$ の應力に対する拱頂點肋厚 d_c を第 12-60 式によつて照査すれば, $d_c = 0.33\text{ m}$ のとき該式は満足せられ, $d_c = 0.33\text{ m}$ が適値なるを知る。同式に於て, U_1 及び U_2 の値は同前, 而して

$$K_1' = 0.2040 \times 6.0 + 0.0789 \times 1.00 = 0.201\text{ t/m}^2; \quad K_1'' = 0.2040 \times 0.34 = 0.0694\text{ t/m}^2$$

$$U_3' = 0.0684 \times 0.60 = 0.041\text{ t/m}^2; \quad U_3'' = 0.0684 \times 2.4 = 0.164\text{ t/m}^2$$

最小應力を與ふるべき d_c は 0.33 m より大である事は想像に難くないが, 第 13-58, 59 式を満足せしむべき d_c が如何程であるかは同式によつて試算する。試算の結果最小壓縮應力を與へる厚さは $d_c = 0.81\text{ m}$ なるを知り, 之を第 58 式によつて照査すれば, $\psi_c = \frac{4}{5} \cdot \frac{0.81}{6} = 0.108$; $6(1-\psi_c) = 5.35$

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{12 \times 0.00648 \times 6 + 0.201 d_c}{5.35 (177.2 + 0.164 \times 30^2 + 6)}} = \sqrt[3]{0.389 + 0.168 d_c}$$

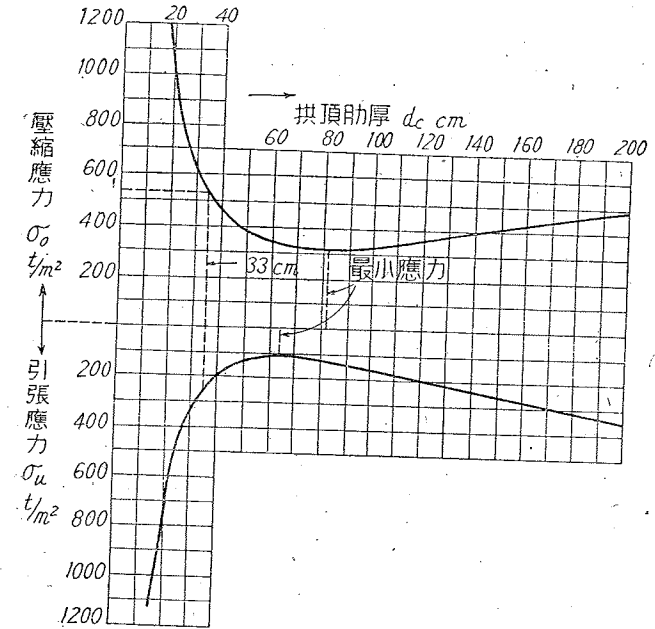
$$d_c = \sqrt[3]{0.389 + 0.168 \times 0.81} = 0.81\text{ m}$$

同様にして最小引張應力を與へる最小厚さが試算の結果 $d_c = 0.64\text{ m}$ なるを知り, 之を第 13-59 式で照査すれば $d_c = 0.64\text{ m}$ の適値なるを知る。

最後に第 13-57 式によつて σ_o ; σ_u と d_c との關係を調べる。

$$\sigma_o = 0.201 \times \frac{30^2}{d_c \times 6.0} + 0.490 \times \frac{30^2}{6.0} + 6 \times 0.00648 \times \frac{30^2}{d_c^2}$$

$$+ 5.73 \left(177.2 \times \frac{d_c}{6.0} + 0.041 \times \frac{30^2}{6.0^2} + 0.164 \times \frac{30^2}{6.0^2} \cdot d_c \right)$$



第 12-23 圖

$$\begin{aligned} &= 80 + 193 \times d_c + \frac{30.1}{d_c} + \frac{35}{d_c^2} \\ \sigma_u &= -0.201 \times \frac{30^2}{d_c \times 6.0} - 0.490 \times \frac{30^2}{6.0} + 6 \times 0.00648 \times \frac{30^2}{d_c^2} \\ &+ 6.27 \left(177.2 \times \frac{d_c}{6.0} + 0.041 \times \frac{30^2}{6.0^2} + 0.164 \times \frac{30^2}{6.0^2} \cdot d_c \right) \\ &= -67 + 212 \times d_c - \frac{30.1}{d_c} + \frac{35}{d_c^2} \end{aligned}$$

d_c (m)	σ_o (t/m^2)	σ_u (t/m^2)
0.20	-1144	699
40	-451	162
60	-343	107
80	-327	110
1.00	-338	150
2.00	-490	351

壓縮には (-) を附す

之等の結果は第 12-23 圖に示す通りである。

以上に示した無鉸拱の支間 l , 拱矢 f , 肋厚 d_c , 應力 σ の諸關係は, 拱の形狀及び寸法に關する重要な要素であつて, シュトラアスナアの U 及び K の値は彼の比較的精密なる數值表から求められてゐるから結果に於ける誤差は蓋し僅少なるものと考へられる。

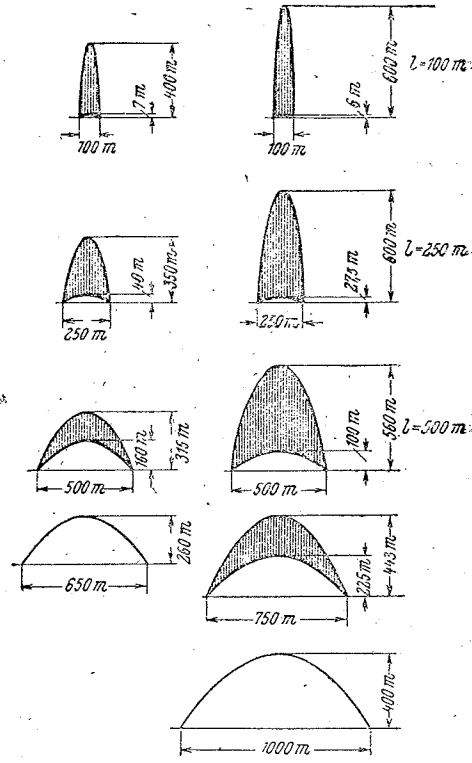
上記諸關係を利用するときは, l 及び σ の與へられた場合の最小拱矢を求める事が出

来る。又、許容應力 σ 及び肋厚 d_c を與へて如何程大なる支間の拱が架設し得べきかを研究する事も出来る。即ち、第 13-57 式に於て許容應力 σ_c を與へれば、

$$l = d_c \sqrt{\frac{\sigma_a - 6(1 - \psi_c) U_2 \cdot d_c \div f}{(K_1' + K_1'' d_c) \frac{d_c}{f} + 6U_1 + 6(1 - \psi_c)(U_3' + U_3'' d_c) \frac{d_c^2}{f^2}}}$$

第 12-24 圖は許容應力を與へたとき、吾々の築造し得べき最大の鉄筋コンクリート拱の大きさは如何程なるか、を示した興味ある一例である。*

2) 拱肋厚さの變化 鉄筋コンクリート無鉸拱に於ける拱肋厚さは、拱頂點及び起拱點に於て前掲の如き方法に據り其の厚さを定めたものとしても、其の他の各断面の厚さを如何に定むべきか、に關しては一定の方法なく、從來の方法には甚だ意味なき設計法も散見するのであるが、拱肋厚さの決定に關しては、各断面が應分の應力を受けて徒に遊ぶことなく、一方に於て断面漸變に就ては不靜定反力の公式の解法を容易ならしめるやうな變化法を保つを可とするのである。



第 12-24 圖

既に第 11 章に於て論じたやうに、 $I_c = I_x \cos \varphi = \text{定値}$ なるやうに各断面が其の位置に於て變化すれば、不靜定反力の解は甚だ容易となるのであるが、断面を矩形 (高さ $d \times$ 幅 b) とするとき、 $I = \frac{1}{12} b d^3$ であつて、拱頂點肋厚を d_c とすれば各断面の肋厚 d_x は

$$d_c^3 = d_x^3 \cos \varphi ; \quad d_x = d_c \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\cos \varphi}} = d_c \cdot \sqrt[3]{1 + \tan^2 \varphi}$$

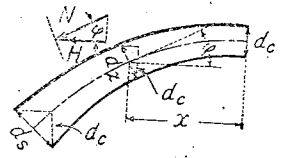
によつて示されることとなる。拱肋各断面に於ける應力状態を觀るに上記關係は各断面應力の變化に副ふ事全く無く、若し之を多少改變して、

$$d_c = d_x \cos \varphi$$

* Barawalla, "Die grösstmöglichen Spannweiten von Eisenbetonbogenbrücken", Beton u. Eisen, 1937, H. 1.

とすれば此の關係式には相當の意味が含まれてゐるのである。即ち、第 12-25 圖を参照して拱肋軸推力を N 、拱肋水平力を H 、拱頂點肋厚を d_c 、拱肋任意點の拱軸線切線の水平傾角を φ とすれば (第 12-25 圖)、

$$N = \frac{H}{\cos \varphi} ; \quad d_x = \frac{d_c}{\cos \varphi} \dots \dots (12-61)$$



第 12-25 圖

なる限りに於て各断面は等強となる。不靜定反力公式の簡易化の爲に此の公式は時として用ひられるが、活荷重及び溫度變化等の不定荷重の作用する拱肋に對して上式は適用し得べくもなく、若し各影響を算入して d_x を定めやうとすれば、前記の d_c を定めた方法に基いて d_c を定むべき式を作製しなければならないのである。

帝都復興の街路橋に於て著者等は次式を屢々採用した (茲に $x = \xi \cdot l_0$ とする)。

$$d_x = d_c \left[1 + v \left(\frac{x}{l_0} \right)^a \right] = d_c [1 + v \xi^a] \dots \dots (12-62)$$

$a=2$ のとき d_x は横距に對して拋物線的に變化し、 $v=1$ なるとき、起拱點の厚 d_s は拱頂點肋厚 d_c の 2 倍となるのである。 $\frac{f}{l} = 1/5 \sim 1/8$ の如き普通の無鉸拱に於ては、 $a=2$ 、 $v=1$ を可とするが、 $\frac{f}{l} \approx \frac{1}{8}$ のやうな比較的扁平な拱では、 $a=2 \sim 2.6$ として拱肋厚が拱頂點に於て小であり起拱點附近に近づくに従つて急激に厚さを増大するやうな断面變化法を用ひれば、溫度變化及び肋縮影響のやうな水平荷重に對して好都合である。斯くの如き場合には第 12-62 式を次の形 (3 次拋物線) に改めるのも一法である。

$$\left. \begin{aligned} \text{或は} \quad d_x &= d_c \{ 1 + v [b \cdot \xi^2 + (1-b) \cdot \xi^3] \} \\ d_x &= d_c \left[1 + \frac{v}{2} (\xi^2 + \xi^3) \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (12-63)$$

本式は拱頂部附近に於ける拱肋厚さの變化が緩漫であつて、死荷重に對して比較的大なる集中荷重が拱頂附近に作用する場合には、拱頂部曲げ應力を増大せしめる懼れがあるが、水平荷重に因る起拱點應力は此の爲に相減されるのである。 v の値は 0.55~1.00 を標準とし $v=1$ とすれば $d_s = 2 \cdot d_c$ となる。又、 $b = 0.6 \sim 0.8$ が適當である。

無鉸拱不靜定反力公式には、 $\frac{I_c}{I_x \cdot \cos \varphi}$ の項が含まれ、若し式中の $\cos \varphi$ を適當に處理することが出来れば積分は甚だ容易となる。是に對しては、

$$f(\xi) = \frac{I_c}{I_x \cdot \cos \varphi} \quad \text{或は} \quad \frac{I_x}{I_c} = \frac{1}{f(\xi) \cdot \cos \varphi}$$

として考へれば、 $f(\xi)$ は

$$\text{拱頂點に於て} \quad \frac{I_c}{I_c} = \frac{1}{f(\xi) \cdot \cos \varphi_c} = 1 \quad \therefore f(\xi) = 1$$

$$\text{起拱點に於て } \frac{I_s}{I_c} = \frac{1}{f(\xi) \cdot \cos \varphi_s} \quad \therefore f(\xi) = \frac{I_c}{I_s \cdot \cos \varphi_s}$$

此の関係から

$$f(\xi) = 1 - \left(1 - \frac{I_c}{I_s \cos \varphi_s}\right) \xi^a = 1 - (1-n) \xi^a$$

とすれば

$$\frac{I_c}{I_s \cdot \cos \varphi} = 1 - (1-n) \xi^a \quad \dots\dots\dots (12-64)$$

マックス・リッタアは $a=2$, 即ち, I_c と $I_s \cdot \cos \varphi$ とは横距の二乗に比例するものとしてゐる。 I_s は I_c に對して既に $\frac{1}{\cos \varphi}$ に比例して増大してゐるのであるから, 此の $a=2$ を採るときは起拱點附近の拱肋厚さ増加率は急激に過ぎる傾向があり, 一般には $a=1$ を採る普通とする。

シュトラアスナア其他の諸家は不靜定反力數値表を作製するに於て, $f(\xi)$ の直線的變化を採り (即ち, $a=1$),

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_c}{I_s \cdot \cos \varphi} &= 1 - (1-n) \xi \\ &= 1 - \beta \cdot \xi \end{aligned} \right\} (x = \xi \cdot l) \quad \dots\dots\dots (12-65)$$

を採つてゐる。然るときは, 斷面矩形とすると,

$$n = 1 - \beta = \frac{I_c}{I_s \cos \varphi_s} = \frac{d_c^3}{d_s^3 \cdot \cos \varphi_s} \quad \dots\dots\dots (12-66)$$

但し, I_s 及び d_s は起拱點の I 及び d を示し,

拱頂點では $\xi=0$; $I_c+I_s=1$

起拱點では $\xi=1$; $I_c+I_s \cos \varphi_s=n$

依つて任意點の拱肋厚を d_x とすれば,

$$\frac{I_c}{I_s} = \frac{d_c^3}{d_x^3} = [1 - (1-n) \xi] \cos \varphi$$

$$d_x = d_c \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{[1 - (1-n) \xi] \cos \varphi}} = d_c \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-\beta) \xi \cdot \cos \varphi}} \quad \dots\dots\dots (12-67)$$

之に $\cos \varphi = 1 + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$ なる關係を挿入すれば

$$\left. \begin{aligned} d_x &= d_c \cdot C \cdot \sqrt[3]{1 + \tan^2 \varphi} \\ C &= \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n) \xi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \beta \cdot \xi}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12-68)$$

式中の係數の値は次表の通りである。

第 12-3 表 C の 値

β	n	0 起拱點	1	2	3	4	5	6 1/4點	7	8	9	10	11	12 拱頂點
0	1.0	1.000	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.000
0.2	0.8	1.077	1.070	1.063	1.056	1.049	1.042	1.036	1.029	1.023	1.017	1.011	1.006	1.000
0.4	0.6	1.186	1.164	1.145	1.126	1.109	1.093	1.077	1.063	1.049	1.036	1.023	1.011	1.000
0.5	0.5	1.260	1.227	1.197	1.170	1.145	1.122	1.101	1.081	1.063	1.046	1.029	1.014	1.000
0.6	0.4	1.357	1.305	1.260	1.221	1.186	1.154	1.126	1.101	1.077	1.056	1.036	1.017	1.000
0.7	0.3	1.494	1.408	1.339	1.282	1.233	1.191	1.154	1.122	1.093	1.066	1.042	1.020	1.000
0.75	0.25	1.587	1.474	1.387	1.317	1.260	1.211	1.170	1.133	1.101	1.072	1.046	1.022	1.000
0.8	0.2	1.710	1.554	1.442	1.357	1.289	1.233	1.186	1.145	1.109	1.077	1.049	1.023	1.000

上記方法によつて d_x を求むる爲には, 豫め拱軸線切線の水平に對する傾角 φ を知るの必要がある。若し, φ, d_c, d_s を與へて置いて d_x を求めんとするに於ては, 第 12-66 式から n の大きさを定め, 此の n の値を用ひて第 12-68 式から d_x を求めれば良い。

【算 例】 第 292 頁記載の支間 $l=24$ m, 拱矢 $f=5$ m なる無鉸拱に於て $d_c=40$ cm, $d_s=70$ cm とすれば, 上記各公式から次のやうな拱肋厚さが得られる。

點	0 起拱點	2	4	6 1/4點	8	10	12 拱頂點	摘 要
ξ	1	5/6	2/3	1/2	1/3	1/6	0	第 12-62 式 $a=2$
ξ^2	1	0.694	0.444	0.250	0.111	0.027	0	
ξ^3	1	0.578	0.296	0.125	0.037	0.004	0	
$1+0.75 \xi^2$	1.750	1.521	1.333	0.188	1.082	1.020	1	$v=0.75$
① d_x (cm)	70	60.8	53.3	47.5	43.3	40.8	40	$d_x = d_c (1 + v \cdot \xi^2)$
$1 + \frac{0.75}{5} (\xi^2 + \xi^3)$	1.750	1.477	1.278	1.141	1.055	1.012	1	第 12-63 式
② d_x (cm)	70	59.03	51.1	45.6	42.2	40.5	40	$d_x = d_c \left[1 + \frac{v}{2} (\xi^2 + \xi^3) \right]$
$1 + 0.75(0.8\xi^2 + 0.2\xi^3)$	1.750	1.503	1.311	1.169	1.073	1.017	1	第 12-63 式
②' d_x (cm)	70	60.1	52.4	46.8	42.9	40.7	40	$d_x = d_c \left[1 + v(0.8\xi^2 + 0.2\xi^3) \right]$
$\tan^2 \varphi$	1.576	0.654	0.266	0.102	0.034	0.007	0	第 12-68 式
$\sqrt[3]{1 + \tan^2 \varphi}$	1.171	1.087	1.040	1.016	1.006	1.001	1	$n=0.3 \quad m=6.8$
C	1.494	1.339	1.233	1.154	1.093	1.042	1	
③ d_x (cm)	70	58.2	51.3	46.9	44.0	41.7	40	$d_x = d_c \cdot C \cdot \sqrt[3]{1 + \tan^2 \varphi}$
$\cos \varphi$	0.623	0.778	0.889	0.951	0.983	0.997	1	第 12-61 式
④ d_x (cm)	64.2	51.4	45.0	42.0	40.7	40.1	40	$d_x = d_c \div \cos \varphi$

以上を圖示比較したものが第 12-26 圖であつて、第 12-66 式によるものは拱頂點附近に於ける拱肋厚増加率の稍大なる傾向あるを示す。

拋物線拱の場合 拋物線拱に於て拱肋に作用する壓縮應力を比較的均一ならしめ以つて材料を經濟的に利用せんとする立場から、シヤロ^{*}は次の公式を掲げてゐる。

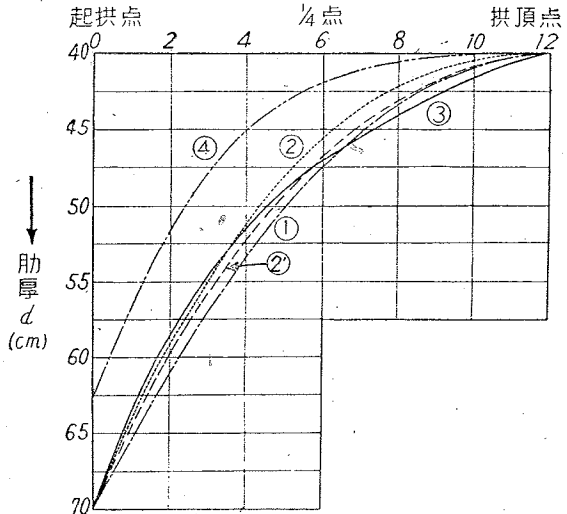
慣性モーメント

$$I_c = \frac{I_c}{(1 \pm 2m^2) \cos \varphi} \dots\dots 2 \text{ 鉸拱}$$

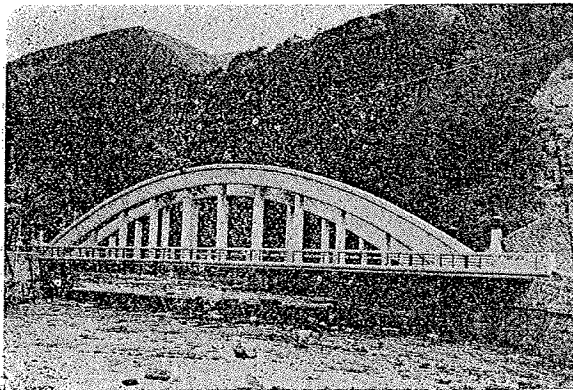
$$= \frac{I_c}{\left(1 - \frac{4}{5}m^2\right) \cos \varphi} \dots\dots \text{無鉸拱}$$

$$\text{斷面積} \quad A_c = \frac{A_c}{[1 \mp (1 - \sqrt[3]{3})m^2] \cos \varphi} \dots\dots 2 \text{ 鉸拱}$$

$$= \frac{A_c}{\left[1 - \frac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{5}}m^2\right] \cos \varphi} \dots\dots \text{無鉸拱} \quad \dots\dots (12-69)$$



第 12-26 圖



寫眞 12-4. 箱根 湯本橋

(±) 或は (∓) は $m < 0$ のとき下方、 $m > 0$ のとき上方の記號を用ふ。而して式中、

$$m = \frac{x}{l_0} \dots\dots (x \text{ は拱頂中心線より左}$$

を正とする)

φ = 拱軸線切線の水平に對する傾角

* Chalos, M. "Le calcul de arch hyperstatiques". Mémoires, 1933~1934. Ass. Int Ponts et Charpenters.