第6章　端モーメント配分法

§1. 固定端モーメント配分法

不靜定構造物の應力の解法は，それが3個モーメントの定理にせよ，歪エネルギイを採つた仕事法にせよ，剛結合トラスの副應力解法に端を發した撓角撓度法にせよ，孰れも不靜定未知量と同數の彈性方程式をたて，相當の手數を費して未知量を求めた後に所要のモーメント乃至應力を算出するのである。1930年米國に於てクロスが發表した端モーメント配分法*は，高層ラーメン（高次不靜定構造）を簡易に解く爲の方法としては寔に劃紀的なものであつて，精度に於ては稍低きに過ぎるの憾みはあるにしても算法としては未だ曾て無かつた所の優秀のものであり，尙ほ之に續く方法としては鷹部屋及びグリンタアの撓角配分法が最近數ケ年に發表されてゐる。

仕事法，撓角撓度法，等に於ては，不靜定構造の支點或は部材を切斷して原系を靜定なる主系に改變し，然る後，彈性方程式を作製して不靜定量を解くのであるが，玆に述ぶる所の新しき解法は，夫れ等とは反對に部材端を固定化して格點（節點）には撓角及び撓度なく卽ち格點は回轉せず移動せざるものとして先づ端モーモントを求め，次に格點の回轉及び移動を考慮に入れて原系の曲げモーメントを逐次的に算出するのである。

此の方法は格點は回轉するのみであつて移動を生じない場合の方が遙かに算出法が簡易であるから，第 6−1 圖に示す3次不靜定の連續梁によつて操作法を述べる。

§2. 固定端モーメント

連續梁は慣性モーメントが定値であり，各支點に於て完全に固定せられ，卽ち各徑間の梁は各々が兩端を固定された梁と最初に假定する。この固定梁の固定端モーメントは第6−1表（及び第5−1表）に於て示したやうな數値を持つてゐるから，此の表から大さは計算できるのである。注意すべきは其の符號であつて部材を**時計の針と反對の方向に曲げるモーメントを正とする**のである（支點を時計の針の方向に曲げるものを正とする。第

---

* *Hardy Cross.* "*Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moment*", *Trans. A. S. C. E.* 1932.

6—2圖)。

固定端モーメント　$C_{AB}=+\frac{wl^2}{12}=4{,}000$ kg・m　　$C_{BA}=4{,}000$ kg・m

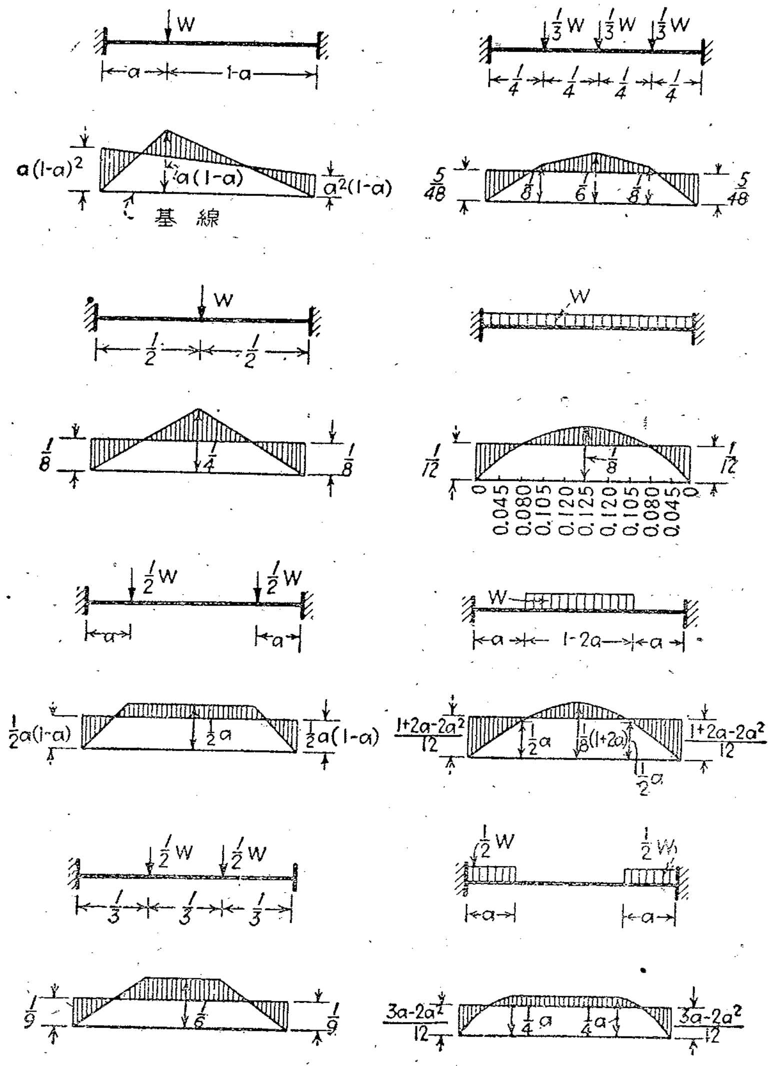
$C_{BC}=+\frac{P}{l^2}ab^2=12{,}000$ kg・m　　$C_{CB}=\frac{P}{l^2}a^2b=6{,}000$ kg・m

第 6−1 表　固定梁端モーメント

$C=m\times W\times l$

m=圖表に示せる數字　　l=支　間

W=總　荷　重　　a=長　さ

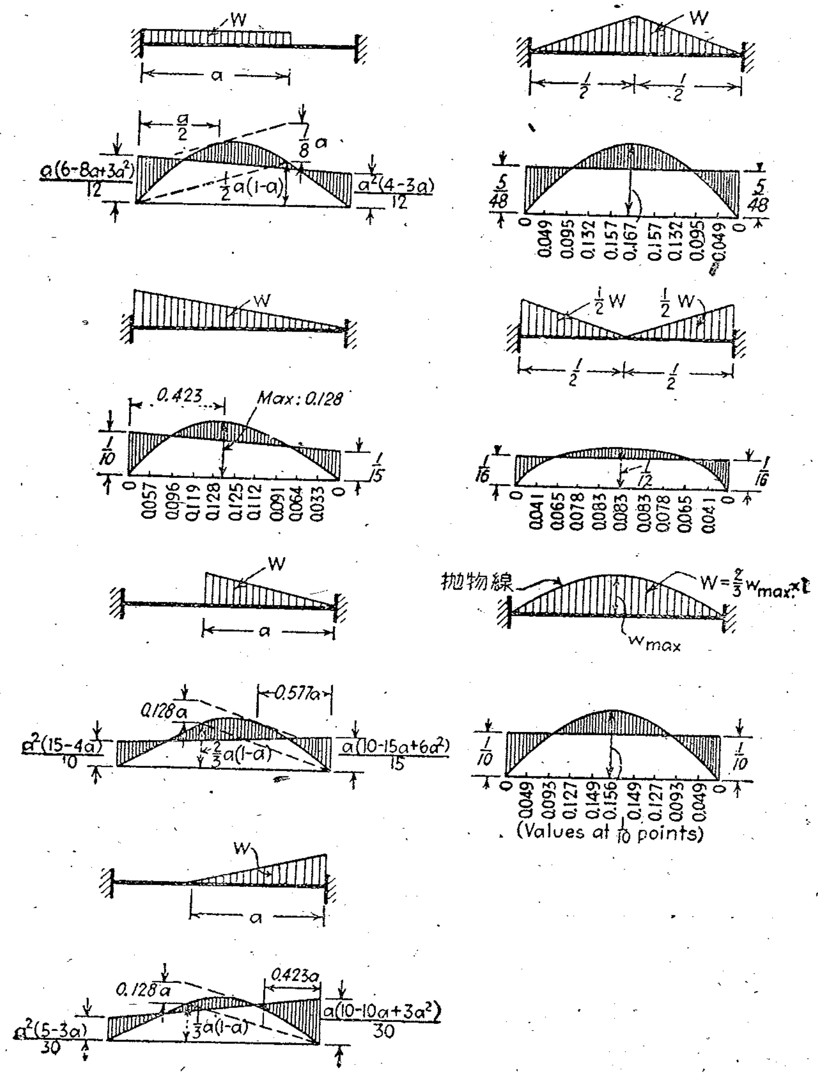


第 6−1 表　固定梁端モーメント

$C=m\times W\times l$

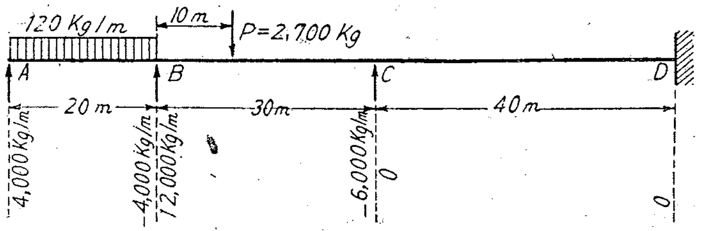
m=圖表に示せる數字　　l=支　間

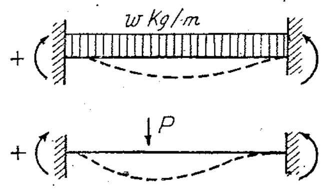
W=總　荷　重　　a=長　さ



§3. 固定端モーメントの均分

各支點が廻轉に對して完全に固定せるものと假定した事は不合理であつて，例へばB支點では，左側に於て $-4,000$ kg.m，右側に於て $+12,000$ kg.m なる曲げモーメントが生じてゐるが，一點の曲げモーメントの大さが二つあるのは不合理である。即ち B 支點では $12,000-4,000=8,000$ kg.m なる不均等なるモーメント (*unbalanced moment*) がある譯である。





第 6–1 圖　固定端モーメント　　**第 6–2 圖**

支點の剛結合を解いて自由に回轉しうるものと考へを改めれば，左右のモーメントに差異のある支點上では部材は廻轉を開始し，左右のモーメントが均分した時に廻轉は終つて靜力學的に釣り合ふに違ひないのである ($\Sigma M=0$)。その時に一つの點 (B 點) のモーメントは左右兩側とも同一となる筈である。かくして不均等モーメントを均等化するには，左右兩部材のモーメントに抵抗する剛性に從つて之を行ふ可きであるが，この剛性は慣性モーメント I に比例し部材長 l に反比例し，不均等モーメントは次に述べるやうに剛性係數 $K=\frac{I}{l}$ によつて配分すれば良いのである (玆には $K_{AB}:K_{BC}=2:3$ と假定する)。

最初に不均等モーメントの最大なる B 支點だけが廻轉し得るものとし，他は依然として固定されてゐるとすれば，回轉中のモーメントは撓角撓度公式から

$$M_{AB}=2\,EK_{AB}(\theta_B)\ ;\quad M_{BA}=2\,EK_{AB}(2\,\theta_B)\cdots\cdots(\theta_A=0\ ;\ R=0)$$

$$M_{BC}=2\,EK_{BC}(2\,\theta_B)\ ;\quad M_{CB}=2\,EK_{BC}(\theta_B)\cdots\cdots(\theta_C=0\ ;\ R=0)$$

B 點の不均等モーメント 8,000 kg·cm を均分すべきモーメントの配分比は

$$M_{BA}:M_{BC}=K_{AB}:K_{BC}=2:3=40:60$$

即ち，C_{BA} に對して 40%，C_{BC} に對して 60%，配分モーメントの大さは，

$$M_{BA}=8,000\times0.4=3,200\ \text{kg.cm}\ ;\quad M_{BC}=8,000\times0.6=4,800\ \text{kg.cm}.$$

一點に部材が3本以上集合してゐるときは別に式を設けなければならないが，一般的に

は配分率 (*Distributing factor*) は，部材の剛性係數によつて抑えられ，即ち，B 點の BA 部材に對する配分比は $K_{AB}/\Sigma K$ によつて示される。玆に K_{AB} は部材 AB の K の値 ΣK は B 點に集る部材の K 値の合計である。前記の場合では，配分比は，

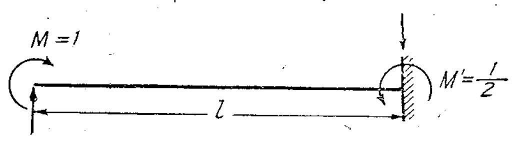
BA 側に對して　$K_{AB}/\Sigma K=2/(2+3)=40\%$

BC 側に對して　$K_{BC}/\Sigma K=3/(2+3)=60\%$

不均等モーメントを斯くして配分する爲には第 6–4 圖に示したやうに此の値を B 點の固定端モーメントの數字の下に不均等モーメントの符號と反對の符號を附して記入する。

§4. モーメントの傳達

第 6–3 圖の左端に $M=1$ なるモーメントを作用させたときの右端の抵抗モーメント(反力モーメント)は $M'=\frac{1}{2}$ である。依つてヒンヂ端に或る配分モーメントを與へれば其の結果として反對側の固定端には之の $1/2$ のモーメントが作用する事となる。此の $1/2$ を**傳達率** (*Carry-over factor*) と呼ぶ。第 6–4 圖に於ては此の主旨に從つて圖示の如く各支點下の配分率の $1/2$ を反對側の固定と假定した支點に傳達し (矢印の方向)，之を記入する。



第 6–3 圖

傳達率とは，單純支承端に作用させたモーメント M と，之に因つて生ずる反對側の固定端のモーメント M' との比，即ち $C=\frac{M'}{M}$ を言ひ，其の數は I の大さによつて異り，叉，支點の狀態によつて異り；上述の場合は $I=$定值 の場合を示す。M を作用せしむべき支點が固定端ならばモーメントは傳達せられず $M'=0$ である。此の關係は §7 に再說する。

§5. 計 算 法

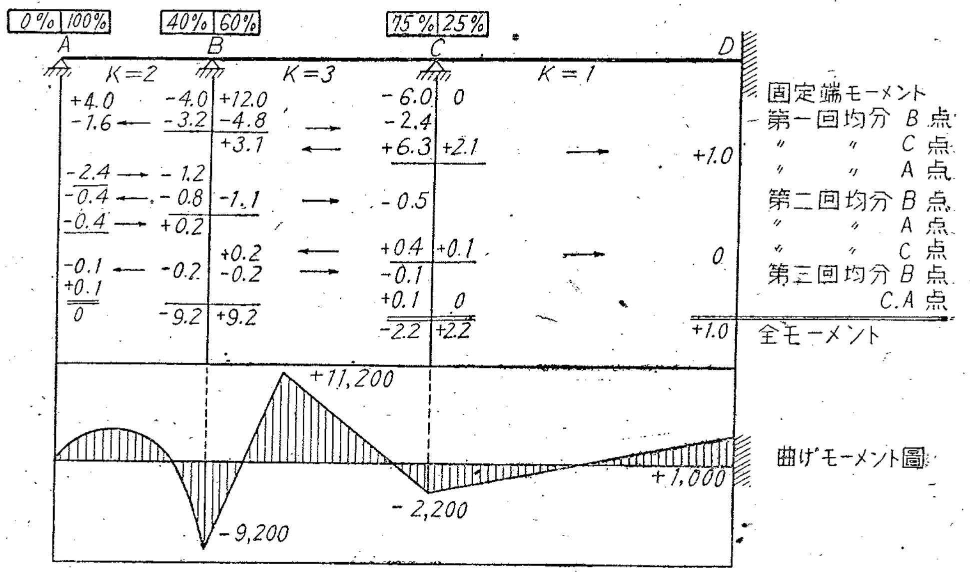
以上の解說により，第一に着手した B 支點のモーメント配分は下表に示すやうになつてモーメントは一應均分されたのである。次に之を C 支點に對して行ふ。玆では左側に B 支點から傳達されたモーメント $\frac{1}{2}\ 4,800=2,400$ が加はるから，不均等モーメントは $(-)$ 8,400 となり，之を左右に配分する比は 75% 及び 25%，從つて配分モーメントは $(+)$ 6,300 及び $(+)$ 2,100，之を一括すれば次表の如き結果を得るのであ

左 側 (B)	右 側
−4,000	12,000
−3,200	− 4,800
−7,200	− 7,200

る。以上と同様の事を A 支點に就いて行へば，各支點のモーメントは別個には均分される。一應均分されたら之を示す爲に其の下に水平線をひく。然し，或る支點で均分を行へば之から傳達されるモーメントが直に隣接支點のモーメントに加はり，その結果として第二回の均分作業に移る必要を生ずるのである。

左 側 (C)	右 側
−6,000	0
−2,400	0
+6,300	+2,100
−2,100	+2,100

但し不均等モーメントは次第に大さを減ずるから，均分作業を數回も續ければ各支點のモーメントは凡そ均分されるのであつて，第 6−4 圖は作業方法並に結果を示す。此の程度の不靜定梁は他の解法を以てすれば之を解くに恐らく數時間を要するであらうが，本法を以てすれば數分にして完了する事が出來るのであつて，活荷重その他の移動荷重を取扱はない所の諸構造に對しては甚だ優れてゐるのである。



第 6−4 圖

以上の操作法を列記すれば

(1) 部材の K の値により格點の配分率を算出，之は格點上側に記入する。

(2) 荷重あるスパンの固定端モーメントを算出，之に對應する (+) (−) を與へて格點 (節點) の附近に記入。

(3) 不均等モーメントの大なる格點を選び，配分率によつて均分モーメントを算出し之を固定端モーメントの下に不均等モーメントと反對の記號を附して記入。そして其の下に横線を引く (一應均分された意味を示す)。

(4) 傳達モーメントを算出し，之を上記の均分された格點の兩隣の格點に傳達して記入する (符號は均分モーメントに同じ)。

(5) 隣接格點に於て均分を行ふ。この均分モーメントは逆に隣接格點に傳達されるから，前に均分された格點はこの爲に第 2 回均分作業をなす必要がある。

(6) 傳達モーメントが零になつたら，作業は中止して，モーメントの合計を行ふ。

§ 6. 斷面不同の梁に對する固定端モーメント

斷面一定卽ち慣性モーメント一定なる固定梁の端モーメントは第 6−1 表に示した通りであるが，斷面不同卽ち慣性モーメント一定ならざる固定梁の端モーメント M_A 及び M_B は別に之を求めなければならない。

兩端固定梁は軸應力を無視すれば (例へばアーチ的な作用が起つても之を無視し得るとすれば)，二次不靜定構造に屬し，第 6−5 圖に於て固定端 A を切斷すれば，靜定主系は B に於て固定された片持梁であつて，鉛直反力 V_a 及び端モーメント M_a が不靜定未知量である。

可能變形仕事に基く彈性方程式を用ひれば，A に $\overline{M}_a=1$ が作用するとき A の撓角は，

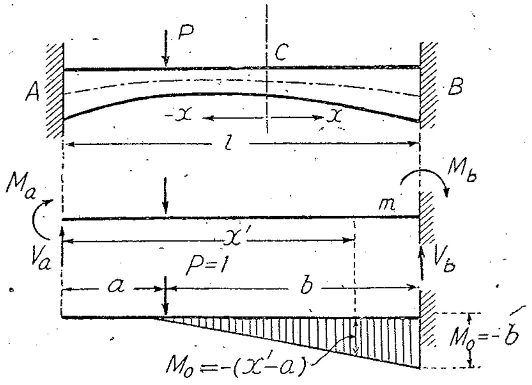
$$1.\theta_a=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx'=\int\frac{M}{EI}dx'=0$$

A に $\overline{V}_a=1$ を作用せしめたときの撓みは，$\overline{M}=1.x'$ であるから，

$$1.\delta_a=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx'=\int\frac{Mx'}{EI}dx'=0$$

この固定梁の任意點の曲げモーメント M は

$$M=M_a+V_a\cdot x'-M_0\cdots\cdots(6-1)$$



第 6−5 圖

但し，M_0 は B 端で固定された片持梁 (靜定主系) の曲げモーメントである。然るときは，

$$\left.\begin{aligned}\theta_a&=M_a\int\frac{1}{I}dx'+V_a\int\frac{x'}{I}dx'-\int M_0\frac{1}{I}dx'=0\\ \delta_a&=M_a\int\frac{x'}{I}dx'+V_a\int\frac{x'^2}{I}dx'-\int M_0\frac{x'}{I}dx'=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6-2)$$

之等の解法は第 11 章固定拱に於て詳說するが，彈性軸を定めて之から x を定めれば上式は簡易化せられ，第 6−5 圖の C 點を彈性軸中心とし $AC=c$ とすれば，

第 6–2 表

	區　　分	1	2	3	4	5	5′	4′	3′	2′	1′	Σ
1	慣性モーメント I m^4	0.040	0.020	0.010	0.005	0.004	0.004	0.005	0.010	0.020	0.040	
2	$w=\Delta x/I=1/I$ m^{-3}	25	50	100	200	250	250	200	100	50	25	
3	x m	−4.5	−3.5	−2.5	−1.5	−0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	
4	xw m^{-2}	−112.5	−175	−250	−300	−125	125	300	250	175	112.5	
5	Σxw m^{-2}	0	112.5	287.5	537.5	837.5	962.5	837.5	537.5	287.5	112.5	0
6	$\Sigma M_0 \cdot xw$ $kg.m^{-1}$	4512.5	4400	4112.5	3575	2737.5	1775	937.5	400	112.5	0	
7	x^2 m^2	20.25	12.25	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25	12.25	20.25	
8	x^2w m^{-1}	506.3	612.5	625.0	450	62.5	62.5	450	625	612.5	506.3	
9	Σx^2w m^{-1}	4512.6	4006.3	3393.8	2768.8	2318.8	2256.3	2193.8	174[illegible].8	1118.8	506.3	4512.6
10	$V_a=\Sigma M_0xw/\Sigma x^2w_{kg}$	1.000	0.975	0.912	0.792	0.606	0.396	0.208	0.089	0.025	0	
11	Σw m^{-3}	1250	1225	1175	1075	875	625	375	175	75	25	
12	ΣM_0w $kg.m^{-2}$	5625	4400	3225	2150	1275	650	275	100	25	0	
13	$\Sigma M_0w/\Sigma w$ $kg.m$	4.500	3.520	2.580	1.720	1.020	0.520	0.220	0.080	0.020	0	
14	$\frac{l}{2}V_a=5V_a$ $kg.m$	5.000	4.875	4.560	3.960	3.030	1.980	1.040	0.445	0.125	0	
15	M_a $kg.m$	−0.500	−1.325	−1.980	−2.240	−2.010	−1.460	−0.820	−0.365	−0.105	0	

$$x'=e+x$$

を上式に代入すれば良く，對稱なる梁では，$e=\dfrac{l}{2}$ である。

$$\left.\begin{aligned}\theta_a&=M_a\int\frac{1}{I}dx+V_a\cdot e\int\frac{1}{I}dx-\int M_0\frac{1}{I}dx=0\\ \delta_a&=V_a\int\frac{x^2}{I}dx-\int M_0\frac{x}{I}dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6-3)$$

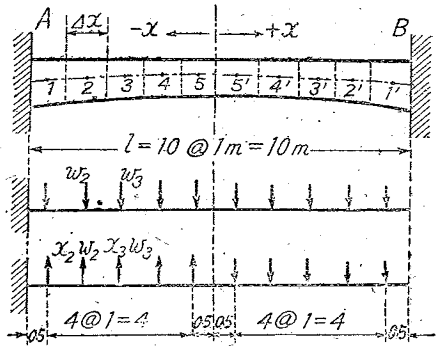
$\Delta x\div I=w$ として之を彈性荷重とすれば，

$$\left.\begin{aligned}V_a&=\frac{\Sigma M_0xw}{\Sigma x^2w}\\ M_a&=\frac{\Sigma M_0w}{\Sigma w}-e\cdot V_a\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-4)$$

且つ第 6–1 式から任意點の曲げモーメント M_m 及び M_b は

$$\left.\begin{aligned}M_m&=M_a+V_a\cdot x'-M_0\\ M_b&=M_a+V_a\cdot l-P\cdot b\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-5)$$

［例　題］ 第 6–6 圖に示す對稱固定梁の反力並に端モーメントの影響線を求めやうとする。I は第 6–2 表に與へた通りに變化する。第 6–4 式によつて計算するから，Σw, Σxw, の如き値を豫め求めておくのであるが，B 端固定の片持梁のコンジュゲート梁は A 端固定の片持梁になるのであるから，Σ は B 端側から着手することゝなる（第 11 章固定拱參照）。此の梁は左右對稱であるから，M_b 影響線は M_a 影響線の逆の形となる。



第 6–6 圖

§7. 傳達率及剛性係數に就て

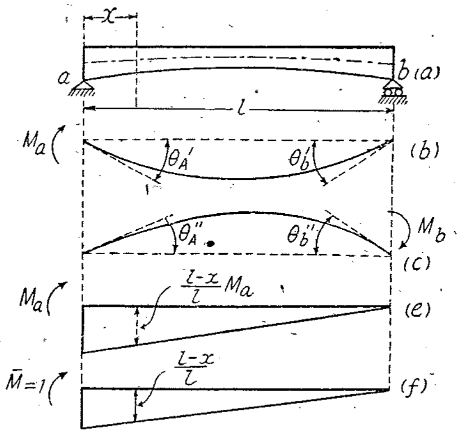
傳達率及び剛性係數に就いては既に其の意味を述べたが，之等の一般的性質を聊か說明する。

I の一定なる梁 AB は兩端ヒンヂ支承とし，今左端 A に M_a なるモーメントを與へたとすれば A 端の撓角は（第 6–7 圖），

$$\theta_a'=\int M\overline{M}\frac{dx}{EI}=M_a\int\frac{(l-x)^2}{l^2}\cdot\frac{dx}{EI}=M_a\cdot\alpha_1\cdots\cdots\cdots\cdots(6-6)$$

但し，$M=\frac{l-x}{l}M_a$；A 端に作用せしめた假想單位モーメントに因る曲げモーメントは $\bar{M}=\left(\frac{l-x}{l}\right)\cdot 1$ である(第 6−7 圖 (e) (f))。同様にして右端 B の撓角は，B に假想單位モーメントを作用せしめ

$$\theta_b'=\int M\bar{M}\frac{dx}{EI}=M_a\int\frac{(l-x)x}{l^2}\cdot\frac{dx}{EI}$$
$$=M_a\cdot\alpha_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-7)$$



第 6−7 圖

次に此の梁に第 6−7 圖 (c) に示すやうに右端 B に M_b なるモーメントを與へたとすれば，

$$\theta_a''=M_b\int\frac{(l-x)x}{l^2}\frac{dx}{EI}=M_b\cdot\alpha_2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-8)$$

$$\theta_b''=M_b\int\frac{x^2}{l^2}\frac{dx}{EI}=M_b\cdot\alpha_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-9)$$

玆に注意すべきは，上式より明らかなるやうに，α_1 は $M_a=1$ なるときの θ_a' を示し，α_2 は $M_a=1$ なるときの θ_b' 或は $M_b=1$ なるときの θ_a'' を示し，何れにせよ α は角度であつて，梁の l, E, I の函數である。

今，M_a 及び M_b を同時に作用せしめ且つ $\theta_b=0$ 即ち B 端は恰も固定梁に於けるやうに撓角零なりとするとき，M_a 及び M_b の間に如何なる關係があるかを調べる。

$$\theta_b=\theta_b'-\theta_b''=M_a\alpha_2-M_b\cdot\alpha_3=0 \qquad M_b=M_a\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-10)$$

即ち M_a に $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ を乘じただけのモーメントを M_b として之を B 端に與へれば B 端の撓角は零となるのである。$\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ は傳達率であつて，

$$\left.\begin{array}{ll} A \text{ より } B \text{ への傳達率} & C_A=\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \\ B \text{ より } A \text{ への傳達率} & C_B=\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-11)$$

A 端ヒンヂ，B 端固定の場合には（第 6−5 圖），M_a なるモーメントによる撓角 θ_a は，上記の M_b を B 端の抵抗モーメントと考へれば容易に求められるのであつて，

$$\theta_a=\theta_a'-\theta_a''=M_a\cdot\alpha_1-M_b\cdot\alpha_2=M_a\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(6-12)$$

慣性モーメントの一定なる前記の梁の場合には，剛性係數比を撓角撓度式の K の比で簡單

に定め得たのであつたが，任意部材 A 點の**剛性係數**は他端 B が固定してゐるとき A に單位撓角を生ぜしめるモーメントを謂ふのであつて，第 6−12 式に於て $\theta_a=1$ とすれば A 端の剛性係數は，

$$K_A=M_a=1\div\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\right)=\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-13)$$

同様にして B 端の剛性係數は，

$$K_B=M_b=1\div\left(\alpha_3-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right)=\frac{\alpha_1}{\alpha_1\alpha_3-\alpha_2^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-14)$$

以上に說いた傳達率及び剛性係數に於て，

(1) 一端ヒンヂなるときは他端にモーメントを加へてもヒンヂ端のモーメントは零であるから C も亦零である。

(2) 一端固定のとき此の固定端にモーメントを加へても，固定端が廻轉しない限りは其のモーメントは他端に傳達されない。

(3) 部材が對稱であれば，$\alpha_1=\alpha_3$ であるから兩端の C 及び K は同値である。

(4) 不對稱部材では剛性大なる方の端の C は小であり反對に K の値は大である。

(5) **慣性モーメント一定なる部材**では，

$$C=\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\frac{\int_0^l\frac{(l-x)x}{l^2}dx}{\int_0^l\frac{x^2}{l^2}dx}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6-15)$$

$$K=1\div\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3}\right)=1\div\frac{1}{EI}\left(\frac{l}{3}-\frac{l^2}{36}\times\frac{3}{l}\right)=\frac{4EI}{l}\quad\cdots(6-16)$$

K は $\frac{I}{l}$ に比例する。且つ C 及び K は該部材の兩端で同じである。

(6) 他端ヒンヂなる部材の一端にモーメントを與へれば，ヒンヂ點のモーメント M_b は零であるから K は夫れが固定されてゐる第 6−13 式の場合よりは小となる。この場合の K は第 6−13 式から，

$$K_A'=1\div\alpha_1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-17)$$

次に C と K との關係を述べる。兩端固定の時は第 6−11，6−13 式より

$$K_A(1-C_AC_B)=\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_3-\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\times\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)=\frac{1}{\alpha_1}$$

であるから，

$$K_A'=K_A\,(1-C_AC_B)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-18)$$

本式は他端ヒンヂなる場合の剛性係數の一般式であつて，K_A' は兩端固定の K_A に $(1-C_A C_B)$ を乘じたものである。I=定值なる梁に對しては

$$K_A'=\frac{1}{\alpha_1}=\frac{3EI}{l}=\frac{3}{4}K \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6-19)$$

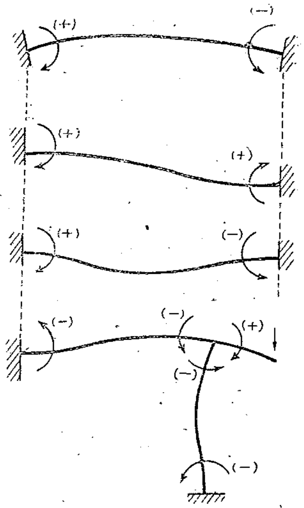
即ち他端の固定してゐる第 6−16 式の K に比較するときは，他端ヒンヂなるときの剛性係數は $\frac{3}{4}$ である。

(7)　C_A，C_B，K_A，K_B に對して第 6−11，6−13，6−14 の諸式を以てすれば

$$C_A K_A = C_B K_B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6-20)$$

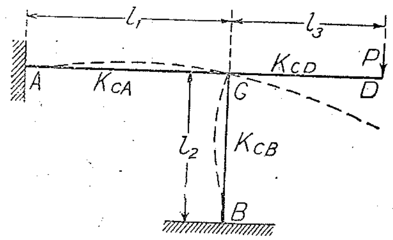
即ち一端の $C\times K$ と他端の $C\times K$ とは相等しい。之の關係は檢算に用ひて便利である。

端モーメントの配分に當つてはモーメントの正負記號は紛れ無き樣之を一定し，正負は格點の回轉方向に依つて定める。卽ち，格點を時針方向に回轉せしめる M を (+) とし，時針と反對の方向に回轉せしめる M を (−) とする。普通は，梁の上緣に引張力を與へる M を (−)，上緣に壓縮力を與へる M を (+) とするが，此の方法は紛れを生じ易いのである。第 6−8 圖は格點(支點)の回轉方向より定めた (+)(−) を示し，一つの部材の撓曲に於て反曲點が無いか或は二つあれば左右の端モーメントは記號を異にし，反曲點一つの場合は端モーメントの記號は同じとなる。



第　6−8　圖

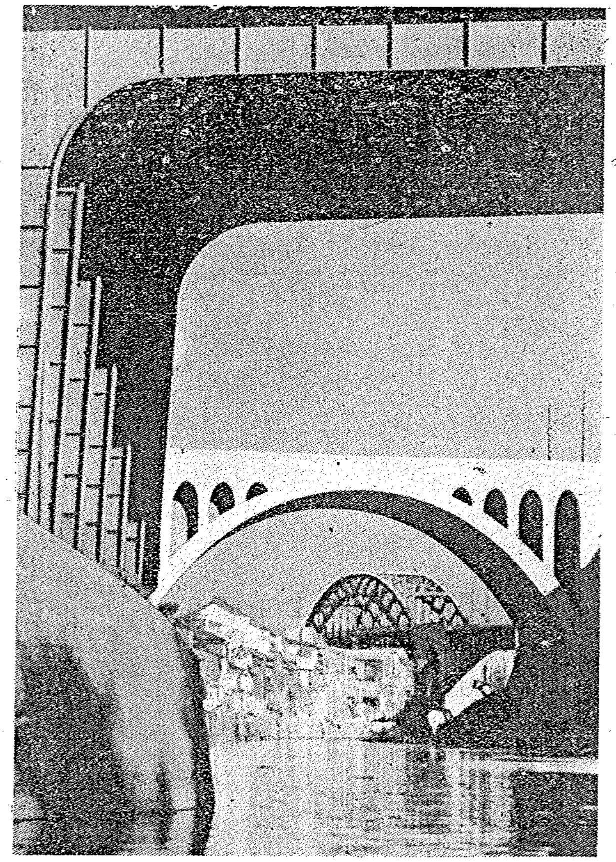
第 6−9 圖に於て P の與へる曲げモーメント $M=P.l_3$ は格點 C を時計の針の方向に回轉せしめるから，その記號は (+) である。梁 AC 及び柱 BC に生ずる曲げモーメント M_{CA} 及び M_{CB} は格點 C を時計の針と反對の方向に回轉せしむるものであつて，その記號は (−)，而して $\sum M_C=0$ を保つて安定するのである。今，$K_{CA}=3$，$K_{CB}=2$ $K_{CD}=3$ とすれば，片持梁の K は格點の剛性係數 $\sum K$ には算入されないから，$\sum K=3+2=5$．依つて配分されるモーメントは，



第　6−9　圖

$$M_{CA}=-\frac{K_{CA}}{\sum K}M=-\frac{3}{5}P.l_3\ ;$$

$M_{CB}=-\frac{K_{CB}}{\sum K}M=-\frac{2}{5}P.l_3$．柱及び梁の I が定值ならば $C=1/2$ であつて上記の半分の大さの M が B 及び A に作用する。若し A がヒンヂであるとすれば $M_{AC}=0$，依つて $K_{CA}=\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{4}$；$\sum K=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$，結果として，$M_{CA}=-\frac{9}{17}P.l_3$；$M_{CB}=-\frac{8}{17}P.l_3$ である。



寫眞 6−1　東京　神田川諸橋梁
御茶之水橋，　二鉸ラーメン
聖　　橋，　無　鉸　拱
鐵　道　橋，　繫　構　拱

［算　例 1］　第 6−6 圖に示した I の定值ならざる梁の剛性係數及び傳達率を求める。此の場合，x は左よりとる (第 6−2 表使用)。

第　6−3　表

		1	2	3	4	5	5′	4′	3′	2′	1′	Σ
1	$w=\frac{\Delta x}{I}=\frac{1}{I}$	25	50	100	200	250	250	200	100	50	25	
2	x	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	
3	xw	13	75	250	700	1125	1375	1300	750	425	237	6250
4	x^2	0.25	2.25	6.25	12.25	20 25	30.25	42.25	56.25	72.25	90.25	
5	x^2w	6	113	625	2450	5063	7506	8490	5625	3613	2256	35747

第 6−7 式より　$\alpha_2=\frac{1}{l^2E}\Sigma(l-x)xw=\frac{1}{lE}\Sigma xw-\frac{1}{l^2E}\Sigma x^2w$

$$=\frac{6250}{10E}-\frac{35747}{10^2E}=\frac{1}{E}(625-357)=\frac{268}{E}$$

第 6−9 式より　$\alpha_3=\frac{1}{l^2E}\Sigma x^2w=\frac{35747}{10^2E}=\frac{357}{E}$

$$C_A=C_B=\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\frac{268}{357}=0.75$$

$\alpha_1=\alpha_3$ であるから，　$K_A=K_B=\frac{\alpha_3}{\alpha_3^2-\alpha_2^2}=\frac{357E}{357^2-268^2}=0.0064\,E$

［算　例 2］ 第 6−10 圖に示す 2 鉸ラーメンの曲げモーメントを求める。梁の I は柱の I の 2 倍とする。

固定端モーメント　$M_{BC}=M_{CB}=\frac{1}{8}Pl=\frac{1}{8}100\times8=100$ kg·m

剛性係數　$\left.\begin{array}{l} K_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{I}{h}=\frac{3}{4}\cdot\frac{I}{9}=\frac{I}{12} \\ K_2=\frac{2I}{l}=\frac{2I}{8}=\frac{I}{4}\end{array}\right\}\Sigma K=K_1+K_2=\frac{I}{3}$

配分比　$K_1/\Sigma K=\frac{I}{12}\times\frac{3}{I}=\frac{1}{4}=0.25$　　$K_2/\Sigma K=\frac{I}{4}\times\frac{3}{I}=\frac{3}{4}=0.75$

之によつて圖示通りの計算を行へば，

$M_{BA}=-40$ kg·m　　$M_{CB}=-40$ kg·m

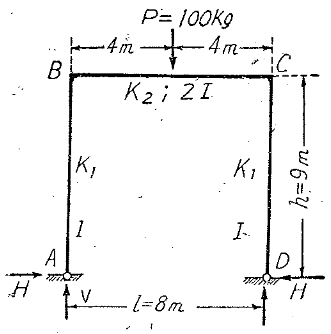
$M_{BC}=\ \ 40$ kg·m　　$M_{CD}=\ \ 40$ kg·m

柱の壓縮力＝反力＝$V=\frac{P}{2}=50$ kg

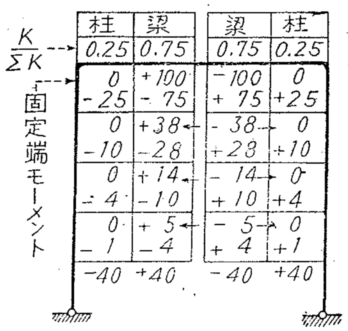
水平反力　$=\frac{M_{BA}}{h}=\frac{40}{9}=4.44$ kg

梁の中央點曲げモーメント　$M=V\times\frac{l}{2}-H\cdot h$

$$\fallingdotseq 50\times4-4.44\times9=160\ \text{kg·m}$$



第 6−10 圖

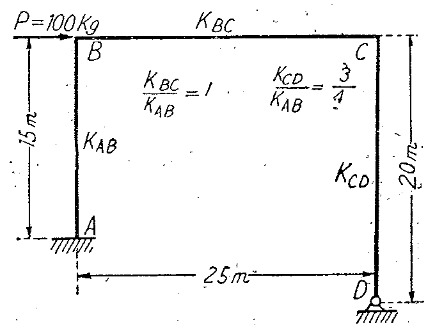


第 6−11 圖

§ 8. 格點の移動する場合

前例の連續梁に於けるとは全く相違して，格點（節點）は移動を爲し，然も荷重は節點に作用するにより固定端モーメントが算出し難いやうな場合を次に取扱ふ。

第 6−12 圖のラーメンは一端固定，一端ヒンヂ，格點 B に P なる水平力の作用するものとする。梁 BC は變形した後も水平であると假定する事は實用上差支えないから，R_{BC} は零と認め得られる。R_{AB} 及び R_{CD} は零と見做す事は無理であるが，今，BC の長さも不變であると假定すれば，$\delta_B=\delta_C$ と爲すことが出來る。又，$\Sigma H=0$ により，$P=H_A+H_D$ である。



第 6−12 圖

撓角撓度公式を借りれば，柱 AB が兩端固定なるとき，

$$M_{AB}=M_{BA}=2\,EK_{AB}(-3\,R_{AB})=2\,EK_{AB}\left(-3\frac{\delta_B}{l_{AB}}\right)$$

$$\therefore\quad \delta_B=-\frac{l_{AB}}{6EK_{AB}}M_{AB}$$

然し，柱に $\Sigma M=0$ を適用すれば，$H_A\cdot l_{AB}=-M_{AB}-M_{BA}=-2M_{AB}$ であるから，

$$\delta_B=+\frac{l^2{}_{AB}}{12EK_{AB}}H_A$$

同様にして柱 CD に撓角撓度公式を適用すれば，

$$M_{DC}=2\,EK_{CD}(2\theta_D-3\,R_{DC})=2\,EK_{CD}\left(2\theta_D-3\frac{\delta_C}{l_{CD}}\right)=0$$

$$\therefore\quad \theta_D=\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta_C}{l_{CD}}$$

$$M_{CD}=2\,EK_{CD}\left(\theta_D-3\frac{\delta_C}{l_{CD}}\right)=2\,EK_{CD}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta_C}{l_{CD}}\right)$$

$$\therefore\quad \delta_C=-\frac{l_{CD}}{3EK_{CD}}M_{CD}$$

茲で，$M_{CD}=-H_D\cdot l_{CD}$ なることは明であるから

$$\delta_C=\frac{l_{CD}^2}{3EK_{CD}}H_D$$

$\delta_B=\delta_C$ なる假定の條件を用ひれば，

$$\frac{H_A}{H_D}=\frac{12\,EK_{AB}\cdot l_{CD}^2}{3\,EK_{CD}\cdot l_{AB}^2}=\frac{4\,K_{AB}}{K_{CD}}\cdot\frac{l_{CD}^2}{l_{AB}^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6-21)$$

以上の關係を明にすれば固定端モーメントを算出することが出來るのである。

若し，D 端が固定端である場合には，

$$\frac{H_A}{H_D}=\frac{12\,EK_{AB}\cdot l^2_{CD}}{12\,EK_{CD}\cdot l^2_{AB}}=\frac{K_{AB}}{K_{CD}}\cdot\frac{l^2_{CD}}{l^2_{AB}}\cdots\cdots\cdots(6-22)$$

［算　例 3］　第 6-12，13 圖の場合に於ては，

$$\left(\frac{K_{CD}}{K_{AB}}=\frac{3}{4}\right)$$

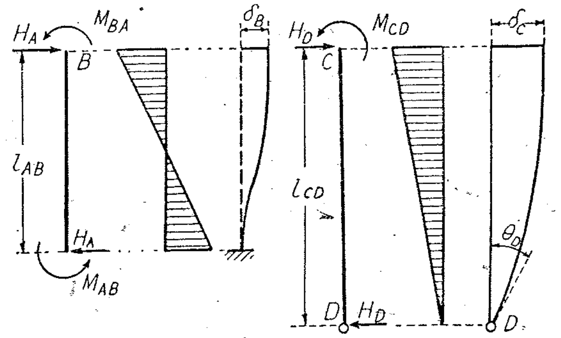
$$\frac{H_A}{H_D}=\frac{4K_{AB}\cdot l^2_{CD}}{K_{CD}\cdot l^2_{AB}}=\frac{4\times4}{3}\cdot\frac{20^2}{15^2}$$

$$=\frac{256}{27}\ ;\ 256+27=283$$

$P=1000\ \mathrm{kg}=H_A+H_D$ であるから

$$H_A=100\times\frac{256}{283}=90.46\ \mathrm{kg}\ ;$$

$$H_D=100\times\frac{27}{283}=9.54\ \mathrm{kg}$$



第 6-13 圖

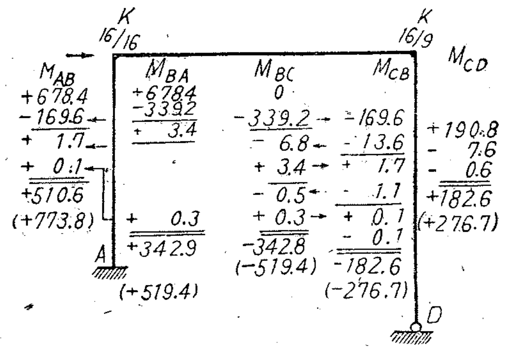
斯くの如く固定端に水平力の作用する柱の固定端モーメントは，

$$M_{AB}=M_{BA}=\frac{1}{2}\times90.46\times15$$

$$=678.4\ \mathrm{kg\cdot m}$$

$$M_{CD}=9.54\times20=190.8\ \mathrm{kg\cdot m}$$

モーメントの配分は各部材の剛性係數 K によつて爲すべきであるが，D 點のヒンヂされてゐる事を計算に入れて，次の比率を用ひる。



第 6-14 圖

$$K_{AB}:K_{BC}:K_{CD}=1:1:\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=16:16:9$$

モーメントの計算は第 6-14 圖の如くに之を行ふ。先づ B 點の $M_{BA}=678.4$，$M_{BC}=0$，$K_{AB}=K_{BC}$ であるからこの不均等モーメントの半分 (339.2) に (−) を與へたものは M_{BC} の値となり，之の半分 (169.6) を M_{AB} 及び M_{CB} に傳達し，次に C 點の不均等モーメントは $190.8-169.6=21.2$，之を K の比によつて

$$21.2\times\frac{9}{16+9}=7.6\qquad 21.2\times\frac{16}{16+9}=13.6$$

の如く配分して記入すれば，玆に第一回の配分は終る。M_{CB} の 13.6 の半分を M_{BC} に傳達すれば玆に M_B が左右均等を缺くに至るので既に述べた方法により順次に修正してゆくときは，結果に於て，

2 列横線の下の數字が得られるのである。

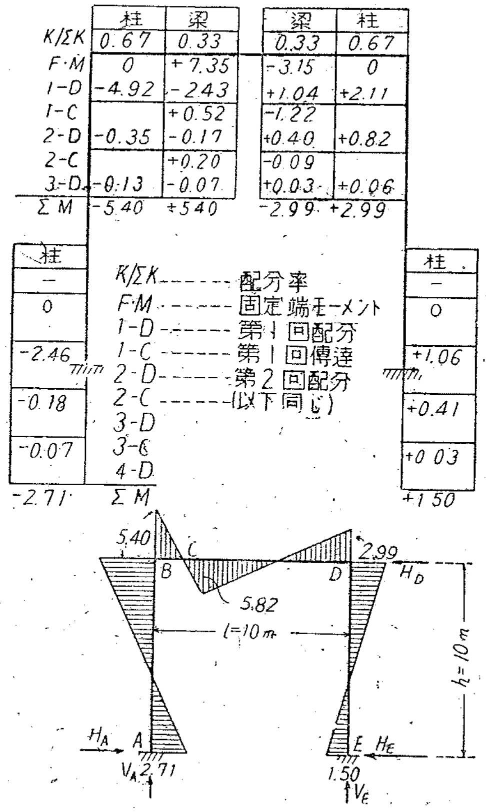
此のモーメントを用ひて兩柱に對する $\Sigma M=0$ を作れば，

$$H_A=\frac{342.9+510.6}{15}=56.9\ \mathrm{kg}\qquad H_D=\frac{182.6}{20}=9.1\ \mathrm{kg}$$

此の合計は $56.9+9.1=66\ \mathrm{kg}$ であつて $P=100\ \mathrm{kg}$ の $\frac{66}{100}$ に相當するから，前記諸モーメントに $\frac{100}{66}$ を乘じたものが本當の答であつて，その結果は圖中に括弧した數字で示されてゐる。

多層のラーメンでは水平反力の分布（剪斷抵抗）が複雜であるから，上記の方法は其儘適用が不可能である。之に對しては逐次修正法その他がある。

［算　例 4］　第 6-15 圖に示す $l=10\ \mathrm{m}$，$h=10\ \mathrm{m}$ なる固定ラーメンに $P=5\ t$ が左端より 3 m の個所に作用する時の各部曲げモーメントを求める。



第 6-15 圖

此の場合のやうに荷重が中央に作用しない時は，ラーメンは横方向の移行 (*Side−sway*)

を爲すのであるが，玆には略算として之を無視する。

$$K_1=\frac{2}{10}I=0.2\ I\ ;\ K_2=\frac{I}{10}=0.1\ I\ ;\ \Sigma K_B=\Sigma K_D=\Sigma K=0.3\ I$$

$$\frac{K_1}{\Sigma K}=\frac{2}{3}=0.67\ \ ;\ \ \frac{K_2}{\Sigma K}=\frac{1}{3}=0.33$$

固定端モーメント　$M_{BD}=\frac{P\cdot ab^2}{l^2}=\frac{5\times3\times7^2}{10^2}=7.35\ \mathrm{tm}$

$$M_{DB}=-\frac{P\cdot a^2b}{l^2}=-\frac{5\times3^2\times7}{10^2}=-3.15\ \mathrm{tm}$$

之によつて第 6−15 圖に示す配分及び傳達を行ひ，各點の曲げモーメソトを求める。

$$H_B=(M_{AB}+M_{BA})\div h=(2.71+5.40)\div10=0.811\ \mathrm{t}$$

$$H_E=(M_{ED}+M_{DE})\div h=(1.50+2.99)\div10=0.449\ \mathrm{t}$$

左右不平均水平反力　$H_D=H_A-H_E=0.362\ \mathrm{t}$

柱 AB には此の力が剪斷力として働く。

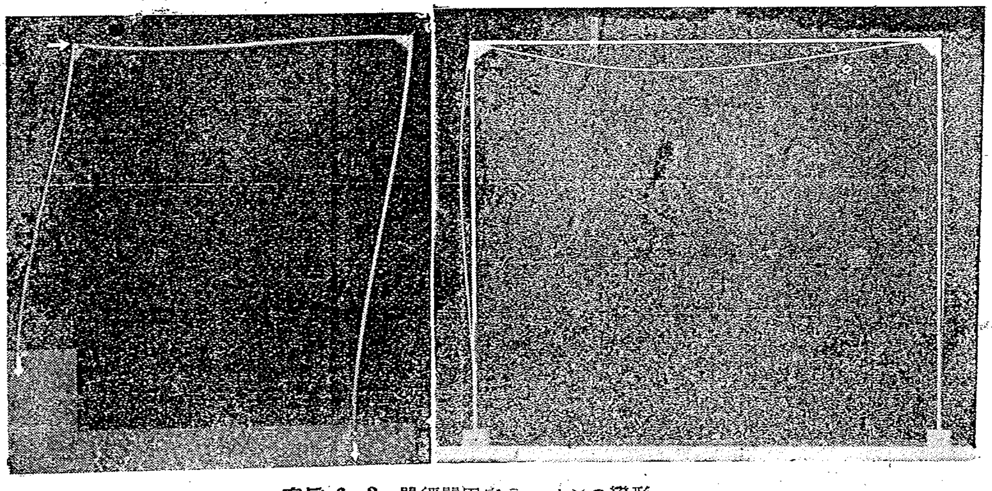
$$V_A=\frac{b}{l}P+(M_{BD}-M_{DB})\div l=\frac{7}{10}\times5+(5.40-2.99)\div10=3.74\ \mathrm{t}$$

$$V_E=\frac{a}{l}P-(M_{DB}-M_{BD})\div l=\frac{3}{10}\times5-(2.99-5.40)\div10=1.26\ \mathrm{t}$$

$$M_C=P\frac{b}{l}\cdot a-M_{DB}-(M_{BD}-M_{DB})\frac{b}{l}=5\times\frac{7}{10}\times3-2.99-(5.40-2.99)\frac{7}{10}$$

$$=5.82\ \mathrm{tm}$$

横方向移動を考慮した解法は省略する。



寫眞 6−2　單徑間固定ラーメンの變形