第5章 撓 角 撓 度 法

§1. 基 本 式

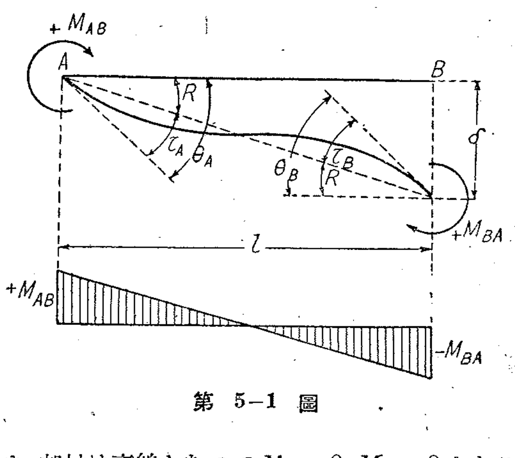
AB なる直線部材の兩端 A 及び B に夫れ夫れ M_{AB} 及び M_{BA} なる端モーメントが作用し，B の A に對する撓みを δ，部材の慣性モーメントを定値とするときは，之を連續部材中の一部材と考へて第 4−2 式を適用し，$\Delta\theta$ 記號を θ とすれば，

$$\left.\begin{aligned} \theta_A &= \frac{l}{6EI}(2M_{AB}-M_{BA})+R \\ \theta_B &= \frac{l}{6EI}(-M_{AB}+2M_{BA})+R \end{aligned}\right\} \left(R=\frac{\delta}{l}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(5-1)$$

之から端モーメントを求めれば，

$$\left.\begin{aligned} M_{AB} &= 2EK(2\theta_A+\theta_B-3R) \\ M_{BA} &= 2EK(2\theta_B+\theta_A-3R) \end{aligned}\right\} \left(K=\frac{I}{l}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(5-2)$$

本式は部材端に荷重及びモーメントの作用する梁の撓角及び撓みを示し，1878 年マンデルラはトラスの二次應力解法に本式を始めて用ひたのであつて，ウォルソンは之に撓角撓度方程式なる名稱を與へた*。



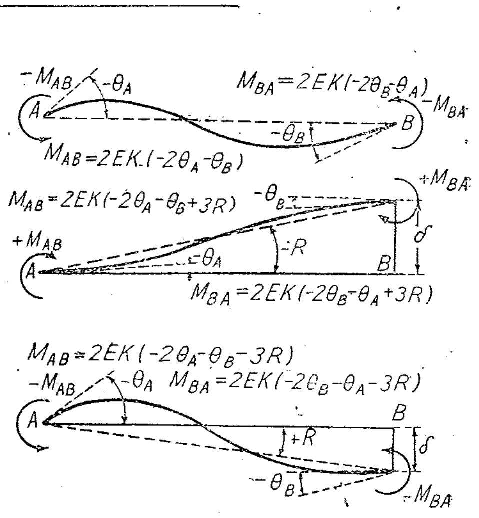
第 5−1 圖

正負記號 上記の端モーメント公式の運用に於ては，正負の記號に注意する必要がある。第 5−1 圖に示した角度にあつては $2\theta_A+\theta_B=3R$ のとき，部材は直線となつて $M_{AB}=0$, $M_{BA}=0$ となるのであるから，從つて M_{AB} を正モーメントとすれば $2\theta_A+\theta_B-3R$ は正であり $2\theta_A+\theta_B>3R$ なる可きである。若し此の事が成立しなければ圖示の彈性變形曲線の形は變つて來るので

* *Manderla. "Die Berechnungen der Sekundärspannungen"* 1880.

Wilson. Richart and Weiss, "Analysis of statically indeterminate structures by the slope deflection method", University of Illinois Bulletin, No. 108, 1918.

ある。同様にして，M_{BA} 及び $2\theta_B+\theta_A-3R$ も亦正である。抵抗モーメントとして之を考へれば，M_{AB} は A 點の斷面にあつては正抵抗モーメントであつて，方向は時計の針と同方向である。之等の關係を明にする爲に變形の異つてゐる場合を示せば第 5–2 圖の通りである。なほ A, B は必ずしも部材端を示すものでは無く，部材中の任意部分に就いても本式は成立する。但し，孰れにせよ，AB 間には荷重は作用してゐないのである。



第 5–2 圖

第 5–2 圖に示した符號の定め方

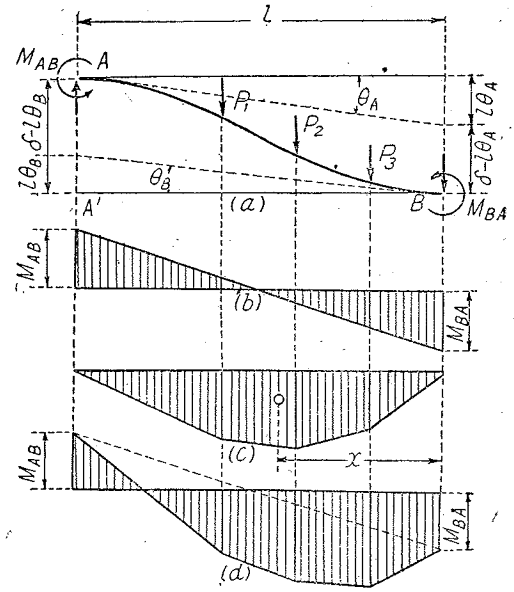
(1) 端モーメントは部材を時針方向に曲げるものを (+) とする。

(2) 撓角 θ は彈性曲線切線が元の位置から時針方向に廻るとき (+) とする。

(3) R は AB 線が時針方向に向つたとき (+) とする。

§2. 梁の撓角撓度式

第 5–1 圖部材 AB を梁と考へ AB の中間に荷重が作用するものとする。然るときは此の梁のモーメント圖は中間荷重の曲げモーメントに影響せられ其の圖形は變化するのであつて，第 5–3 圖の梁に於て (c) 圖及び (b) 圖を夫れ夫れ中間荷重に因る曲げモーメント圖及び端モーメントに因る曲げモーメント圖とすれば，梁に作用する合計曲げモーメントは (d) 圖の如くになり，單に代數的に合計すれば良いのである。(c) 圖の單純梁曲げモーメント圖面積を F，その圖心を右



第 5–3 圖

端から x とすれば，右端 B の撓み $(\delta-\theta_A\cdot l)$ は B でとつた M/EI 面積に對する斷面一次モーメントに等しいから（モーメント面積法參照），

$$\delta-\theta_A\cdot l=-\frac{M_{AB}}{EI}\cdot\frac{l^2}{3}+\frac{M_{BA}}{EI}\cdot\frac{l^2}{6}-\frac{F}{EI}\cdot x$$

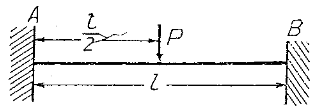
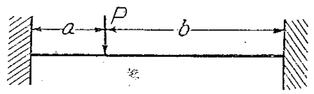
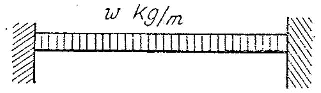
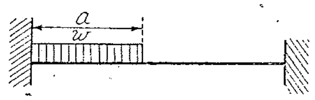
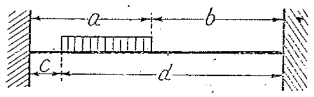
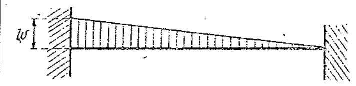
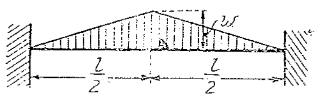
又，モーメント面積は撓角の差 $\theta_B-\theta_A$ に等しいから

$$\theta_B-\theta_A=-\frac{M_{AB}}{EI}\cdot\frac{l}{2}+\frac{M_{BA}}{EI}\cdot\frac{l}{2}-\frac{F}{EI}$$

此の兩式から M_{AB} 及び M_{BA} を求めれば，$\frac{I}{l}=K$；$\frac{\delta}{l}=R$ として，

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R)-\frac{2F}{l^2}(3x-l)\\M_{BA}&=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)+\frac{2F}{l^2}(2l-3x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5-3)$$

第 5–1 表　荷重項の値

	C_{AB}	荷重狀態	C_{BA}
a	$\frac{Pl}{8}$		$\frac{Pl}{8}$
b	$\frac{P}{l^2}ab^2$		$\frac{Pba^2}{l^2}$
c	$\frac{wl^2}{12}$		$\frac{wl^2}{12}$
d	$\frac{wa^2}{12l^2}(3a^2-8al+6l^2)$		$\frac{wa^3}{12l^2}(4l-3a)$
e	$\frac{w}{12l^2}[d^3(4l-3d)-b^3(4l-3b)]$		$\frac{w}{12l^2}[a^3(4l-3a)-c^3(4l-3c)]$
f	$\frac{wl^2}{20}$		$\frac{wl^2}{30}$
g	$\frac{5}{96}wl^2$		$\frac{5}{96}wl^2$

本式は第 5−2 式と同形であるが右端に新に追加された項は中間に作用してゐる荷重の影響を示す項卽ち**荷重項**であつて，荷重項は撓角 θ 及び撓度 δ に關係のない項である。荷重項を C で示せば，一般式は

$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R)-C_{AB} \\ M_{BA}&=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)+C_{BA} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5-4)$$

卽ち，部材端の抵抗モーメントは，中間荷重なき部材の端抵抗モーメントに，支間同長なる固端梁の中間荷重による端抵抗モーメントを代數的に加へたものである。此の追加する荷重項は第 5−1 表に示すやうに，普通の下向きの中間荷重に對しては，C_{AB} は (−)，C_{BA} は (+) の記號を持つてゐる。若し，荷重の方向が反對卽ち上向きであれば，之等の記號も反對となる。

因みに，本章ではウォルソンの撓角撓度公式が本邦に流布してゐる關係から記號は主として之に倣つた。

§3.　單純支承の場合

梁 AB の A は剛結，B がヒンヂ支承（單純支承）なる場合は，$M_{BA}=0$ なる事勿論である。

$$M_{AB}=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R)-C_{AB}.$$
$$M_{BA}=0=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)+C_{BA}$$

之より

$$M_{AB}=EK(3\theta_A-3R)-\left(C_{AB}+\frac{C_{BA}}{2}\right)$$

若し，B が剛結，A がヒンヂ支承であれば同樣にして

$$M_{BA}=EK(3\theta_B-3R)+\left(C_{BA}+\frac{C_{AB}}{2}\right)$$

荷重項を H_{AB} 及び H_{BA} とすれば，

$$\left.\begin{aligned} &B\text{端ヒンヂ}\cdots\cdots M_{AB}=EK(3\theta_A-3R)-H_{AB} \\ &A\text{端ヒンヂ}\cdots\cdots M_{BA}=EK(3\theta_B-3R)+H_{BA} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5-5)$$

§4.　支點及び端部の移動

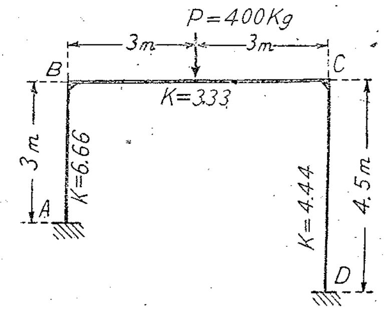
水平梁は端部が移動しないときは $R=0$ となるが，然らざる限りに於ては，移動の方向卽ち R に付すべき正負記號に注意する必要がある（第 5−2 圖參照）。移動によつて生ずべき固定端モーメントは次式から求める事が出來る。

$$C_{AB}=C_{BC}=\frac{6EK\delta}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5-6)$$

ラーメンの如き構造は，横荷重，不對稱荷重，等によつて其の全形が横方向に變形するのであるが，之によつて生ずる變位は撓角撓度公式の中に加へれば良いのである。

§5.　撓角撓度法例題

［算　例 1］　第 5−4 圖の**單徑間固定ラーメン**は 3 次不靜定構造である。第一に注意すべきは撓角であるが，基礎は固定であるから $\theta_A=\theta_D=0$ なる事は明であり，又，B 點に於て部材は剛結合されてゐるから $\theta_{BA}=\theta_{BC}$，同樣にして $\theta_{CB}=\theta_{CD}$，次に BC の長さの變化は微小であるから之を無視すれば $\delta_B=\delta_C=\delta$ 且つ $R_{BC}=0$ とすることが出來，從つて本例題に於ては，θ_B，θ_C，R_{CD} の 3 個が不靜定未知量となるのである。尙ほ，慣性モーメントは梁と柱に於て大さを異にし $K=\frac{I}{l}$ の値は，梁に於て 3.33 柱に於て 6.66 及び 4.44 とする（單位 cm³）。



第 5−4 圖

梁の固定端モーメントは第 5−1 表を利用して，

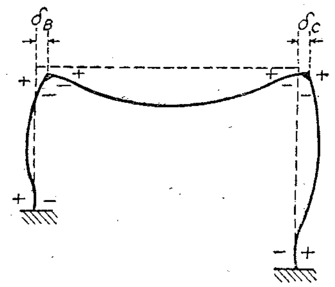
$$C_{CB}=\frac{1}{8}400\times600=30{,}000\ kg\cdot cm$$

$$C_{BC}=30{,}000\ kg\cdot cm$$

撓角撓度公式　$$\left.\begin{aligned} M_{AB}&=2EK(2\theta_A+\theta_B-3R)-C_{AB} \\ M_{BA}&=2EK(2\theta_B+\theta_A-3R)+C_{BA} \end{aligned}\right\}$$ 中間荷重の無い部材に對しては $C_{AB}=0$；$C_{BA}=0$

$$\therefore\quad M_{AB}=13.33E(\theta_B-3R_{AB})\qquad M_{BA}=13.33E(2\theta_B-3R_{AB})$$
$$M_{BC}=6.66E(2\theta_B+\theta_C)-30{,}000\qquad M_{CB}=6.66E(2\theta_C+\theta_B)+30{,}000$$
$$M_{CD}=8.88E(2\theta_C-3R_{CD})\qquad M_{DC}=8.88E(\theta_C-3R_{CD})$$

靜力學的釣合條件式としては $\Sigma M_B=0$，$\Sigma M_C=0$，$\Sigma H=0$ が存在してゐる。



第 5−5 圖

$\Sigma M_B=M_{BA}+M_{BC}=0$ より（第 5−6 圖）

$$40E\theta_B+6.66E\theta_C-40ER_{AB}-30{,}000=0\cdots\cdots(a)$$

$\Sigma M_C=M_{CB}+M_{CD}=0$ より

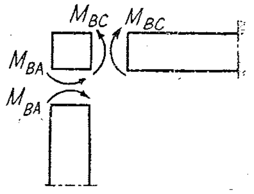
$$6.66E\theta_B+31.11E\theta_C-26.66ER_{CD}+30{,}000=0\cdots\cdots(b)$$

各々の柱に對して $\Sigma M=0$ を適用すれば（第 5−7 圖），

$$M_{AB}+M_{BA}+300\,H_A=0\;;\quad M_{CD}+M_{DC}+450\,H_D=0$$

水平力の和は零であり即ち $\Sigma H=H_A+H_D=0$ であつて，此の關係を入れて上式を併せれば，

$$1.5\,M_{AB}+1.5\,M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}=0$$



第 5−6 圖

然るときは

$$60\,E\theta_B+26.66\,E\theta_C-120\,ER_{AB}-53.33\,R_{CD}=0\cdots\cdots(c)$$

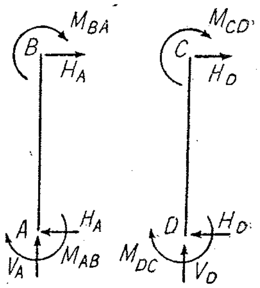
變位角には，$R_{AB}=\dfrac{\delta}{300}$ ；$R_{CD}=\dfrac{\delta}{450}$ なる關係あり，

従て $R_{AB}=1.5\,R_{CD}$ であるから之を (a), (b), (c) の各式に代入すれば，

$$40\,E\theta_B+6.66\,E\theta_C-60\,ER_{CD}-30{,}000=0\cdots\cdots(A)$$

$$6.66\,E\theta_B+31.11\,E\theta_C-26.66\,ER_{CD}+30{,}000=0\cdots\cdots(B)$$

$$60\,E\theta_B+26.66\,E\theta_C-233.33\,ER_{CD}=0\cdots\cdots(C)$$



第 5−7 圖

此の聯立方程式を次表から解けば，

方　程　式	$E\theta_B$	$E\theta_C$	ER_{CD}	定　値	$=0$
(A)	+ 40	+ 6.66	− 60	−30,000	=0
(B)	+ 6.66	+ 31.11	− 26.66	+30,000	=0
(C)	+ 60	+ 26.66	− 233.33	0	=0
$(A)-2.25(B)=D$	+ 25	− 63.3	0	−97,500	=0
$3.89(A)-(C)=E$	+ 95.6	− 0.76	0	−116,700	=0
$3.82(D)-(E)=F$	0	− 241	0	−255,800	=0

$E\theta_C=-1{,}060$　　$E\theta_B=1{,}210$

$ER_{CD}=\ 190$　　$ER_{AB}=1.5\times190=285$

之を原式に代入せば

$$M_{AB}=13.33\,(1{,}210-3\times285)\qquad=+\ 4{,}700\ kg{\cdot}cm$$

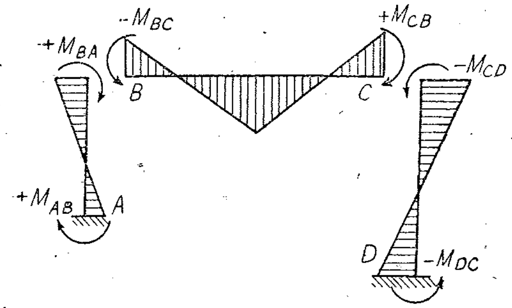
$$M_{BA}=13.33\,(2\times1{,}210-3\times285)\qquad=+\ 20{,}900\ 〃$$

$$M_{BC}=\ 6.66\,(2\times1{,}210-1{,}060)-30{,}000\ =-\ 20{,}900\ 〃$$

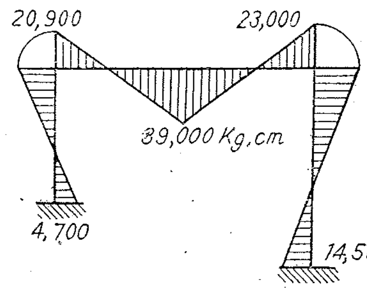
$$M_{CB}=\ 6.66\,(-2\times1{,}060+1{,}210)+30{,}000=+\ 23{,}900\ 〃$$

$$M_{CD}=8.88\,(-2\times1{,}060-3\times190)\qquad=-\ 23{,}900\ 〃$$

$$M_{DC}=8.88\,(-1{,}060-3\times190)\qquad=-14{,}500\ kg{\cdot}cm$$



第 5−8 圖



第 5−9 圖

支點反力及び部材應力は次の如くして求めることが出來る。與へられたラーメンの柱部に於ては（第 5−7 圖），高さが 300 cm 及び 450 cm であるから，

$$H_A=-\frac{1}{300}\,(M_{AB}+M_{BA})$$

$$\left.\begin{aligned}&=-\frac{1}{300}\,(4{,}700+20{,}900)=-85.3\ \mathrm{kg}\\ H_D&=-\frac{1}{450}\,(-23{,}000-14{,}500)=+85{,}3\ \mathrm{kg}\end{aligned}\right\}\ H_A+H_D=\Sigma H=0$$

此の水平反力は同時に梁 BC の軸應力（壓縮）の値を示すのである。梁の兩端に作用する反力は同時に A 點及び D 點の反力を示すのであるが，梁の支間は 900 cm であるから

$$V_B=V_A=-\frac{1}{600}\,(M_{BC}-M_{CB})+(\text{集中荷重 400 kg に因る反力})$$

$$\left.\begin{aligned}&=-\frac{1}{600}\,(-20{,}900+23{,}900)+\frac{300}{600}\,400=195\ \mathrm{kg}\\ V_D=V_C&=\frac{1}{600}\,(-20{,}900+23{,}900)+\frac{300}{600}400=205\ \mathrm{kg}\end{aligned}\right\}\ V_B+V_C=400\ \mathrm{kg}$$

之等の鉛直反力は同時に柱の軸應力（壓縮）となる。

［算　例 2］　次に二層ラーメンに横荷重の作用する場合の解法を示す。横荷重は格（節點）のみに作用してゐるから撓角撓度式には荷重項がないのである（第 5−10 圖）。

$$M_{ab}=2\,EK_{ab}\,(2\,\theta_a+\ \theta_b-3\,R_{ab})\;;\quad M_{cd}=2\,EK_{cd}\,(2\,\theta_c+\ \theta_d-3\,R_{cd})$$

$$M_{ba}=2\,EK_{ab}\,(\ \theta_a+2\theta_b-3\,R_{ab})\;;\quad M_{dc}=2\,EK_{cd}\,(\ \theta_c+2\theta_d-3\,R_{cd})$$

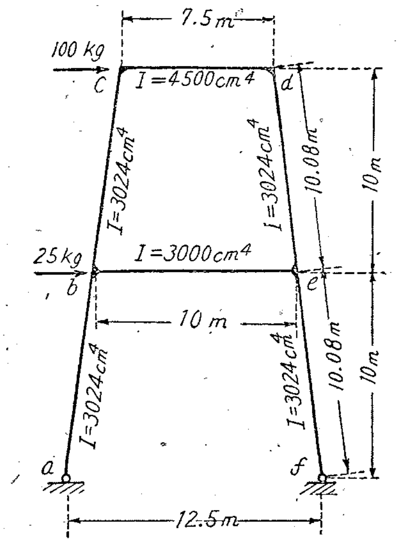
$$M_{bc}=2\,EK_{bc}\,(2\,\theta_b+\ \theta_c-3\,R_{bc})\;;\quad M_{de}=2\,EK_{de}\,(2\,\theta_d+\ \theta_e-3\,R_{de})$$

$$M_{cb}=2\,EK_{bc}\,(\ \theta_b+2\,\theta_c-3\,R_{bc})\;;\quad M_{ed}=2\,EK_{de}\,(\ \theta_d+2\theta_e-3\,R_{de})$$

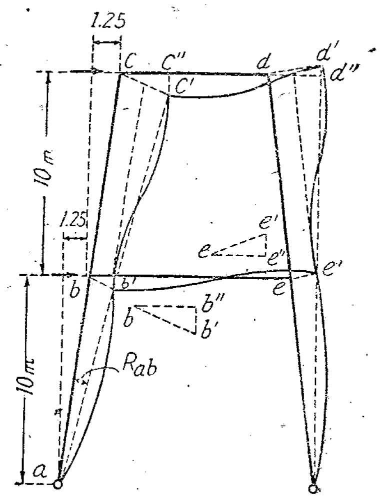
$$M_{be}=2EK_{be}(2\theta_b+\theta_e-3R_{be})\ ;\quad M_{ef}=2EK_{ef}(2\theta_e+\theta_f-3R_{ef})$$

$$M_{eb}=2EK_{be}(\theta_b+2\theta_e-3R_{be})\ ;\quad M_{fe}=2EK_{ef}(\theta_e+2\theta_f-3R_{ef})$$

支點はヒンヂであるから，$M_{ab}=0$；$M_{fe}=0$, 軸應力の影響を無視して部材長は變化しないものとすれば，R は次式から求められる (第 5−11 圖)。



第 5−10 圖



第 5−11 圖

$$bb'=10.08\,R_{ab}$$

$$\left.\begin{aligned}bb''&=10.08\,R_{ab}\times\frac{10}{10.08}=10\,R_{ab}\\ b''b'&=10.08\,R_{ab}\times\frac{1.25}{10.08}=1.25\,R_{ab}\\ ee''&=10.08\,R_{fe}\times\frac{10}{10.08}=10\,R_{fe}=bb''\end{aligned}\right\}\ R_{ab}=R_{fe}$$

$$e''e'=10.08\,R_{fe}\times\frac{1.25}{10.08}=1.25\,R_{fe}=1.25\,R_{ab}$$

$$R_{be}=-\frac{1}{10}(b''b'+e''e')=-0.25\,R_{ab}$$

$$cc''=bb''+10.08\,R_{bc}\times\frac{10}{10.08}=10\,R_{ab}+10\,R_{bc}=10\,(R_{ab}+R_{bc})$$

$$dd''=cc''=ee''+10.08\,R_{de}\times\frac{10}{10.08}=10\,(R_{ab}+R_{de})$$

$$R_{de}=R_{bc}$$

$$R_{cd}=-\frac{1}{7.5}(c'c''+d'd'')$$

$$=-\frac{1}{7.5}\left(b'b''+10.08\,R_{bc}\times\frac{1.25}{10.08}+e'e''+10.08\,R_{de}\times\frac{1.25}{10.08}\right)$$

$$=-\frac{1}{7.5}(1.25\,R_{ab}+1.25\,R_{bc}+1.25\,R_{ab}+1.25\,R_{bc})$$

$$=-\frac{1}{3}R_{ab}-\frac{1}{3}R_{bc}$$

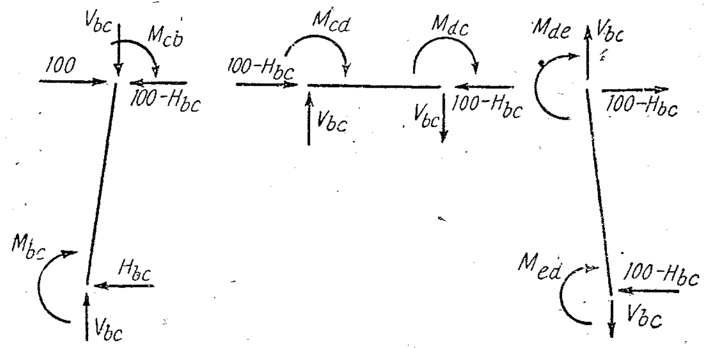
依つて，不靜定未知量は θ_a, θ_b, θ_c, θ_d, θ_e, θ_f 及び R_{ab}, R_{bc} の 8 個である。之に對して條件方程式は，

$$\Sigma M_a=M_{ab}=0 \quad\cdots\cdots(1')\qquad \Sigma M_c=M_{cb}+M_{cd}=0\quad\cdots\cdots(4')$$

$$\Sigma M_f=M_{fe}=0 \quad\cdots\cdots(2')\qquad \Sigma M_d=M_{dc}+M_{de}=0\quad\cdots\cdots(5')$$

$$\Sigma M_b=M_{ba}+M_{be}+M_{bc}=0 \quad\cdots\cdots(3')\qquad \Sigma M_e=M_{ed}+M_{eb}+M_{ef}=0\quad\cdots\cdots(6')$$

の 6 式あり。更に第一層の脚の下端 b 及び e 點に於て切斷すれば (第 5−12圖),



第 5−12 圖

$$1.25\,V_{bc}+10\,H_{bc}+M_{bc}+M_{cb}=0$$

$$1.25\,V_{bc}+10\,(100-H_{bc})+M_{ed}+M_{de}=0$$

此の 2 式を加へれば

$$M_{bc}+M_{cb}+M_{de}+M_{ed}+2.5\,V_{bc}+1000=0\quad\cdots\cdots\cdots(a)$$

梁 cd に對しては

$$M_{cd}+M_{dc}+7.5\,V_{bc}=0$$

玆に $M_{cd}=-M_{cb}$；$M_{dc}=-M_{de}$ なるを以て之を代入すれば

$$-M_{cb}-M_{de}+7.5\,V_{bc}=0\qquad 或は\qquad -\frac{1}{3}M_{cb}-\frac{1}{3}M_{de}+2.5\,V_{bc}=0$$

之を (a) 式より差引けば

$$M_{bc}+\frac{4}{3}M_{cb}+\frac{4}{3}M_{de}+M_{ed}+1000=0 \quad\cdots\cdots\cdots(7')$$

次に第二層に於ては (第 5—13 圖),

$$M_{ba}+10H_{ab}+1.25\,V_{ab}=0 \quad ; \quad M_{ef}+10\,(125-H_{ab})+1.25\,V_{ab}=0$$

此の 2 式を加へて

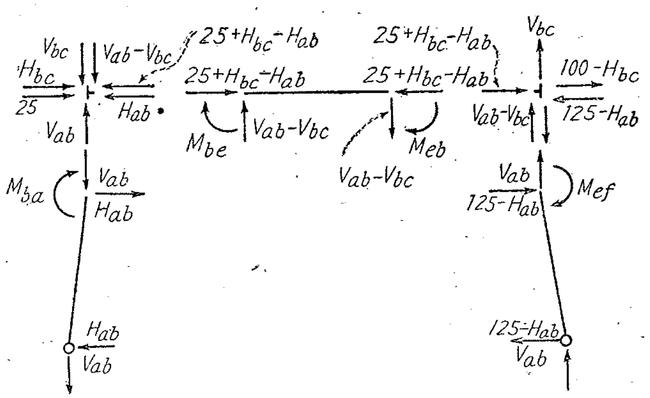
$$M_{ba}+M_{ef}+1250+2.5\,V_{ab}=0$$

梁 be に於て

$$M_{be}+M_{eb}+(V_{ab}-V_{bc})\,10=0$$

茲に $M_{be}=-M_{ba}-M_{bc}$; $M_{eb}=-M_{ed}-M_{ef}$ (第 3 式及第 6 式) なるを以て，前記と同じ方法をとれば

$$\frac{5}{4}M_{ba}+\frac{1}{4}M_{bc}+\frac{1}{4}M_{ed}+\frac{5}{4}M_{ef}+\frac{1}{3}M_{cb}+\frac{1}{3}M_{de}+1250=0 \quad\cdots(8')$$



第　5—13　圖

以上 8 個の條件式に對して各部の M に撓角撓度公式を代入すれば，次に示す 8 個の聯立式が得られる。

$$2\,EK_{ab}\,(2\,\theta_a+\theta_b-3\,R_{ab})=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2\,EK_{ef}(\theta_e+2\,\theta_f-3\,R_{ab})=0 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$2\,E\theta_aK_{ab}+2\,E\theta_b\,(2\,K_{ab}+2\,K_{be}+2\,K_{bc})+2\,E\theta_cK_{bc}+2\,E\theta_eK_{be}$$
$$-6ER_{ab}\left(K_{ab}-\frac{1}{4}K_{be}\right)-6\,ER\ _cK_{bc}=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$2\,E\theta_bK_{bc}+2\,E\theta_c\,(2\,K_{bc}+2\,K_{cd})+2\,E\theta_dK_{cd}-6ER_{bc}\left(K_{bc}-\frac{1}{3}K_{cd}\right)$$
$$-6\,ER_{ab}\left(-\frac{1}{3}K_{cd}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$2\,E\theta_cK_{cd}+2\,E\theta_d(2\,K_{cd}+2\,K_{de})+2\,E\theta_eK_{de}-6\,ER_{bc}\left(K_{de}-\frac{1}{3}K_{cd}\right)$$
$$-6\,ER_{ab}\left(-\frac{1}{3}K_{cd}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

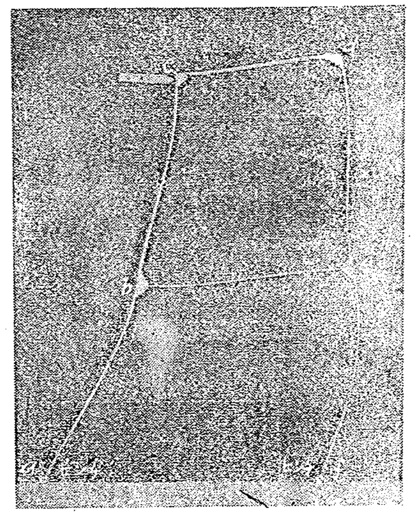
$$2\,E\theta_dK_{de}+2\,E\theta_e\,(2\,K_{de}+2\,K_{eb}+2\,K_{ef})+2\,E\theta_bK_{eb}+2\,E\theta_fK_{ef}-6ER_{bc}(K_{de})$$
$$-6\,ER_{ab}\left(K_{ef}-\frac{1}{4}K_{eb}\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$2\,E\theta_b\left(\frac{10}{3}K_{bc}\right)+2\,E\theta_c\left(\frac{11}{3}K_{bc}\right)+2\,E\theta_d\left(\frac{11}{3}K_{de}\right)+2\,E\theta_e\left(\frac{10}{3}K_{de}\right)$$
$$-6\,ER_{bc}\left(\frac{7}{3}K_{bc}+\frac{7}{3}K_{de}\right)+1000=0 \quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$2\,E\theta_a\left(\frac{5}{4}K_{ab}\right)+2\,E\theta_b\left(\frac{10}{4}K_{ab}+\frac{1}{2}K_{bc}+\frac{1}{3}K_{bc}\right)+2\,E\theta_c\left(\frac{1}{4}K_{bc}+\frac{2}{3}K_{bc}\right)$$
$$+2\,E\theta_d\left(\frac{1}{4}K_{de}+\frac{2}{3}K_{de}\right)+2\,E\theta_e\left(\frac{1}{2}K_{de}+\frac{10}{4}K_{ef}+\frac{1}{3}K_{de}\right)$$
$$-6\,ER_{ab}\left(\frac{5}{4}K_{ab}+\frac{5}{4}K_{ef}\right)+2\,E\theta_f\left(\frac{5}{4}K_{ef}\right)$$
$$-6\,ER_{bc}\left(\frac{1}{4}K_{bc}+\frac{1}{4}K_{de}+\frac{1}{3}K_{bc}+\frac{1}{3}K_{de}\right)+1250=0 \quad\cdots\cdots\cdots(8)$$

之等の條件式に於ける K の値は

$$K_{ab}=K_{ef}=K_{bc}=K_{de}$$
$$=\frac{3024}{10.08\times100^4}=3\times10^{-6}\ (m^3)$$
$$K_{be}=\frac{3000}{10\times100^4}=3\times10^{-6}\ (m^3)$$
$$K_{cd}=\frac{4500}{7.5\times100^4}=6\times10^{-6}\ (m^3)$$



寫眞 5—1　左上に横荷重ある場合の變形

番號	組合法	$2E\theta_a$	$2E\theta_b$	$2E\theta_c$	$2E\theta_d$	$2E\theta_e$	$2E\theta_f$	$6ER_{ab}$	$6ER_{bc}$	$\times 10^6=0$
(1)		6.0	3.0					−3.0		0
(3)		3.0	18.0	3.0		3.0		−2.25	−3.0	0
(8)		3.75	10.0	2.75	2.75	10.0	3.75	−7.5	−3.5	1250
(4)			3.0	18.0	6.00			2.0	− 1.0	0
(6)			3.0		3.0	18.0	3.0	−2.25	− 3.0	0
(7)			10.0	11.0	11.0	10.0			−14.0	1000
(5)				6.0	18.0	3.0		+2.0	− 1.0	0
(2)						3.0	6.0	−3.0		0
(9)	(1)÷2	3.0	1.5					−1.5		0
(10)	(1)÷1.6	3.75	1.875					−1.875		0
(11)	(3)−(9)		16.5	3.0		3.0		−0.75	− 3.0	0
(12)	(8)−(10)		8.125	2.75	2.75	10.0	3.75	−5.625	− 3.5	1250
(13)	(4)		3.0	18.0	6.00			2.0	− 1.0	0
(14)	(6)		3.0		3.0	18.0	3.0	−2.25	− 3.0	0
(15)	(7)		10.0	11.0	11.0	10.0			−14.0	1000
(16)	(11)÷2.031		8.125	1.477		1.477		−0.369	−1.477	0
(17)	(11)÷5.5		3.0	0.545		0.545		−0.136	−0.545	0
(18)	(11)÷5.5		3.0	0.545		0.545		−0.136	−0.545	0
(19)	(11)÷1.650		10.0	1.818		1.818		−0.455	−1.818	0
(20)	(12)−(16)			1.273	2.75	8.523	3.75	−5.256	− 2.023	1250
(21)	(13)−(17)			17.455	6.00	−0.545		2.136	− 0.454	0
(22)	(14)−(18)			−0.545	3.0	17.455	3.0	−2.114	− 2.455	0
(23)	(15)−(19)			9.182	11.0	8.182		0.455	−12.182	0
(24)	(5)			6.0	18.0	3.0		2.0	− 1.0	1000
(25)	(21)÷13.710			1.273	0.438	−0.040		0.156	−0.033	0
(26)	(21)÷32.031			0.545	0.187	−0.017		0.067	−0.014	0
(27)	(21)÷ 1.089			9.182	3.156	−0.286		1.124	−0.239	0
(28)	(21)÷ 2.910			6.000	2.062	−0.187		0.734	−0.156	0
(29)	(20)−(25)				2.312	−8.563	3.75	−5.412	− 1.990	1250
(30)	(22)+(26)				3.312	17.438	3.0	−2.047	− 2.469	0
(31)	(23)−(27)				7.844	8.468		−0.669	−11.943	0
(32)	(24)−(28)				15.938	3.187		1.266	− 0.844	1000
(33)	(32)÷6.890				2.312	0.462		0.184	−0.122	0
(34)	(32)÷5.025				3.187	0.637		0.253	−0.169	0
(35)	(32)÷2.032				7.844	1.569		0.623	−0.415	0

(36)	(29)−(33)					8.101	3.75	−5.596	− 1.868	1250
(37)	(30)−(34)					16.801	3.00	−2.300	− 2.300	0
(38)	(31)−(35)					6.899		1.292	−11.528	1000
(39)	(2)					3.0	6.0	−3.0		0
(40)	(37)÷2.074					8.101	1.446	−1.109	−1.109	0
(41)	(37)÷2.435					6.899	1.232	−0.944	−0.944	0
(42)	(37)÷5.600					3.0	0.536	−0.411	−0.411	0
(43)	(36)−(40)						2.304	−4.487	− 0.759	1250
(44)	(38)−(41)						−1.232	−0.348	−10.584	1000
(45)	(39)−(42)						5.464	−2.589	− 0.411	0
(46)	(45)÷2.371						2.304	−1.092	0.173	0
(47)	(45)÷4.435						1.232	−0.584	0.093	0
(48)	(43)−(46)							−3.395	− 0.932	1250
(49)	(44)+(47)							−0.932	−10.491	1000
(50)	(48)÷3.642							−0.932	− 0.256	343.15
(51)									−10.235	656.85

$$6\,ER_{de}=6\,ER_{bc}=\ 64.18\times(10^6)$$

$$-3.395\,(6\,ER_{ab})-59.81+1250=0 \qquad 6\,ER_{fe}=6ER_{ab}=350.57\ \ ''$$

$$5.464\,(2\,E\theta_f)-907.46+26.38=0 \qquad 2E\theta_f\ =161.30\ \ ''$$

$$3.0\,(2E\theta_e)+967.58-1051.52=0 \qquad 2E\theta_e\ =\ 27.90\ \ ''$$

$$15.938\,(2E\theta_d)+88.89+443.74-54.17=0 \qquad 2E\theta_d\ =-30.00\ \ ''$$

$$6.0\,(2\,E\theta_c)-540.36+83.67+701.01-64.18=0 \qquad 2E\theta_c\ =-30.00\ \ ''$$

$$3.0\,(2E\theta_b)-540.45-180.12+701.01-64.18=0 \qquad 2E\theta_b\ =\ 27.90\ \ ''$$

$$6.0\,(2E\theta_a)+83.73-1051.52=0 \qquad 2E\theta_a\ =\ 161.20\ \ ''$$

$$6ER_{cd}=-138.25\ \ ''$$

$$6ER_{be}=-87.64\ \ ''$$

此の結果を端モーメントの式に代入すれば,

$$M_{ab}=3\ (322.6+27.9-350.5)=0 \qquad (\text{單位 kg.m})$$

$$M_{ba}=3\ (161.3+55.8-350.5)=-400$$

$$M_{bc}=3\ (\ 55.8-30.0-\ 64.1)=-114$$

$$M_{cb}=3\ (\ 27.9-60.0-\ 64.1)=-289$$

$$M_{be}=3\ (\ 55.8+27.9+\ 87.6)=+514$$

$M_{eb}=3\,(\ \ 27.9+55.8+87.6)\ \ =+514$

$M_{cd}=6\,(-60.0-30.0+138.2)\ =+289$

$M_{dc}=6\,(-30.0-60.0+138.2)\ =+289$

$M_{dc}=3\,(-60.0+27.9-\ 64.1)\ =-289$

$M_{ed}=3\,(-30.0+55.8-\ 64.1)\ =-114$

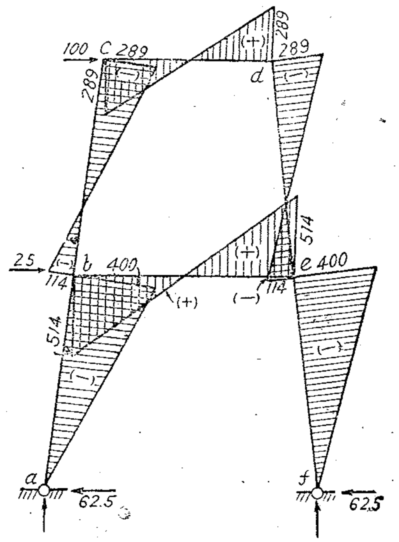
$M_{ef}=3\,(-55.8+161.3-350.5)=-400$

$M_{fe}=3\,(27.9+322.6-350.5)=0$

検算 $\Sigma M_b=M_{ba}+M_{bc}+M_{be}=0\cdots\cdots-400-114+514=0$

$\Sigma M_e=M_{ed}+M_{eb}+M_{ef}=0\cdots\cdots-114+514-400=0$

反力，部材軸應力，剪斷力は次のやうにして求めることが出來る。



第 5−14 圖

荷重及び反力卽ち外力に對しては，$\Sigma M_f=0$ から

$100\times20+25\times10+V_{ab}\times12.5=0$ $\qquad V_{ab}=-\dfrac{2250}{12.5}=-180\,\mathrm{kg}$ （下向）

同じく $\Sigma M_a=0$ 或は $\Sigma V=0$ から $\qquad V_{fe}=-V_{ab}=\quad 180\,\mathrm{kg}$ （上向）

支點の水平反力は，$M_{ba}=-400\,\mathrm{kg.m}$ であるから

$$M_{ab}+10\,H_{ab}+1.25\,V_{ab}=0 \text{ 或は } H_{ab}=-\frac{1}{10}\left(M_{ab}+1.25\,V_{ab}\right)$$

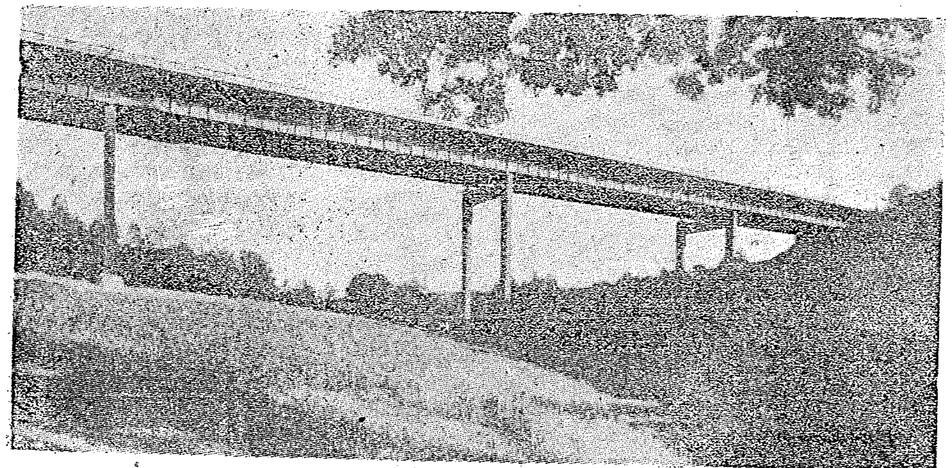
$$H_{ab}=\frac{1}{10}\,(225+400)=62.5\ \mathrm{kg},\quad H_{fe}=125-62.5=62.5\,\mathrm{kg}$$

構造が對稱であるから左右水平反力も亦相等しい。

部材 ab の軸應力は，$S_{ab}=180\times\dfrac{\sqrt{10^2+1.25^2}}{10}=180\times\dfrac{10.08}{10}=181\ \mathrm{kg}$ （引張力）

部材 ab の剪斷力は $\quad Q_{ab}=H_{ab}=62.5\ \mathrm{kg}$

尙ほ，其の他の諸力は第 5−12，5−13 圖を參照すれば容易に解くことが出來る。



寫 眞 5—2 二鉸ラーメンを用ひた橋脚

［算例 3］ 第6−1圖の連續梁は第6章第7章記載の諸法に依つても解き得るが，玆に比較の爲に撓角撓度法に依る解法を示す。此の連續梁に於ては，$M_{AB}=O$ ；$\theta_D=O$ ；$M_{BA}=M_{BC}$ ；$M_{CB}=M_{CD}$ なる事明らかである。載荷徑間の固定端モーメントは $C_{AB}=4{,}000\ \mathrm{kg{\cdot}m}=C_{BA}$ ；$C\ \ =12{,}000\,\mathrm{kg\cdot m}$ ；$C_{CB}=6{,}000\ \mathrm{kg{\cdot}m}$ であるから，撓角撓度式は，

$$M_{AB}=4E\,(2\theta_A+\theta_B)-\ 4{,}000=0\quad ;\ M_{BA}=4E\,(2\theta_B+\theta_A)+4{,}000=M_{BC}$$

$$M_{BC}=6E\,(2\theta_B+\theta_C)-12{,}000\qquad ;\ M_{CB}=6E\,(2\theta_O+\theta_B)+6{,}000=M_{CB}$$

$$M_{CD}=2E\,(2\theta_C+\theta_D)=4E\theta_C\qquad ;\ M_{DC}=2E\,(2\theta_D+\theta_C)=2E\theta_C$$

然るときは θ_A ；θ_B ；θ_C に關する次の聯立方程式が得られる。

$$4E\,(2\theta_A+\theta_B)-4{,}000=0$$

$$4E\,(2\theta_B+\theta_A)+4{,}000+6E\,(2\theta_B+\theta_C)-12{,}000=0$$

$$6E\,(2\theta_C+\theta_B)+6{,}000+2E\,(2\theta_C)=0$$

之を解けば，$E\theta_A=238$ ；$E\theta_B=524$ ；$E\theta_C=-571$．依つて，

$$M_{BA}=\ 8\times524+4\times238+\ 4{,}000=9{,}140\ \mathrm{kg.m}$$

$$M_{BC}=12\times524-6\times571-12{,}000=-9{,}140$$

$$M_{CB}=-12\times571+6\times524+6{,}000=2{,}280$$

$$M_{CD}=-4\times571=-2{,}280$$

$$M_{DC}=-2\times571=-1{,}140$$

M の正負記號は支點の左右で反對であり，圖示すれば第 6−4 圖の通りである。

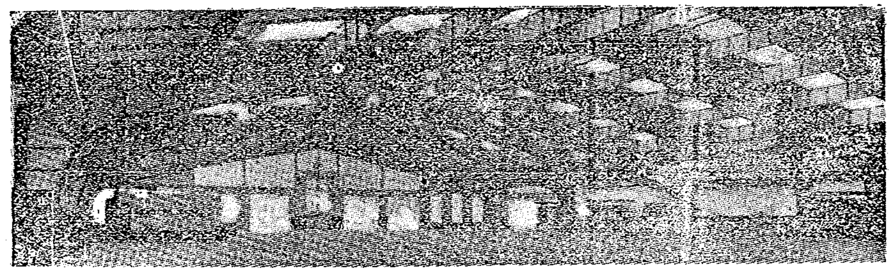
§6. 剪斷力及び反力

梁及び柱に作用する剪斷力は兩端固定梁に對する公式が其の儘適用される。剪斷力は單純梁としての剪斷力 Q_o と，端モーメント M_{AB} 及び M_{BA} より生ずる剪斷力の合計であつて，端モーメントの正負は前揭の用法をその儘用ひ，

$$Q=Q_o-\frac{M_{AB}-M_{BA}}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5-7)$$

反力は，A_o 及び B_o を單純梁の反力とすれば，

$$A=A_o-\frac{M_{AB}-M_{BA}}{l}\ ;\ B=B_o+\frac{M_{AB}-M_{BA}}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots(5-8)$$



寫 眞 5—3 ラーメンを主骨とした自動車車庫

支點剪斷力は

$$Q_A = A \quad ; \quad Q_B = -B \cdots\cdots (5-9)$$

此の算例は［算例 1］の最後に示した通りである。

寫眞 5—4 驛上家のラーメン