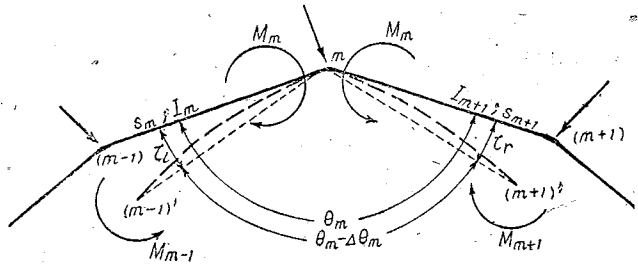


第 4 章 撓み及び撓角

§ 1. 剛結格点を有する連続部材の角変化

第 4-1 圖に圖示した $(m-1), m, (m+1)$ の諸格点を以て連続した一つの構造は、一平面内に在り、外力は此の平面内に於て各格點にのみ作用し、各部材は直應力（軸應力）に抵抗し得ると共に曲げモーメント並に剪斷力に抵抗し得るものとなし、且つ各格點は剛結合されて居るものと假定する。斯くの如き構造の外力による變形は、主として曲げモーメントの影響



第 4-1 圖

に因つて生ずるから、茲には直應力並に剪斷力の影響を無視して、曲げモーメント $M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, \dots$ によつて生ずる格點の角変化、例へば格點 m の角度 θ_m の變化量 $\Delta\theta_m$ を求める事とする。

此の連続部材 (Stabzug) は外力の載荷に因つて弾性變形を行ひ、格點 $(m-1), (m+1)$ は格點 m に相對的に $(m-1)', (m+1)'$ に移動するものとする。而して若し m 點がヒンヂで在れば各部材 s_m 及び s_{m+1} は $m, (m-1)'$ 及び $m, (m+1)'$ の直線 (細い點線) の形を採るが、 m 點が剛結合されて居るとすれば、太い點線で示した曲線の形を呈して夫れは m 點で元の直線に對して切線を爲し、恰も m 點で固定された片持梁 (突桁) のやうに彎曲するのである。そのときの角度の關係は次式で示される。

$$\theta_m - (\tau_l + \tau_r) = \theta_m - \Delta\theta_m \quad ; \quad \Delta\theta_m = \tau_l + \tau_r \quad \dots\dots\dots(4-1)$$

部材 s_m を採り出して之を第 4-2 圖のやうに m 點で固定された片持梁と考へ、此の部材の慣性モーメントを I_m とすれば、モールの撓角撓度に關する第一定理によつて、 $(m-1)$ 點の鉛直變位 δ_{m-1} は $S_{m-1}/E \cdot I_m$ で示す事が出来る。茲に S_{m-1} は部材 s_m の曲げモーメント圖に對して $(m-1)$ 點で採つた一次モーメント (Statical moment) であつて、

$$S_{m-1} = \frac{s_m}{3} \cdot \frac{s_m \cdot M_{m-1}}{2} + \frac{2}{3} s_m \cdot \frac{s_m \cdot M_m}{2}$$

然るに一方に於いて、 $\delta_{m-1} = s_m \cdot \tau_l$ であるから以上の關係から τ_l を求めれば、

$$\tau_l = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{6EI_m} \cdot \delta_m$$

同様の事を部材 s_{m+1} に就いて考へれば

$$\tau_r = \frac{M_m + 2M_{m+1}}{6EI_{m+1}} \cdot \delta_{m+1}$$

依て剛格點を有する連續部材の格點の角變化は

$$\Delta\theta_m = \tau_l + \tau_r = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{6EI_m} \cdot \delta_m + \frac{M_m + 2M_{m+1}}{6EI_{m+1}} \cdot \delta_{m+1} \dots (4-2)$$

以上は本章 §9, §13, §14 に關係する所が多い。

曲梁の場合 前述の連續部材に於て各部材の長さ s_{m-1}, s_m, s_{m+1} が微小であるとすれば、全體はアーチの主骨に用ひられるやうな曲線梁と成り、挾角 θ は 180° から微小角 $d\theta$ を差引いたものとする。第 4-3 圖に於て、

$$\theta + d\theta = 180^\circ ; \Delta\theta + \Delta d\theta = 0$$

$$\therefore \Delta\theta = -\Delta d\theta$$

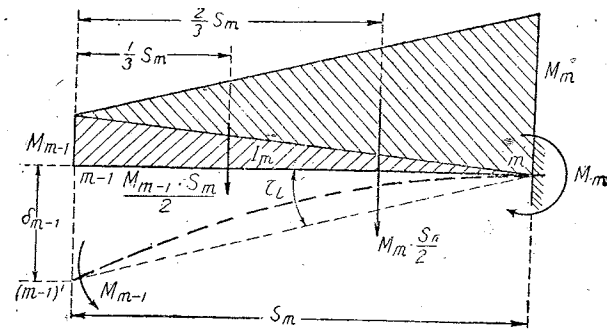
各部材の長さ s_{m-1}, s_m, s_{m+1} は微小であるから之が等長であつて ds なりとすれば、隣接格點に作用する曲げモーメントの大きさ M_{m-1}, M_m, M_{m+1} の差も微小であるから、之等を $M-dM, M, M+dM$ と置き換える事が出来る。I を定値と見做せば、

$$\Delta d\theta = \frac{M-dM+2M}{6EI} ds + \frac{M+dM+2M}{6EI} ds = \frac{M \cdot ds}{EI}$$

$ds \cdot \cos \varphi = dx$ を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \text{曲線梁に對し } \Delta d\theta &= \frac{M}{EI \cos \varphi} dx \\ \text{直線梁に對し } \Delta d\theta &= \frac{M}{EI} dx \quad (\varphi=0) \end{aligned} \right\} \dots (4-3)$$

上下兩縁不等溫度變化に因る角變化は、溫度變化の差異が第 4-4 圖に示す如く直線的



第 4-2 圖

比例を爲すものとすれば、

$$\Delta d\theta_l = \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot ds}{h} \dots (4-4)$$

ε は溫度伸縮係數である。

§ 2. 弦長變化の公式

第 4-5 圖に示す剛結合格點を有する多角形の連續部材は格點に作用する荷重の爲に彈性變形を生じ、其の支間 l は Δl だけ變化したものと考へる。

Δl は次の二つから成立する。第一は各部材の長さの變化 Δs の水平分長であつて之の合計を Δl_1 とし、第二は各格點の角變化 $\Delta\theta$ に基くものであつて之の合計を Δl_2 とす

れば、 $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ 、前者は s_m 部材に於ては $\Delta s_m \cdot \cos \varphi_m$ 、後者は格點 m に對して $y_m \cdot \Delta\theta_m$ であるから、

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$= \sum \Delta s \cdot \cos \varphi$$

$$+ \sum y \cdot \Delta\theta$$

$\Delta s \cdot \cos \varphi$ を

$$\frac{\Delta s}{s} \cdot s \cos \varphi \text{ と書$$

き換へ、 $\frac{\Delta s}{s}$ はフック

の法則に依つて $\frac{\sigma}{E}$ と書けば、

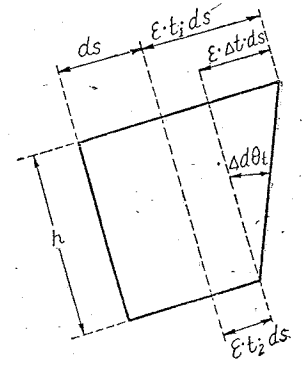
$$\Delta l = \sum \frac{\sigma}{E} \cdot s \cos \varphi + \sum y \cdot \Delta\theta \dots (4-5)$$

本書では之を弦長變化の公式と假稱して置く。

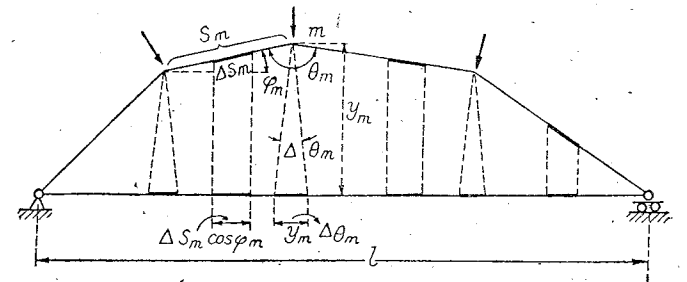
連續部材が曲線を呈する場合は (第 4-3 圖)、

$$\Delta l = \int \frac{\sigma}{E} \cdot ds \cdot \cos \varphi + \int y \cdot \Delta d\theta \dots (4-6.a)$$

$\sigma = \pm \frac{N}{A}$; $\Delta d\theta = \pm \frac{M}{EI} \cdot ds$; $ds \cdot \cos \varphi = dx$ を代入すれば弦長の伸縮を決定することが出来る。



第 4-4 圖



第 4-5 圖

$$\Delta l = \pm \int \frac{N \cdot dx}{EA} \pm \int \frac{M \cdot y \cdot ds}{EI} \dots\dots\dots(4-6.b)$$

§3. 格点ヒンジより成る連続部材の角変化

第 4-6 圖に示す三角形は格点ヒンジより成るトラスの一部の如き或る連続部材と考へれば、部材 2-3 の長さの変化は第 4-5 式により、

$$\Delta l = \Delta s_1 = \frac{\sigma_2}{E} \cdot s_2 \cdot \cos \alpha_3 + \frac{\sigma_3}{E} \cdot s_3 \cdot \cos \alpha_2 + h_1 \cdot \Delta \alpha_1$$

然るに、 $\Delta s_1 = \frac{\sigma_1}{E} \cdot s_1$

$$s_1 = h_1 (\cot \alpha_2 + \cot \alpha_3)$$

$$s_2 = \frac{h_1}{\sin \alpha_3}; \quad s_3 = \frac{h_1}{\sin \alpha_2}$$

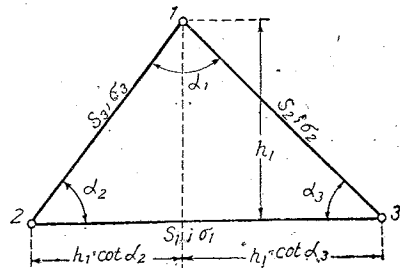
であるから、之等を上式に入れて整理すれば、

$$\Delta \alpha_1 = \frac{1}{E} [(\sigma_1 - \sigma_3) \cot \alpha_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cot \alpha_3] \dots\dots\dots(4-7)$$

同様にして

$$\Delta \alpha_2 = \frac{1}{E} [(\sigma_2 - \sigma_3) \cot \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cot \alpha_3]$$

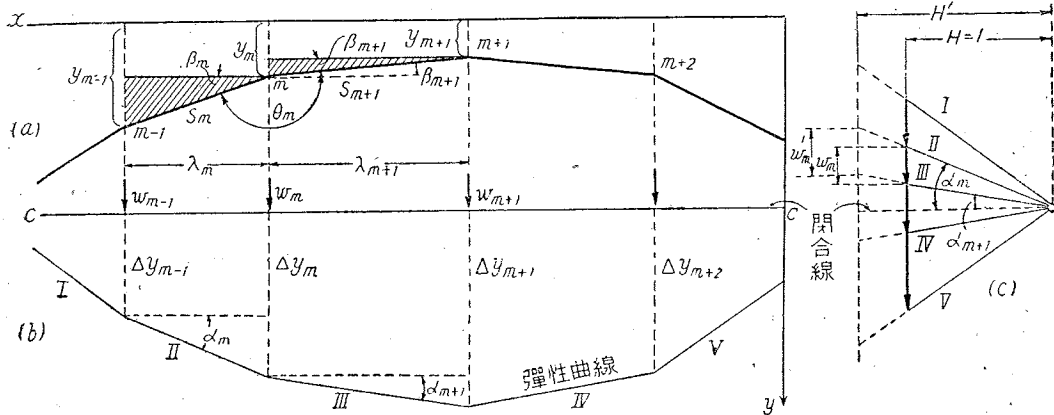
$$\Delta \alpha_3 = \frac{1}{E} [(\sigma_3 - \sigma_2) \cot \alpha_1 + (\sigma_3 - \sigma_1) \cot \alpha_2]$$



第 4-6 圖

§4. 連力圖としての連続部材弾性曲線；弾性荷重

第 4-7 圖に示せる連続部材の格点 $m-1, m, m+1 \dots$ の x 軸 (水平) に對する縦距を



第 4-7 圖

$y_{m-1}, y_m, y_{m+1} \dots$ とし、格点に作用する外力に依る $y_{m-1}, y_m, y_{m+1} \dots$ の變化量即ち撓み (Deflection) $\Delta y_{m-1}, \Delta y_m, \Delta y_{m+1} \dots$ を、弾性荷重の利用に依つて求める。

弾性荷重とは或る適當に定められた大きさを持つて居る假想的な荷重であつて、この荷重を以て連力圖を作圖すれば、その閉合線と連力圖との間の縦距が求めんとする撓みとなるものである。詳しく言へば、第 4-7 圖に於て任意線 $c-c$ の直下に撓み $\Delta y_{m-1}, \Delta y_m, \Delta y_{m+1}$ をとつて弾性曲線 (多角形) I, II, III, \dots を畫くとき、此の曲線は或る荷重系 $w_1, w_2, w_3 \dots$ の連力圖であると看做することが出来るのであるが、若し $w_1, w_2, w_3 \dots$ が豫め解つてゐれば、之の連力圖を畫く事によつて構造物の撓みが直に求められるのである。此の意味の $w_1, w_2, w_3 \dots$ が弾性荷重であり、ミュウラア・プレスラウはトラスの撓みを此の弾性荷重を利用して巧みに解いたのである。

連力圖を作圖する爲の力多角形の極距 H は如何にとつても良いのであるが、 H が大なる程 w は大となるから (第 4-7 圖 (c)), 簡單化する爲に $H=1$ とする。斯くの如くして、ある構造物の撓みを求めるには、弾性荷重を先づ決定し、然る後に極距 $H=1$ とし連力圖を畫けば此の多角形が撓度多角形 (弾性線) となるのであり、作圖法に依らず計算に依らうとする場合は、弾性荷重に因る曲げモーメントを算出すれば夫れが撓みである。而して連続部材の弾性荷重 w_m の値は次の關係から之を定める事が出る。第 4-7 圖の連力圖と力多角形に於て、

$$w_m = 1 \cdot \tan \alpha_m - 1 \cdot \tan \alpha_{m+1}$$

$$\tan \alpha_m = \frac{1}{\lambda_m} (\Delta y_m - \Delta y_{m-1}); \quad \tan \alpha_{m+1} = \frac{1}{\lambda_{m+1}} (\Delta y_{m+1} - \Delta y_m)$$

$$\therefore w_m = 1 \left(\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} \right) \dots\dots\dots(4-8)$$

第 4-7 圖 (a) の影線部分に於て、 s_m に對しては、

$$y_{m-1} - y_m = s_m \cdot \sin \beta_m$$

$$\therefore \Delta y_{m-1} - \Delta y_m = s_m \cdot \cos \beta_m \cdot \Delta \beta_m + \sin \beta_m \cdot \Delta s_m$$

之を $-\lambda_m = -s_m \cos \beta_m$ にて除せば

$$\frac{1}{\lambda_m} (\Delta y_m - \Delta y_{m-1}) = -\frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \beta_m - \Delta \beta_m$$

同様に s_{m+1} に對しては $y_m - y_{m+1} = s_{m+1} \cdot \sin \beta_{m+1}$ であつて、

$$\frac{1}{\lambda_{m+1}} (\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = -\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \beta_{m+1} - \Delta \beta_{m+1}$$

之等の関係を w_m の式に代入せば、

$$w_m = \Delta\beta_{m+1} - \Delta\beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \beta_m$$

然るに $180^\circ + \beta_{m+1} - \beta_m = \theta_m$ なる関係があり、之を微分すれば、

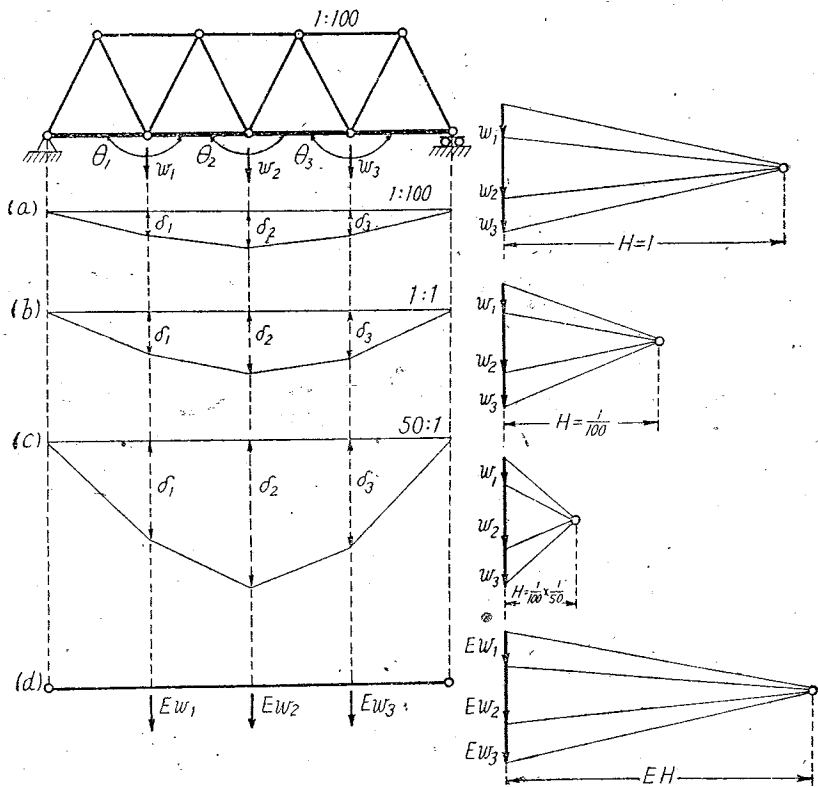
$$\Delta\beta_{m+1} - \Delta\beta_m = \Delta\theta_m$$

依つて

$$w_m = \Delta\theta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \tan \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \tan \beta_m \dots\dots\dots(4-9)$$

フックの法則に依つて $\frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} = \frac{\sigma_{m+1}}{E}$; $\frac{\Delta s_m}{s_m} = \frac{\sigma_m}{E}$ と書けば

$$\left. \begin{aligned} w_m &= \Delta\theta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} \cdot \tan \beta_{m+1} - \frac{\sigma_m}{E} \cdot \tan \beta_m \\ E \cdot w_m &= E \cdot \Delta\theta_m + \sigma_{m+1} \cdot \tan \beta_{m+1} - \sigma_m \cdot \tan \beta_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-10)$$



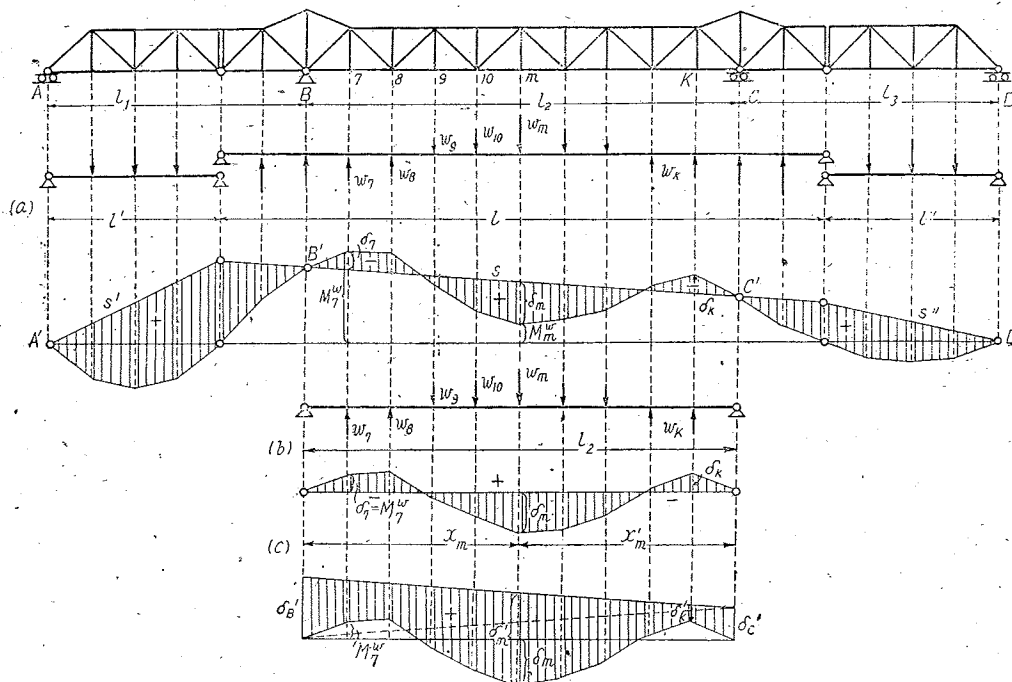
第 4-8 圖 (單位 kg/cm^2)

上記何れの公式からも弾性荷重を決定する事が出来る。角変化 $\Delta\theta_m$ は格點が剛結され

てゐるかヒンヂされてゐるかに依つて異り、剛結合の場合は第 4-2 式を、ヒンヂ結合の場合は第 4-7 式を適用すれば良い。本公式はラントの作つたものである。

圖解法に據る場合には、縮尺に就いて注意する必要がある。弾性荷重 w はディメンションの無い單なる數であつて、極距 $H=1$ は w と同じ縮尺で測れば良い。然るときは撓み Δy は構造物と同じ縮尺で作圖されるのである。第 4-8 圖に於て、構造物は長さが 1:100 の縮尺で畫かれてゐるとする。若し $H=1$ が w と同じ縮尺で畫かれてゐれば (a) の撓みは構造物と同じく 1:100 の縮尺で表はされるが、(b) のやうに H が w の $\frac{1}{100}$ の縮尺で作圖されてゐれば、撓みは $\frac{1}{100} \div \frac{1}{100} = 1$ 、即ち現寸で表はされ、(c) のやうに H が w の縮尺の $\frac{1}{100} \times \frac{1}{50}$ の縮尺で畫かれてゐれば、撓みは 50 倍で表はれて來るのである。 w の値は數が小さいから之を Ew なる弾性荷重を使用する場合には、極距を EH とすれば良く、若し計算に據る場合は弾性荷重にする曲げモーメントを E で除したものが其の點の撓みである。

鉛直撓みを求める以上の場合に於て、撓みは必ずしも下向きばかりではなく、上方に變位する負の撓みも起り、之に對する w は負値を有し、第 4-9 圖はゲルバー式構桁に於



第 4-9 圖

ける撓みの一例を示す。(c) 圖は橋脚が更に $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ 沈下した場合の全撓みである。

§ 5. ワーレン・トラスの撓みを求める爲の弾性荷重

ワーレン・トラスは腹材が斜材のみより成り鉛直材を缺く。弾性荷重 w によつて此のトラスの格點の撓みを求めるに當つて、下弦格點だけの撓みを求めるものとすれば、第 4-8 圖に示すやうに、下弦材を一つの連続部材と考へ之に第 4-10 式を適用すれば良いが、茲には全格點に w を作用せしめて全格點の撓みを求めるものとする。而して 1) は可能變形法則に因るもの、2) は連続部材解法に因るものである。

1) 可能變形法則に因る解法(ミュウラア・プレスラウの解法)

第 4-10 圖に太く畫かれた三角形 $m-1$, m , $m+1$ はワーレン構桁を組成する一つの三角形であつて、各部材の長さを o_m , d_m , d_{m+1} とし、その各格點に假想荷重 $\frac{1}{\lambda_m}$, $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ 及び $\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ が圖示のやうに作用したものと假想すれば、この假想荷重は構桁に何等の反力を生ぜしめず、従つて o_m , d_m , d_{m+1} 以外の部材の應力は零である。今、實際荷重に因る各格點の撓みを Δy_{m-1} , Δy_m , Δy_{m+1} , 假想荷重 $\frac{1}{\lambda_m}$, $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$, $\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ に因る假想應力を μ_1 , μ_2 , μ_3 とすれば、可能變形仕事の公式 $\sum \bar{P} \cdot \delta = \sum \bar{S} \cdot \Delta s$ は次のやうに書くことが出来る。

$$\left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) \cdot \Delta y_m - \frac{1}{\lambda_m} \cdot \Delta y_{m-1} - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \cdot \Delta y_{m+1} = \mu_1 \cdot \Delta o_m + \mu_2 \cdot \Delta d_m + \mu_3 \cdot \Delta d_{m+1}$$

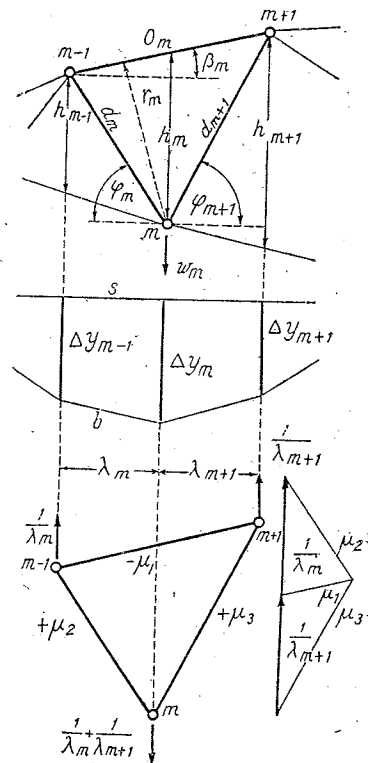
この式の左邊は第 4-8 式に示した

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = w_m$$

によつて弾性荷重に等しいことが分る。即ち、實際荷重に基く格點の撓み Δy を求める爲の下弦格點の弾性荷重は

$$w_m = \mu_1 \cdot \Delta o_m + \mu_2 \cdot \Delta d_m + \mu_3 \cdot \Delta d_{m+1} \dots \dots \dots (4-11)$$

此の中に含まれ假想荷重による應力は

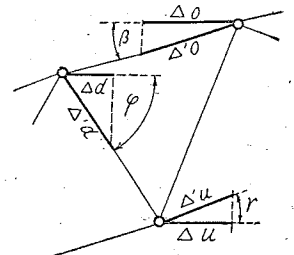


第 4-10 圖

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{M_m}{r_m} = -\frac{1}{h_m \cos \beta_m}; \mu_2 = \frac{1}{\cos \varphi_m} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right] \\ &= \frac{1}{h_m \cos \varphi_m}; \mu_3 = \frac{1}{\cos \varphi_{m+1}} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \right] = \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}} \\ w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} \right] \\ &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} \right] \dots \dots \dots (4-12) \end{aligned}$$

茲に Δ' の項は該部材の傾角の \sec が乗せられてゐる。腹材の影響が w に及ぼす割合は一般には大きくないから之を無視すれば、

$$w_m = -\frac{\Delta o_m \cdot \sec \beta_m}{h_m} = -\frac{\Delta' o_m}{h_m} \dots \dots \dots (4-13)$$



第 4-11 圖

以上の w_m は部材長の伸(縮)の函数であるが、この

實際荷重による伸(縮)を實際荷重應力或は實際荷重の載つてゐる場合のモーメントで示せば、 O_m , o_m , A_{om} をそれぞれ上弦材の應力、部材長、断面積とすると、

$$\Delta o_m = \frac{O_m \cdot o_m}{E \cdot A_{om}}; O_m = -\frac{M_m}{r_m} = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_m}$$

であるから、第 4-13 式は

$$\begin{aligned} w_m &= -\frac{O_m \cdot o_m \cdot \sec \beta}{E \cdot A_{om} \cdot h_m} = \frac{M_m \cdot o_m \cdot \sec^2 \beta_m}{E \cdot A_{om} \cdot h_m^2} \\ &= \frac{M_m \cdot o_m}{E \cdot A_{om} \cdot r_m^2} \dots \dots \dots (4-14) \end{aligned}$$

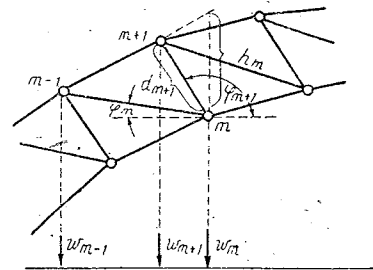
同様にして、上弦格點 $m+1$ (假りに之を k とする)の w_k は(第 4-12 圖),

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{h_k} \left[\Delta u_k \cdot \sec \gamma_k - \Delta d_k \cdot \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{h_k} \left[\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1} \right] \end{aligned}$$

腹材の影響を無視するときは、 U_k , u_k , A_{uk} を下弦材の應力、部材長、断面積とすると、

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{h_k} \left[\Delta u_k \cdot \sec \gamma_k \right] = \frac{\Delta' u_k}{h_k} \\ &= \frac{U_k \cdot u_k \cdot \sec \gamma_k}{E \cdot A_{uk} \cdot h_k} = \frac{M_k \cdot u_k \cdot \sec^2 \gamma_k}{E \cdot A_{uk} \cdot h_k^2} = \frac{M_k \cdot u_k}{E \cdot A_{uk} \cdot r_k^2} \dots \dots \dots (4-15) \end{aligned}$$

トラスで組んだアーチにあつては第4-13圖に示すやうに、斜材の傾角が鈍角を爲すことが起る。かかる場合には、 h_m は $(m-1)$, $(m+1)$ 線の延長線と m 点との間で測り、 Δd_{m+1} の (+) (-) 記號は $\sec \varphi_{m+1}$ が (-) に變すると共に之を變ぜしめる必要がある。



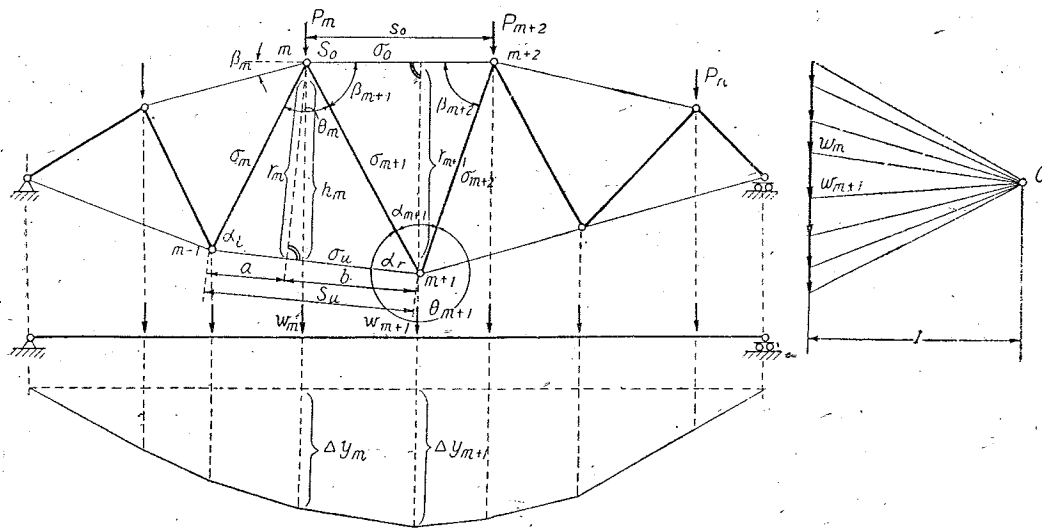
第 4-13 圖

2) 連續部材としての解法

第4-14圖に示すやうにワーレン・トラスを鋸齒狀の連續部材として考へ、之の各格點に、第4-10式の彈性荷重を與へれば全格點の撓みが一舉にして求められるのである。彈性荷重は第4-10式より

$$w_m = \Delta\theta_m - \frac{\sigma_m}{E} \tan \beta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} \tan \beta_{m+1} = \Delta\theta_m$$

右邊は腹部材の影響は比較的尠きを以て之を省略せるを示す。



第 4-14 圖

$\Delta\theta_m$ の値は、格點ヒンジなるを以て、第4-7式より

$$\Delta\theta_m = [(\sigma_u - \sigma_m) \cos \alpha_l + (\sigma_u - \sigma_{m+1}) \cot \alpha_r] \frac{1}{E}$$

同様にして、腹部材の影響を無視せば

$$\Delta\theta_m = \sigma_u (\cot \alpha_l + \cot \alpha_r) \frac{1}{E} = \frac{\Delta s_u}{s_u} (\cot \alpha_l + \cot \alpha_r)$$

第4-14圖より

$$\cot \alpha_l = \frac{a}{r_m}; \quad \cot \alpha_r = \frac{b}{r_m}; \quad \cot \alpha_l + \cot \alpha_r = \frac{a+b}{r_m} = \frac{s_u}{r_m}$$

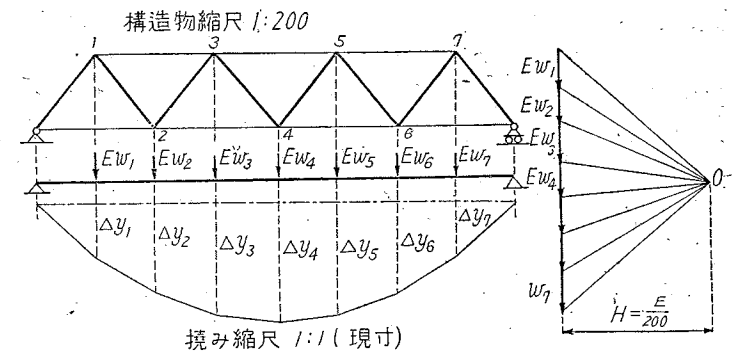
又、 $\Delta s_u = \frac{S_u \cdot s_u}{E \cdot A_{um}}$ 且つ、 $S_u = \frac{+M_m}{r_m}$ なるにより

$$w_m = \Delta\theta_m = \frac{M_m \cdot s_u}{E \cdot A_{um} \cdot r_m^2}$$

即ち、第4-15式と同結果となる。

w_{m+1} を求むるに當りては、格點 $m+1$ に對し $w_{m+1} = \Delta\theta_{m+1}$ とする。 $\theta_{m+1} + \alpha_{m+1} = 360^\circ$ 、或は之を微分して、 $\Delta\theta_{m+1} + \Delta\alpha_{m+1} = 0$ 、依て、

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{m+1} &= -\Delta\alpha_{m+1} = -[(\sigma_0 - \sigma_{m+1}) \cot \beta_{m+1} + (\sigma_0 - \sigma_{m+2}) \cot \alpha_{m+2}] \frac{1}{E} \\ &= -\frac{\sigma_0}{E} (\cot \beta_{m+1} + \cot \beta_{m+2}) \\ &= \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{s_0}{r_{m+1}} = \frac{\Delta s_0 \cdot s_0}{s_0 \cdot r_{m+1}} = \frac{\Delta s_0}{r_{m+1}} = \frac{S_0}{E A_{0(m+1)}} \cdot \frac{s_0}{r_{m+1}} \end{aligned}$$



第 4-15 圖

$$w_{m+1} = \Delta\theta_{m+1} = \frac{M_{m+1} \cdot s_0}{E A_{0(m+1)} \cdot r_{m+1}^2}$$

即ち、第4-14式と同一結果を得。之等の彈性荷重が全部作用する場合の連力圖を作れば全格點の撓みは容易に求められる。

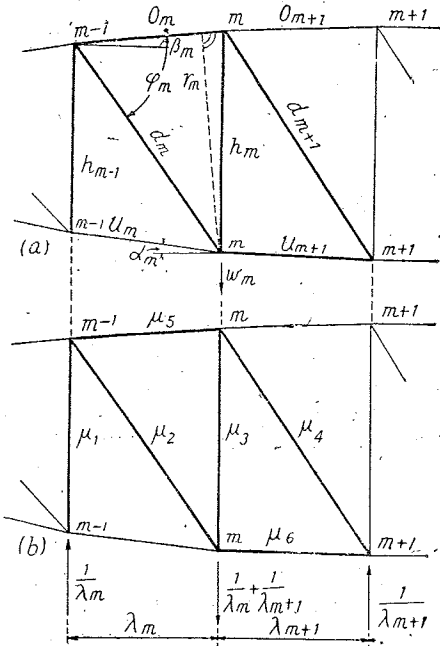
之等の彈性荷重を用ゐるに當り、圖解法を以つてする場合には、第4-8圖に示したやうな縮尺の關係に注意を必要とする(第4-15圖)。

§6. 鉛直部材あるトラスの撓みに對する弾性荷重

1) プラット・トラス下弦撓み 第4-16圖に示すプラット・トラスに於てその下弦格點の

撓みを求める爲めの弾性荷重は次の通りである。

下弦格點 m 對する弾性荷重を w_m とすれば、 w_m はワーレントラスの場合と同様にして求めることが出来る。即ち、下弦 m に同圖 (b) に示すやうに $\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ なる假想荷重を作用せしめると共に、隣接下弦格點に $\frac{1}{\lambda_m}$ 及び $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ なる假想荷重を反對方向に作用せしむる時は、太線で畫かれた部材のみに μ なる假想應力が生ずる。今、實際荷重による部材の變長を Δo , Δu , Δd , Δh の記號で示し、之に因る下弦格點の撓みを δ で示せば、可能仕事 $\Sigma \bar{P} \cdot \delta = \Sigma \bar{S} \cdot \Delta s$ は



第4-16圖

$$\left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)\delta_m - \frac{1}{\lambda_m} \cdot \delta_{m-1} - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \cdot \delta_{m+1} = \mu_5 \cdot \Delta o_m + \mu_6 \cdot \Delta u_{m+1} + \mu_1 \cdot \Delta h_{m-1} + \mu_2 \cdot \Delta d_m + \mu_3 \cdot \Delta h_m + \mu_4 \cdot \Delta d_{m+1}$$

となり、此の左邊は w_m に等しい。

$$\mu_5 = -\frac{M_m}{r_m} = -\frac{1}{h_m \cdot \cos \beta_m}; \mu_6 = \frac{1}{h_m \cdot \cos \alpha_{m+1}}; \mu_1 = -\frac{1}{\lambda_m}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\cos \varphi_m} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right] = \frac{1}{h_m \cdot \cos \varphi_m}; \mu_3 = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left[\frac{M_m}{h_m} h'_{m+1} - M_{m+1} \right]$$

$$= \frac{h'_{m+1}}{h_m \cdot \lambda_{m+1}}; \mu_4 = \frac{1}{\cos \varphi_{m+1}} \left[\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m} \right] = -\frac{1}{h_m \cdot \cos \varphi_{m+1}}$$

$$\therefore w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} - \Delta h_{m-1} \cdot \frac{h_m}{\lambda_m} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m + \Delta h_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} \right] \dots (4-16)$$

腹材の影響を無視してフックの法則を適用し、且つ荷重が鉛直に作用するものとせば ($\cos^2 \beta = \cos^2 \alpha = 1$)

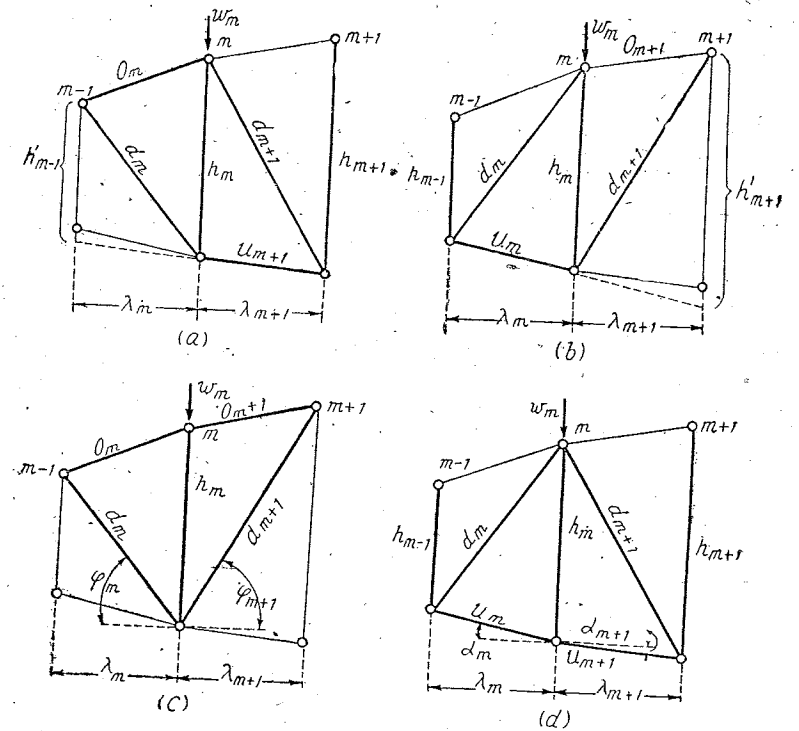
$$w_m = \frac{M_m}{E h_m^2} \left[\frac{\lambda_m}{A_m} + \frac{\lambda_{m+1}}{A_{m+1}} \right] = \frac{M_m}{E A_c \cdot h_m^2} \left[\frac{A_c}{A_m} \lambda_m + \frac{A_c}{A_{m+1}} \lambda_{m+1} \right]$$

$$\frac{E A_c}{\lambda} \cdot w_m = \frac{M_m}{h_m^2} \left[\frac{A_c}{A_m} + \frac{A_c}{A_{m+1}} \right]$$

($\lambda =$ 定値; $A_c =$ 弦材平均斷面積)

2) 弾性荷重公式 鉛直材を有するトラスにはプラット型の外に、ハウ型、補助鉛直材を有するワーレン型のものあり、プラット及びハウの型式では其の一部に補助鉛直材を有するワーレン型の構造を含んでゐる。依つて鉛直材を有する或るトラスの撓度を求める爲の弾性荷重 w_m は構造及び格點位置によつて其の公式が異り、各場合に對して之を列挙すれば凡そ次の通りである。 w_m 公式の中で \approx を附した近似公式は腹材變長の撓みに及ぼす影響を無視したものを示す。

上弦格點撓みに對する弾性荷重 (4-17圖)



第4-17圖

$$\begin{aligned}
 (a) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} + \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} \right] \quad \dots(4-17a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta u_m \cdot \sec \alpha_m - \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} + \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} - \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta u_m \cdot \sec \alpha_m \right] \quad \dots(4-17b)
 \end{aligned}$$

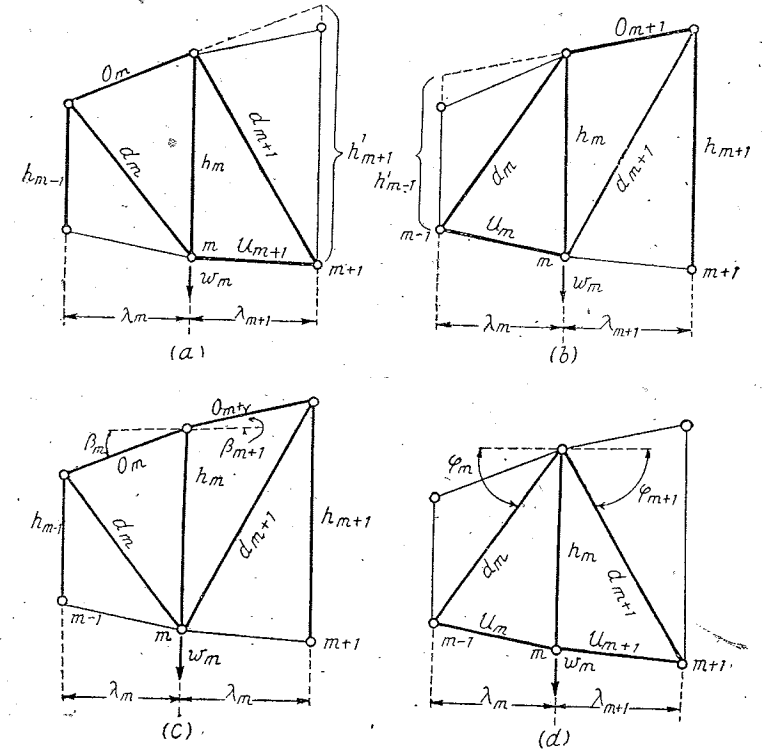
$$\begin{aligned}
 (c) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m - \Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_m (\tan \varphi_m + \tan \varphi_{m+1}) \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m - \Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} \right] \quad \dots(4-17c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[\Delta u_m \cdot \sec \alpha_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} - \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} + \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} - \Delta h_m (\tan \alpha_m - \tan \alpha_{m+1}) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[\Delta u_m \cdot \sec \alpha_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} \right] \quad \dots(4-17d)
 \end{aligned}$$

下弦格点撓みに對する彈性荷重 (第 4-18 圖)

$$\begin{aligned}
 (a) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} + \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} \right] \quad \dots(4-18a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta u_m \cdot \sec \alpha_m - \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} + \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta u_m \cdot \sec \alpha_m \right] \quad \dots(4-18b)
 \end{aligned}$$



第 4-18 圖

$$\begin{aligned}
 (c) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m - \Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} + \Delta h_m (\tan \beta_m - \tan \beta_{m+1}) \right. \\
 &\quad \left. - \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m - \Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} \right] \quad \dots(4-18c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \text{ 圖} \quad w_m &= \frac{1}{h_m} \left[\Delta u_m \cdot \sec \alpha_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} - \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m \right. \\
 &\quad \left. - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} + \Delta h_m (\tan \varphi_m + \tan \varphi_{m+1}) \right] \\
 &\equiv \frac{1}{h_m} \left[\Delta u_m \cdot \sec \alpha_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} \right] \quad \dots(4-18d)
 \end{aligned}$$

3) 構桁撓度の計算

構桁の撓度を求める方法としては、次の三つの方法が代表的である。

- (1) 可能變形仕事の法則 $\Sigma \bar{P} \cdot \delta = \Sigma \bar{S} \cdot \Delta s$ を適用するもの
- (2) カスティリアノの定理によるもの

(3) 弾性荷重 w_m を用ゐるもの

(4) 圖解法によるもの (例へばウヰリオ・モールの圖解法)

之等のうち, (1), (2) は 1 格點の撓度を求める場合に適し, (3), (4) は全格點の撓度を求めるのに適してゐるが, 茲には (1) 及び (3) の算例を掲げる。

§ 7. トラスの撓みの算例

1. ワーレン・トラスの撓み

(1) 可能仕事による解法

中央下弦格點の撓度は

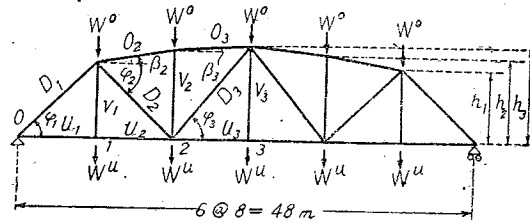
$$1. \delta_3^u = \sum S \bar{S} \frac{s}{EA}$$

但, S = 實際應力

\bar{S} = 格點 3 に $\bar{P} = 1 \text{ kg}$ が作

用せる時の部材應力 $h_1 = 8.00 \text{ m}; h_2 = 9.00 \text{ m}; h_3 = 9.30 \text{ m}$

s = 部 材 長 $W^o = 3 \text{ t}; W^u = 5 \text{ t}$



第 4-19 圖

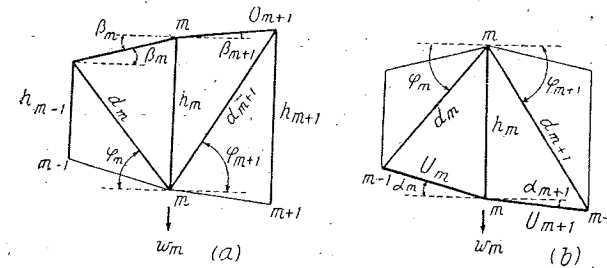
部材	s cm	A cm ²	S kg	\bar{S} kg	$\frac{s}{A}$	$S\bar{S}$	$S\bar{S} \frac{s}{A}$
O_2	806.2	55	-28,670	-0.8949	14.658	25,657	376,080
O_3	800.6	55	-28,470	-0.8896	14.556	25,327	368,660
U_1	800.0	40	20,000	0.500	20.000	10,000	200,000
U_2	800.0	40	20,000	0.500	20.000	10,000	200,000
U_3	800.0	60	30,960	1.2903	13.333	39,948	532,630
D_1	1,131.4	55	-28,280	-0.7071	20.571	19,997	411,360
D_2	1,131.4	25	11,830	0.5500	45.256	6,507	294,480
D_3	1,226.8	15	-3,450	-0.5130	81.787	1,770	144,760
V_1	800.0	10	5,000	0	80.000	0	0
V_2	900.0	10	-510	0.0772	90.000	39	3,510
							2,531,480 × 2 5,062,960
V_3	930.0	10	5,000	1.000	93.000	5,000	465,000

5,527,960 kg²/cm

$$\delta_3^u = 5,527,960 \div 2,100,000 = 2.63 \text{ cm}$$

$h_1 = 8.00 \text{ m}; h_2 = 9.00 \text{ m}; h_3 = 9.30 \text{ m}; W^o = 3 \text{ Ct}; W^u = 5 \text{ Ct}$

(2) 弾性荷重による解法 其一



第 4-20 圖

格點	$\sec \beta$	$\sec \varphi$	$\tan \beta$
1	0	1.4142	
2	1.0077	1.4142	0.1250
3	1.0008	1.5335	0.0375

$$(a) \quad w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m - \Delta o_{m+1} \cdot \sec \beta_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_{m-1} \cdot \frac{h_m}{\lambda} + \Delta h_m (\tan \beta_m - \tan \beta_{m+1}) - \Delta h_{m+1} \cdot \frac{h_m}{\lambda} \right]$$

$$(b) \quad w_m = \frac{1}{h_m} \left[\Delta u_m \cdot \sec \alpha_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} - \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} + \Delta h_m (\tan \varphi_m + \tan \varphi_{m+1}) \right]$$

i) 全變長を考慮せば

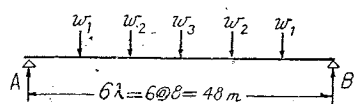
θ = 部材の水平と爲す角度

部材	應力 S t	$E \cdot A$ kg	部材長 s cm	$S \cdot s$ kg · cm	$\Delta s = \frac{S \cdot s}{EA}$ cm	$\Delta s \cdot \sec \theta$ cm	$h \div \lambda$
O_2	-28.670	$1,155 \times 10^5$	o_2 806.2	-231.14×10^5	Δo_2 -0.2001	-0.2016	
O_3	-28.470	1,155	o_3 800.6	-227.93	Δo_3 -0.1973	-0.1975	
U_1	20.000	840	u_1 800.0	160.00	Δu_1 0.1905	0.1905	
U_2	20.000	840	u_2 800.0	160.00	Δu_2 0.1905	0.1905	
U_3	30.960	1,260	u_3 800.0	247.68	Δu_3 0.1966	0.1966	
D_1	-28.280	1,155	d_1 1,131.4	-319.96	Δd_1 -0.2770	-0.3917	
D_2	11.830	525	d_2 1,131.4	133.84	Δd_2 0.2549	0.3605	
D_3	-3.450	315	d_3 1,226.8	-42.32	Δd_3 -0.1345	-0.2059	
V_1	5.000	210	h_1 800.0	40.00	Δh_1 0.1905		1.0000
V_2	-0.510	210	h_2 900.0	-4.59	Δh_2 -0.0219		1.1250
V_3	5.000	210	h_3 930.0	46.50	Δh_3 0.2214		1.1625

$$w_1 = \frac{1}{800} [0.1905 + 0.1905 + 0.3917 - 0.3605 + 0.1905 (1.000 + 1.000)] = 0.00096$$

$$w_2 = \frac{1}{900} [0.2016 + 0.1975 + 0.3605 - 0.2059 - 0.1905 \times 1.1250 - 0.0219 (0.1250 - 0.0375) - 0.2214 \times 1.1250] = 0.00010$$

$$w_3 = \frac{1}{930} [0.1966 + 0.1966 + 0.2061 + 0.2061 + 0.2214 (1.125 + 1.125)] = 0.00140$$



第 4-21 圖

$$A = w_1 + w_2 + \frac{1}{2} w_3$$

$$Q_m = Q_{m-1} - w_m$$

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \cdot \lambda$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} w_3 = 0.00070 \quad M_1/\lambda = 0.00179 \quad M_1 = 1.432 \text{ cm} = \delta_1$$

$$Q_2 = \frac{0.00010}{0.00080} \quad \frac{0.00080}{0.00080} \quad M_2/\lambda = 0.00259 \quad M_2 = 2.072 \text{ cm} = \delta_2$$

$$Q_1 = \frac{0.00099}{0.00179} \quad \frac{0.00070}{0.00179} \quad M_3/\lambda = 0.00329 \quad M_3 = 2.632 \text{ cm} = \delta_3$$

ii) 腹材變長を無視せば

$$w_1 = \frac{1}{800} [0.1905 + 0.1905 + 0.3917] = 0.000966$$

$$w_2 = \frac{1}{900} [0.2016 + 0.1975] = 0.000443$$

$$w_3 = \frac{1}{930} [0.1966 + 0.1966] = 0.000423$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} w_3 = 0.00021 \quad M_1/\lambda = 0.00162 \quad M_1 = 1.296 \text{ cm} = \delta_1$$

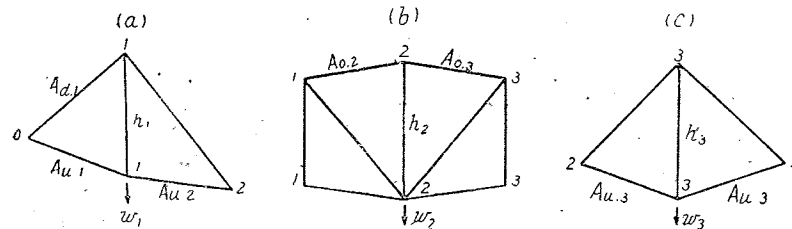
$$Q_2 = \frac{0.00044}{0.00065} \quad \frac{0.00065}{0.00065} \quad M_2/\lambda = 0.00227 \quad M_2 = 1.816 \text{ cm} = \delta_2$$

$$Q_1 = \frac{0.00097}{0.00162} \quad \frac{0.00021}{0.00162} \quad M_3/\lambda = 0.00248 \quad M_3 = 1.984 \text{ cm} = \delta_3$$

注意 $M_3 = \delta_3$ の値に可なり差を生ぜしめたるは、格點 3 に於て腹材變長の影響が尠少なからざるに因る。

(3) 弾性荷重による解法 其二

i) 腹材の影響を無視し、且つ弾性荷重をモーメントの項にて表せば次の如し。



第 4-22 圖

$$w_1 = \frac{\lambda}{E \cdot h_1^2} \left(\frac{M_1^u}{A_{a1}} \sec^3 \varphi_1 + \frac{M_1^0}{A_{u1}} \sec^3 \alpha_1 + \frac{M_1^0}{A_{u2}} \sec^3 \alpha_2 \right) = \frac{\lambda \cdot M_1}{E \cdot h_1^2} \left(\frac{\sec^3 \varphi_1}{A_{a1}} + \frac{\sec^3 \alpha_1}{A_{u1}} + \frac{\sec^3 \alpha_2}{A_{u2}} \right)$$

$$w_2 = \frac{\lambda}{E \cdot h_2^2} \left(\frac{M_2^u}{A_{o2}} \cdot \sec^3 \beta_2 + \frac{M_2^u}{A_{o3}} \cdot \sec^3 \beta_3 \right) = \frac{\lambda \cdot M_2}{E \cdot h_2^2} \left(\frac{\sec^3 \beta_2}{A_{o2}} + \frac{\sec^3 \beta_3}{A_{o3}} \right)$$

$$w_3 = \frac{2 \cdot \lambda \cdot M_3}{E \cdot h_3^2} \cdot \frac{\sec^3 \alpha_3}{A_{u3}}$$

ii) $\sec^3 \beta = 1$; $\sec^3 \alpha = 1$; $\sec^3 \varphi = 0$; $A = \text{定値} = A_c$ とせば

$$w_1 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{3M_1}{h_1^2}; \quad w_2 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{2M_2}{h_2^2}; \quad w_3 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{2M_3}{h_3^2}$$

$$M_1 = R_A \cdot \lambda = 16,000,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$M_2 = R_A \cdot 2\lambda - W \cdot \lambda = 25,600,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$M_3 = R_A \cdot 3\lambda - W \cdot \lambda(2+1) = 28,800,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

m	sec β	sec ³ β	sec α
1	1.4142	2.8284	1
2	1.00775	1.0234	1
3	1.0008	1.0024	1

$\sec \varphi_1 = \sec \beta_1$

i) の場合

$$w_1 = \frac{800 \times 16,000,000}{2,100,000 \times 800^2} \left(\frac{2.8284}{55} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} \right) = 0.000966$$

$$w_2 = \frac{800 \times 25,600,000}{2,100,000 \times 900^2} \left(\frac{1.0234}{55} + \frac{1.0024}{55} \right) = 0.000443$$

$$w_3 = \frac{2 \times 800 \times 28,800,000}{2,100,000 \times 930^2} \times \frac{1}{60} = 0.000423$$

之等に依る撓みは前掲 (2), ii) に同じ。

ii) の場合 ($A_c = 50 \text{ cm}^2$)

$$w_1 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{3M_1}{h_1^2} = \frac{800 \times 3 \times 16,000,000}{2,100,000 \times 50 \times 800 \times 800} = 0.000571$$

$$w_2 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{2M_2}{h_2^2} = \frac{800 \times 2 \times 25,600,000}{2,100,000 \times 50 \times 900 \times 900} = 0.000482$$

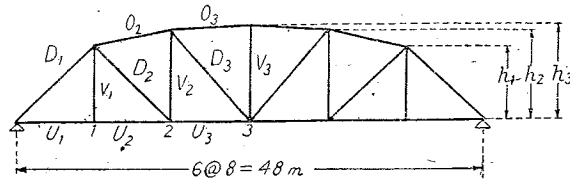
$$w_3 = \frac{\lambda}{EA_c} \cdot \frac{2M_3}{h_3^2} = \frac{800 \times 2 \times 28,800,000}{2,100,000 \times 50 \times 930 \times 930} = 0.000507$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}w_3 = 0.00025 \quad M_1/\lambda = 0.00130 \quad M_1 = 1.05 \text{ cm} = \delta_1$$

$$Q_2 = \frac{0.00048}{2} = 0.00024 \quad M_2/\lambda = 0.00203 \quad M_2 = 1.63 \text{ cm} = \delta_2$$

$$Q_1 = \frac{0.00057}{2} = 0.000285 \quad M_3/\lambda = 0.00228 \quad M_3 = 1.84 \text{ cm} = \delta_3$$

2. プラット・トラスの撓み



第 4-23 圖 (1)

(1) 可能仕事による解法

寸法及び荷重は前項と同じ(第 4-23 圖)

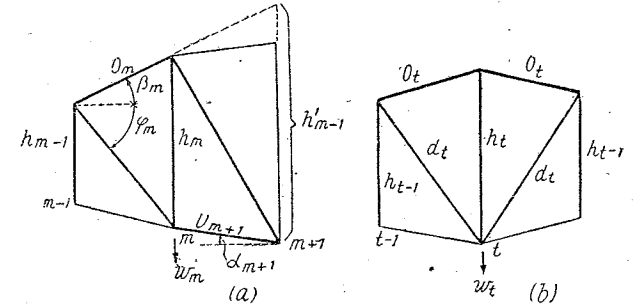
部材	s cm	A cm ²	S t.	S̄ kg	$\frac{s}{A}$	S·S̄	$S \cdot \bar{S} \cdot \frac{s}{A}$
O ₂	806.2	55	-28.670	-0.8949	14.658	25,657	376,080
O ₃	800.6	55	-30.991	-1.2913	14.556	40,019	582,517
U ₁	800.0	40	20.000	0.5000	20.000	10,000	200,000
U ₂	800.0	40	20.000	0.5000	20.000	10,000	200,000
U ₃	800.0	60	23.444	0.8889	13.333	25,284	337,112
D ₁	1,131.4	55	-28.280	-0.7071	20.571	19,997	411,360
D ₂	1,131.4	25	11.830	0.5500	45.256	6,507	294,481
D ₃	1,204.3	15	3.797	0.6043	80.287	2,295	184,259
V ₁	800.0	10	5.000	0	80.000	0	0
V ₂	900.0	10	-3.365	-0.3889	90.000	1,309	117,810
							2,703,619
							5,407,238
V ₃	930.0	10	-675	+0.0968	93.000	-65	-6,045
							5,401,193

$$\delta_3^u = 5,401,193 \div 2,100,000 = 2.57 \text{ cm}$$

中央下弦格点の撓みは $1. \delta_3^u = \sum S \bar{S} \frac{s}{EA}$

之が計算の結果は前頁の通りである。

(2) 弾性荷重による解法 其一



第 4-23 圖 (2)

格点	sec β	sec φ	tan β	tan φ
1		1.4142		1.000
2	1.0077	1.4142	0.1250	1.000
3	1.0008	1.5053	0.0375	1.1250

格点 1 に対してはワーレンの場合をとる。

$$(a) \quad w_m = \frac{1}{h_m} \left[-\Delta o_m \cdot \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \cdot \sec \alpha_{m+1} + \Delta d_m \cdot \sec \varphi_m - \Delta d_{m+1} \cdot \sec \varphi_{m+1} - \Delta h_{m-1} \cdot \frac{h_m}{\lambda} + \Delta h_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda} \right]$$

$$(b) \quad w_t = \frac{1}{h_t} \left[-2\Delta o_t \cdot \sec \beta_t + 2\Delta d_t \cdot \sec \varphi_t - 2\Delta h_{t-1} \cdot \frac{h_t}{\lambda} + 2\Delta h_t \tan \beta_t \right]$$

$$(c) \quad w_1 = \frac{1}{h_1} \left[-\Delta d_1 \cdot \sec \varphi_1 + \Delta u_1 \cdot \sec \alpha_1 + \Delta u_2 \cdot \sec \alpha_2 + \Delta h_1 (\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2) - \Delta d_2 \cdot \sec \varphi_2 \right]$$

i) 全變長を考慮すれば

$$w_1 = \frac{1}{800} [0.3917 + 0.1905 + 0.1905 + 0.1905(1+1) - 0.3605] = 0.00099$$

$$w_2 = \frac{1}{900} [0.2016 + 0.1806 + 0.3605 - 0.1905 \times 1.125 - 0.1442 \times 1.125] = 0.00015$$

$$w_3 = \frac{1}{930} [0.2150 \times 2 + 2 \times 0.2186 + 2 \times 0.1442 \times 1.1625 - 2 \times 0.0299 \times 0.0375] = 0.00128$$

ii) 腹材の變長を無視すれば

$$w_1 = \frac{1}{800} [0.3917 + 0.1905 + 0.1905] = 0.00097$$

部材	應力 S kg	E · A	部材長 s cm	S · s	$\Delta s = \frac{S \cdot s}{EA}$ cm	$\Delta s \cdot \sec \theta$ cm	h ÷ λ
O ₂	-28,670	1,155	o ₂ 806.2	-231.138	Δo ₂ -0.0001	-0.2016	
O ₃	-30,991	1,155	o ₃ 800.6	-248.114	Δo ₃ -0.2148	-0.2150	
U ₁	20,000	840	u ₁ 800.0	160.000	Δu ₁ 0.1905	0.1905	
U ₂	20,000	840	u ₂ 800.0	160.000	Δu ₂ 0.1905	0.1905	
U ₃	29,444	1,260	u ₃ 800.0	227.552	Δu ₃ 0.1806	0.1806	
D ₁	1,155	1,155	d ₁ 1,131.4	-319.960	Δd ₁ -0.2770	-0.3917	
D ₂	11,830	525	d ₂ 1,131.4	133.845	Δd ₂ 0.2549	0.3605	
D ₃	3,797	315	d ₃ 1,204.3	45.727	Δd ₃ 0.1452	0.2186	
V ₁	5,000	210	h ₁ 800.0	40.000	Δh ₁ 0.1905		1.0000
V ₂	-3,365	210	h ₂ 900.0	-30.285	Δh ₂ -0.1432		1.1250
V ₃	-675	210	h ₃ 930.0	-6.293	Δh ₃ -0.0299		1.1625

$$w_2 = \frac{1}{900} [0.2016 + 0.1806] = 0.00043$$

$$w_3 = \frac{1}{930} [0.4300] = 0.00046$$

i) の場合の撓み

$$Q_3 = \frac{1}{2} w_3 = 0.00064 \quad M_1/\lambda = 0.00178 \quad M_1 = 1.424 \text{ cm} = \delta_1$$

$$\frac{0.00015}{0.00079} \quad \frac{0.00079}{0.00099}$$

$$Q_2 = 0.00079 \quad M_2/\lambda = 0.00257 \quad M_2 = 2.056 \text{ cm} = \delta_2$$

$$\frac{0.00099}{0.00178} \quad \frac{0.00064}{0.00321}$$

$$Q_1 = 0.00178 \quad M_3/\lambda = 0.00321 \quad M_3 = 2.568 \text{ cm} = \delta_3$$

ii) の場合の撓み

$$Q_3 = \frac{1}{2} w_3 = 0.00023 \quad M_1/\lambda = 0.00162 \quad M_1 = 1.29 \text{ cm} = \delta_1$$

$$\frac{0.00042}{0.00065} \quad \frac{0.00065}{0.00097}$$

$$Q_2 = 0.00065 \quad M_2/\lambda = 0.00227 \quad M_2 = 1.82 \text{ cm} = \delta_2$$

$$\frac{0.00097}{0.00162} \quad \frac{0.00023}{0.00250}$$

$$Q_1 = 0.00162 \quad M_3/\lambda = 0.00250 \quad M_3 = 2.01 \text{ cm} = \delta_3$$

(3) 弾性荷重による解法 其二

弾性荷重を曲げモーメントの項にて作る場合；腹材の影響を無視す。茲に使用せられる。

弾性荷重は本質に於て前項 (2) の腹材の影響を無視したるものと同じ。

$$i) \quad w_1 = \frac{\lambda}{Eh_1^2} \left(\frac{M_1^u}{A_{u1}} \cdot \sec^3 \beta_1 + \frac{M_1^o}{A_{u1}} \sec^3 \alpha_1 + \frac{M_1^o}{A_{u2}} \sec^3 \alpha_2 \right)$$

$$= \frac{\lambda \cdot M_1}{Eh_1^2} \left(\frac{\sec^3 \beta_1}{A_{u1}} + \frac{\sec^3 \alpha_1}{A_{u1}} + \frac{\sec^3 \alpha_2}{A_{u2}} \right)$$

$$w_2 = \frac{\lambda}{Eh_2^2} \left(\frac{M_2^u}{A_{u2}} \cdot \sec^3 \beta_2 + \frac{M_2^o}{A_{u3}} \cdot \sec^3 \alpha_3 \right) = \frac{\lambda \cdot M_2}{Eh_2^2} \left(\frac{\sec^3 \beta_2}{A_{u2}} + \frac{\sec^3 \alpha_3}{A_{u3}} \right)$$

$$w_3 = \frac{2\lambda}{Eh_3^2} \cdot \frac{M_3^u}{A_{u3}} \cdot \sec^3 \beta_3$$

ii) 若し, $\sec^3 \beta = 1$; $\sec^3 \alpha = 1$ と看做し, 弦材断面積は均一にして A_c とせば, ($M^o = M^u$),

$$\frac{E \cdot A_c}{\lambda} \cdot w_1 = \frac{3M_1}{h_1^2} \quad ; \quad \frac{E \cdot A_c}{\lambda} \cdot w_2 = \frac{2M_2}{h_2^2}$$

$$\frac{E \cdot A_c}{\lambda} \cdot w_3 = \frac{2M_3}{h_3^2}$$

$M_1 = R_A \cdot \lambda = 20 \times 8$	$= 16,000,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$
$M_2 = R_A \cdot 2\lambda - W \cdot \lambda$	$= 25,600,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$
$M_3 = R_A \cdot 3\lambda - W \cdot \lambda (2+1)$	$= 28,800,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$

m	sec β	sec ³ β	sec α
1	1.4142	2.8284	1
2	1.00775	1.0234	1
3	1.0008	1.0024	1

弾性荷重の値は

$$i) \quad w_1 = \frac{800 \times 16,000,000}{2,100,000 \times 800^2} \left(\frac{2.8284}{55} + \frac{1.0234}{40} + \frac{1.0024}{40} \right) = 0.00097$$

$$w_2 = \frac{800 \times 25,600,000}{2,100,000 \times 900^2} \left(\frac{1.0234}{55} + \frac{1}{60} \right) = 0.00043$$

$$w_3 = \frac{2 \times 800 \times 28,800,000}{2,100,000 \times 930^2} \times \frac{1.0024}{55} = 0.00046$$

$$ii) \quad A_c = 50 \text{ cm}^2 \quad ; \quad \frac{E \cdot A_c}{\lambda} = \frac{1}{800} \cdot 2,100,000 \times 50 = 131,250 \text{ kg/cm}$$

$$w_1 = \frac{3 \times 16,000,000}{131,250 \times 800^2} = 0.00057 \quad ; \quad w_2 = \frac{2 \times 25,600,000}{131,250 \times 900^2} = 0.00048$$

$$w_3 = \frac{2 \times 28,800,000}{131,250 \times 930^2} = 0.00051$$

i) の場合の撓み

(2) ii) の場合と同じ。

ii) の場合の撓み

$$Q_3 = \frac{1}{2} w_3 = 0.00026 \quad M_1/\lambda = 0.00131 \quad M_1 = 1.048 \text{ cm} = \delta_1$$

$$\frac{0.00048}{0.00074} \quad \frac{0.00074}{0.00057}$$

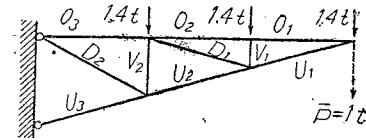
$$Q_2 = 0.00074 \quad M_2/\lambda = 0.00205 \quad M_2 = 1.640 \text{ cm} = \delta_2$$

$$\frac{0.00057}{0.00131} \quad \frac{0.00026}{0.00231}$$

$$Q_1 = 0.00131 \quad M_3/\lambda = 0.00231 \quad M_3 = 1.847 \text{ cm} = \delta_3$$

3. 片持トラスの撓み

先端の撓みを δ_1 とする。



第 4-24 圖

部 材	s cm	A cm ²	$s \div A$	S t	\bar{S} t	$\overline{SS} \cdot \frac{s}{A}$
O_1	240	5	48.0	4.8	3.43	790
O_2	240	5	48.0	4.8	3.43	790
O_3	240	10	24.0	7.2	3.43	593
U_1	250	6	41.7	-5.0	-3.57	745
U_2	250	12	20.8	-7.5	-3.57	557
U_3	250	12	20.8	-10.0	-3.57	742
Y_1	70	5	14.0	-1.4	0	0
Y_2	140	5	28.0	-2.8	0	0
D_1	250	5	50.0	2.5	0	0
D_2	278	5	55.6	3.71	0	0

$$\delta_1 = \frac{4,217}{2,100} = 2.01 \text{ cm}$$

$$\Sigma = 4,217$$

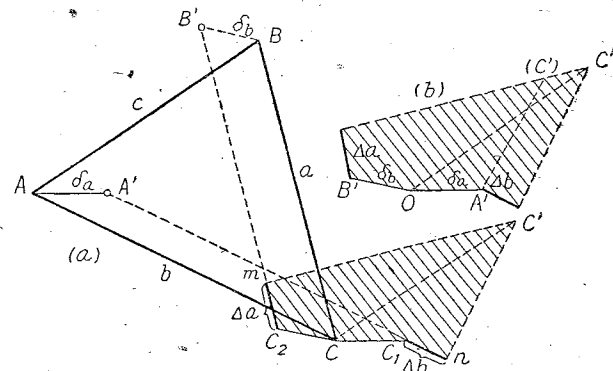
§8. ウェリオ・モールの撓みの圖解法

平面トラスの格點の撓みを求める圖解法は古くウェリオによつて創案せられ、後年モールは之を改良して實用化した。*

第 4-25 圖 (a) の $\triangle ABC$ は平面トラスの一つの三角形であつて、各部材應力は與へられて居り、且つ二つの格點 A 及び B の變位 δ_a 及び δ_b も亦既知なりとする

とき、格點 C の撓みを圖解的に求める事が先決すべき問題である。

部材應力が與へられてゐれば部材の伸びは既知量である。今、部材 BC の長さ



第 4-25 圖

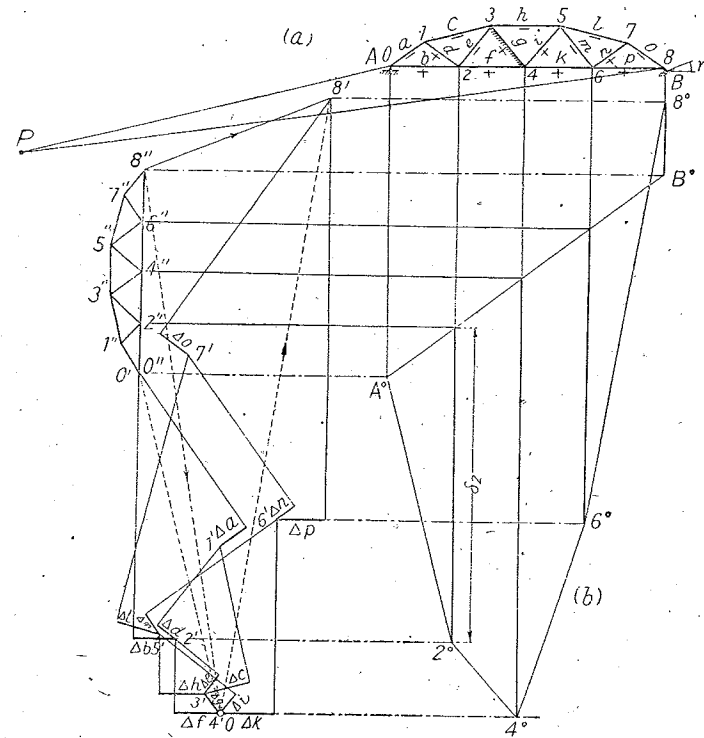
* Williot, "Notation pratiques sur la statique graphique", 1877.

を a 、その伸びを Δa 、部材 AC の長さを b 、その伸びを Δb 、部材 AB の長さを c 、その伸びを Δc とする。最初に $B'C_2 \parallel BC$ 、 $A'C_1 \parallel AC$ 、 $CC_2 \parallel BB'$ 、 $CC_1 \parallel AA'$ とし、 C_2 及び C_1 の 2 點を定める。茲に $B'C_2$ は部材 BC の原長 a を示すのであるが之の伸びが $-\Delta a$ であるとすれば之だけ縮むのであり、 $A'C_1$ は部材 AC の原長 b を示すのであるが之の伸びが $+\Delta b$ であるとすれば之だけ伸びるのである。格點 C の變位點を求める爲には、 B' を中心にして半径 $B'm = (a - \Delta a)$ の圓を畫き、 A' を中心として半径 $A'n = (b + \Delta b)$ の圓を畫き、而して兩圓の交點 C' を求めればよいのである。この交點こそ格點 C が變位した點であるが、 a 及び b に對して Δa 及び Δb は夫れ夫れ甚だ小であるから、實用上は上述の圓を畫かなくても m 點及び n 點に垂直線 mC' 及び nC' を引けば之の交點 C' を以て前記の C' 點と見做すことが出来るのである。

以上の事項は次のやうにして實際化する。但し、部材長に比して之の伸びは甚だ微少であるから、縮尺は全然別個にする必要がある。第 4-25 圖 (b) に於て O を極となし、之に相當の縮尺を以つて δ_a 、 Δb 、 δ_b 、 Δa をトラスの骨組線及び既知變位方向線に平行して作圖し、次に Δa 、 Δb の終點に垂直線を畫き其の交點 C' を求める。直線 OC' は格點 C の撓み Δc 及び其の方向を示してゐるのである。若し部材 AC に應力が無く $\Delta b = 0$ であるとすれば、 (C') が此の場合の C の變位した點である。此の變位圖解法を第 4-26 圖のワーレン・トラスに就いて説明する。

(1). 與へられたワーレン・トラスは左端ヒンゲ支承、右端可動支承 (水平に對して γ の傾角で移動) とし、應力は既知、従つて部材の伸びは既知なりとする ($\Delta s = \frac{S \cdot s}{EA} + \varepsilon \cdot t \cdot s$)。

最初に何れかの部材、例へば部材 (3-4) を抑へ、この部材の方向並に格點 4 は不動であり、他の部材及び格點は之に對して相對的に移動するものとする。先づ圖上に O 點を選び O より (3-4) に平行線を引き、且つ (3-4) の伸び Δg を其の上にとつて (4'-3') の線を定める。然るときは格點 4 對する格點 3 の變位が明に畫かれるのである。次に三角形 345 を採り、之を第 4-25 圖で取扱つた三角形と同じ方法で扱ふのである。(格點 3 及び 4 が既に定められ、(3-5) 及び (4-5) の伸びは與へられてゐる)。従つて格點 5 の移動する位置を求める爲には、(b) の變位圖に於て 4' 點より $d_1 \parallel (4-5)$ 、3' 點より $-d_2 \parallel (3-5)$ の二線を引き、その終點に垂線を立て、之の交點を 5' とすれば、5' は格點 5 の變位した位置を示すことになる。而して此の方法を續けて繰り返して行けば 6', 7', 8' 及び左側

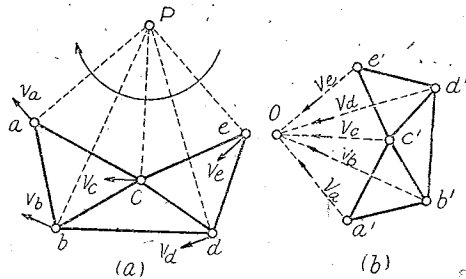


第 4-26 圖

の $2'$, $1'$, $0'$ が求められる。

(2). 以上に於て、部材 (3-4) は長さ に於て 變化があるが其の方向及び格點 4 は不變であると假定し、之に基いて他の格點の相對的變位を求めたのである。實際に不動であるのは左支點 A であつて、他の格點は之れに相對的に移動するのであり、部材 (3-4) は從つて元位置には留つてはゐないのである。モールは之れに對して、トラス全體を或る極 P に對して廻轉せしめる作圖法 (Mohr's rotation diagram) を提案した。その原理は、

剛體の運動は或る瞬間に在つては或る點を中心とした廻轉運動と看做し得べく、剛體任意點の運動方向は其の瞬間に於ては其の點と廻轉中心點とを結んだ線に對して直角である”に出發し、今第 4-27 圖 (a) に於て、トラス $abcde$ が或る瞬間に P 點を中心として廻轉してゐ



第 4-27 圖

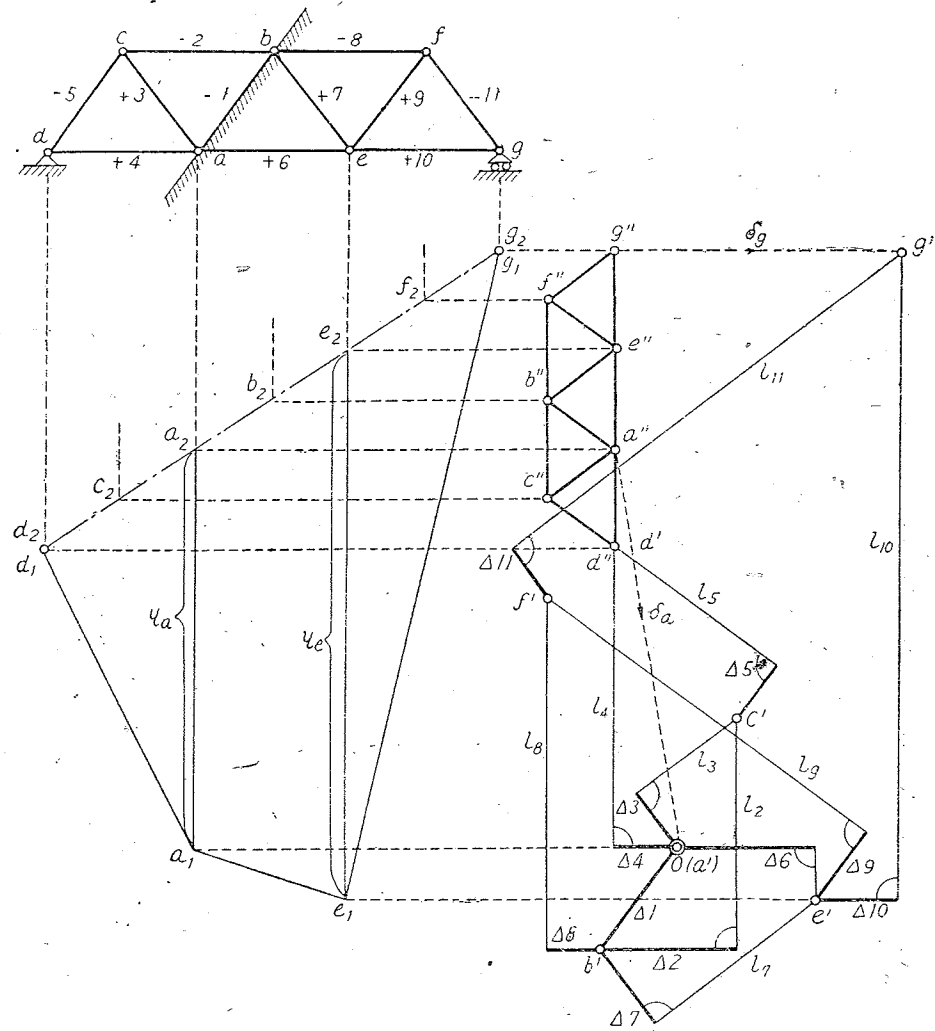
るものとすれば極射線に垂直なる矢印線 V_a, V_b, V_c, \dots はそれぞれの格點の運動 (移動) 方向を示すと共に其の移動量を示し、大きさは廻轉半徑に比例するのである。(b) 圖に於て任意の極 O を選び此の點から (a) 圖の矢印線に平行なる放射線を畫き、 Oa', Ob', Oc' を格點 a, b, c, \dots の移動量 V, V_b, V_c, \dots と同じ長さにとれば、この射線の端部を結んだ圖形は與へられた (a) 圖のトラスと幾何學的に相似になり、之に 90° (直角) だけ廻轉した位置にある。

第 4-26 圖に戻つて (b) 圖に就いて言へば、支點 A (即ち格點 0) は不動であり格點 4 は格點 0 に對して廻轉するのであるから、變位圖中の $0'$ 點を固定點と考へ之に對する格點の移動位置を求めることが必要である。之が爲には本圖の極 P 及び O は第 4-27 圖の極 P 及び O と同意義のものとなし、 $0'$ 點を $0''$ とすれば、前説明により、

$(P-0) : (P-8) = (O''-0) : (8''-0)$; $(P-0) \perp (O''-0)$; $(P-8) \perp (8''-0)$ 而して $\triangle OPS$ と $\triangle O''OS''$ とは相似である。 $0''$ から AB (即ち $0-8$) に對して垂直なる線を引き、 $8'$ の點から (a) 圖 B 點の滑動方向に平行なる線を引き、之等 2 直線の交點を求めれば、此の交點の $8''$ がモール廻轉圖に於ける相似トラスの右支點 B の位置であるから、(a) 圖のトラス下弦材 08 から垂線を下し且つ (b) 圖の $0''$ 及び $8''$ から $0''8''$ 線に垂線を引くことによつて A^0B^0 線が定められ、斯くして (b) 圖の相似トラス骨組線が作圖せられる。既に之だけの作圖が出来上つてゐれば與へられたトラスの各格點の撓みを求める事は容易であつて、例へば下弦格點 $0, 2, 4, 6, 8$ の鉛直撓みを求めやうとするには、之等の格點及び (b) 圖の $0', 2', 4', 6', 8'$ の兩者より圖示の $A^0, 2^0, 4^0, 6^0, 8^0, B^0$ の多角形を畫けば、その縦距はそれぞれの格點の鉛直撓みを示すのである。

支點 B が水平方向に移動する ($y=0$) 場合には、 $8'8''$ 線は $8''B^0$ に一致する。又、トラスの形狀及び應力が左右對稱であるときは、その中心に在る部材を固定なりと假定して作圖すれば、モールの廻轉圖は不必要となる。固定と假定する部材は中央部材を選ぶ方が操作が簡單である。

ウァリオ・モール變位圖の作圖一例を第 4-28 圖に示せば、與へられたワーレン・トラスに於て、假に部材 ab の方向及び格點 a 點を不變として作圖を進めるものとし變位圖に於て極 O (即ち a' 點) を定め、ウァリオの方法によつて變位圖 $a'b'c'd'e'f'g'$ を作り上げる。 b' 點は O から ba の方向に $\delta_1 = \delta_b$ だけ移動し、同様に、 $\delta_c' = Oc'$, $\delta_d' = Od'$, $\delta_e' = Oe'$, $\dots, \delta_g' = Og'$; 實際には支點 d が固定し、支點 g が水平に移動し得るのであるか



第 4-28 圖

らモールの廻轉圖を次に畫く。即ち、 d' 點を d'' 點とし、 g' を通る水平線を引いて g'' を定め、之によつてトラスの相似形を畫く。 a 點については、是の變位は $a''a' = \delta_a$ であるが、その鉛直變位は $a_2a_1 = \eta_a$ であり、支點 g は $g'g'' = \delta_g$ だけ水平に變位する事が分る。

§ 9. 曲線梁の弾性荷重による撓み解法

曲線梁は微小長さ ds を有してゐる部材が順次に剛結されてゐるものと考へることが出来る (第 4-29 圖)。この各格點に弾性荷重が作用するものとすれば、この曲線梁の撓みは

容易に求められるのであつて、推力による影響を無視するときは、弾性荷重は第 4-10 式から、

$$w = \Delta\theta$$

$$dw = \Delta d\theta$$

第 4-10 式により

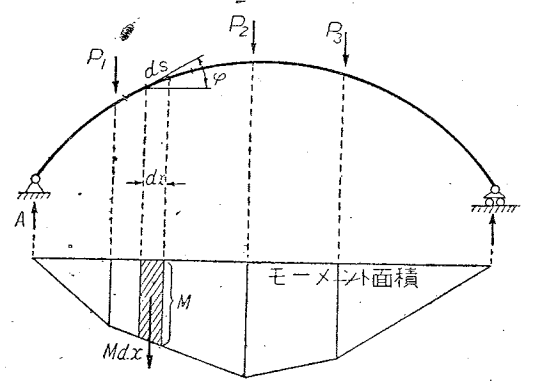
$$dw = \Delta d\theta = \frac{Mds}{EI} = \frac{Mdx}{EI \cos\varphi} \dots (4-19)$$

$$EI \cos\varphi \cdot dw = Mdx$$

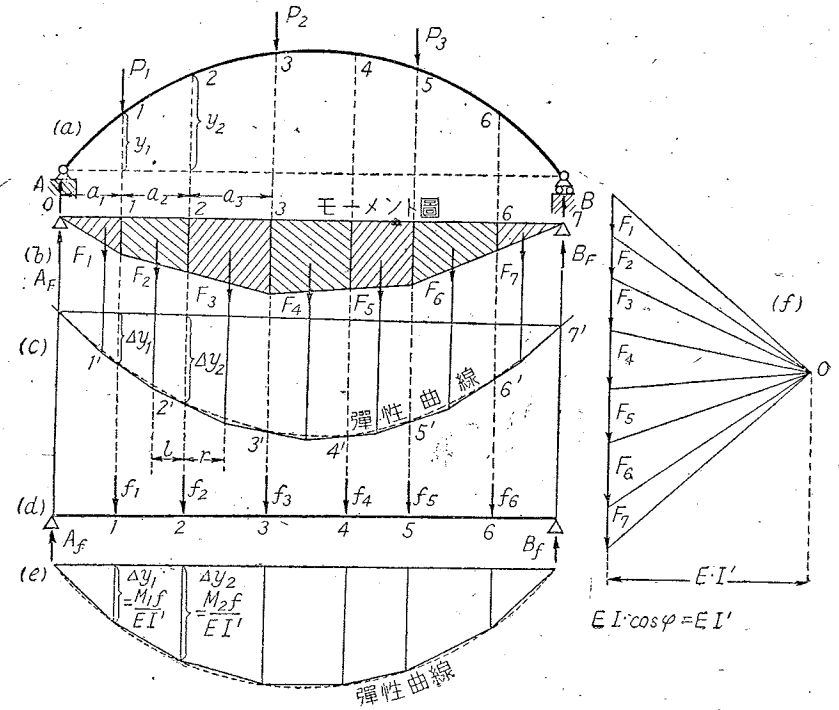
茲に、 Mdx は此の梁の曲げモーメン

ト圖を畫いたときの dx 部分のモーメント面積である。よつて曲げモーメントによる撓みを求める爲には、

- (1) 與へられた曲線梁の曲げモーメント圖を畫き、之を無数の微小面積 Mdx に分割し、
- (2) 各 Mdx を弾性荷重とし、



第 4-29 圖



第 4-30 圖

(3) 極距 $H=1 EI \cos \varphi$ なる力多角形を以て連力圖を作圖する。

この連力圖は撓みを示す多角形即ち彈性曲線である。換言すれば、**彈性曲線はモーメント面積を荷重とし、極距を $EI \cos \varphi$ として作圖した連力圖である。**

之を計算で行ふ場合には、曲げモーメント面積を荷重として其の梁の曲げモーメント M' を求めれば、 $M'/EI \cos \varphi$ が其の點の撓みである。之が圖解法の一例は第 4-30 圖の通りである。 dx の代りに或る長さ a_1, a_2, \dots と取る。因みに、(d), (e) は計算の場合を示し、モーメント面積を荷重としてとつた値 $f_1, f_2, f_3 \dots$ は、例へば f_2 に就いて言へば

$$f_2 = \frac{F_2 \cdot (a_2 - l)}{a_2} + \frac{F_3 \cdot (a_3 - r)}{a_3}$$

であり、 l' は $I \cos \varphi$ の略字である。

圖解法に於ける縮尺は既に述べた通りであるが、彈性荷重はモーメント面積であるから此の場合は $t \cdot m \cdot m = t \cdot m^2$ の如き單位で示され、極距は $EI \cos \varphi = \frac{t}{m^2} \cdot m^4 = t \cdot m^2$ で示される。之等を同一縮尺で作圖すれば、 Δy は構造物圖形の縮尺と同一の縮尺となる。従つて極距を $EI \cos \varphi/n$ の縮尺で畫けば、 Δy は構造物縮尺の n 倍で示されることになる。

以上に於ては、 $I \cos \varphi = \text{定値}$ としたのであるが、之が定値で無い場合には、次の直線梁に於て述べる修正法を施す必要がある。

§ 10. 直線梁の彈性荷重による撓み及び撓角解法

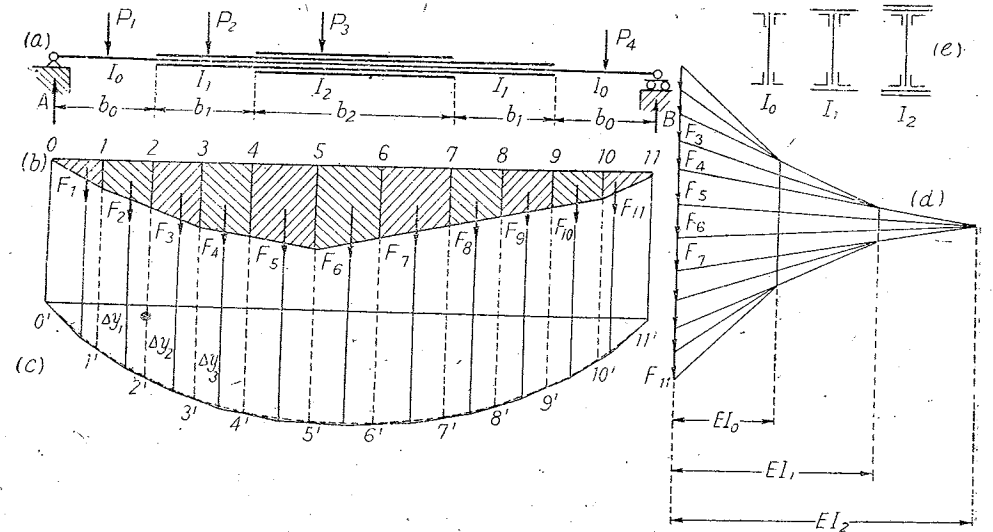
直線梁では、 $\cos \varphi = 1$ であるから

$$dw = \frac{M dx}{E \cdot I} \dots \dots \dots (4-20)$$

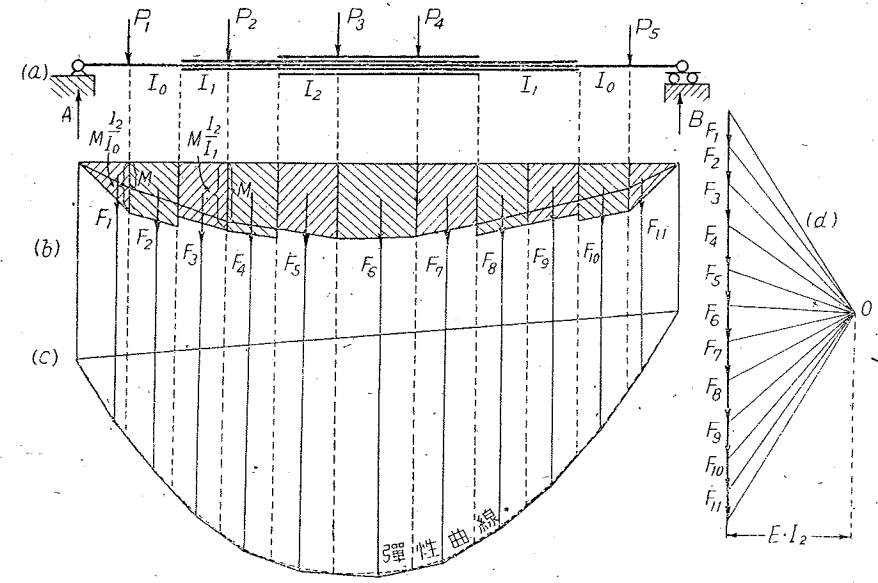
即ち、直線梁の彈性曲線は**モーメント面積を荷重とし、極距 EI を以て作圖した連力圖によつて示される。**之は有名なモールの梁の撓みに關する劃期的な定理であつて、次に記する撓角に關する定理と共に構造力學に於ける最も重要なものゝ一つである。計算による場合は、曲げモーメント面積を荷重として其の梁の曲げモーメント M' を求めれば、 M'/EI が其の點の撓みである。或は $\frac{1}{EI}$ を乘じた曲げモーメント面積を荷重として其の梁の曲げモーメント M' を求めれば此の M' が其の點の撓みである。

慣性モーメント I が一定ならざる梁に於ては、之による影響に對しての修正が必要であ

* Mohr Otto, "Beitrage zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen". 1868.



第 4-31 圖



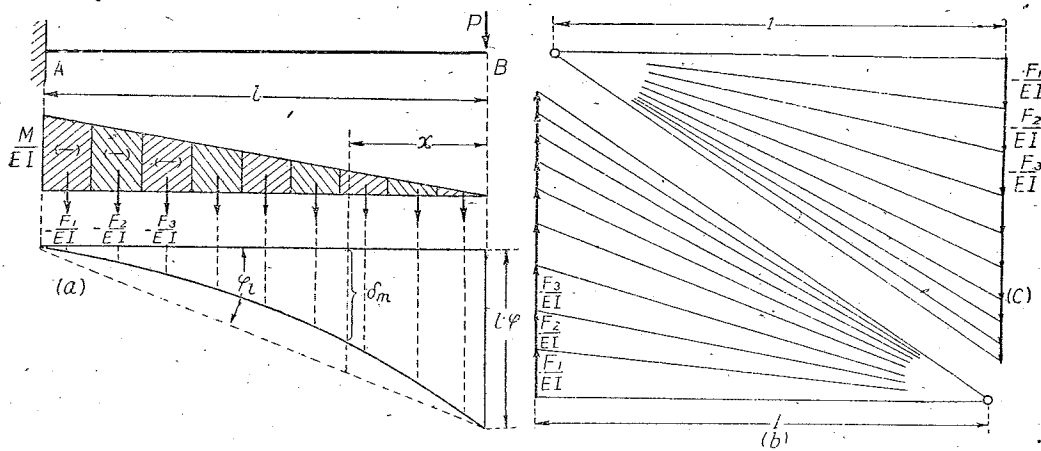
第 4-32 圖

る。修正法の一、二を例示すれば、第 4-31 圖は徑間の中央に於て多くの蓋板を有する鉄桁のやうに、 I が漸次變化してゐる梁に對する一解法であつて、 I が同一である部分には同一の極距を用ふるやうにして極を漸次移動して作圖するのである。極射線は (d) 圖に示すやうな形となる。第 4-32 圖は他の解法を示し、茲に於ては彈性荷重は、

$$EI_0 \cdot dw = M \cdot dx \cdot \frac{I_0}{I}$$

なる形に書き換へ (I_0 は任意の基準断面の I である), モーメント面積を $Mdx \frac{I_0}{I}$ とし, 極距を EI_0 とするのである。従つてモーメント面積はは圖示のやうに階段的に變化するのであり, 本圖では I_0 を基準として修正をしてゐるのである。計算による場合は之を荷重として求めた曲げモーメント M を EI_0 で割れば良いのである。

梁が片持梁である場合には, 曲げモーメントは普通は (-) であるから, 弾性荷重 Mdx は上向きに作用することとなり; 第 4-33 圖の片持梁に於ては (I =定値), 弾性荷重は Mdx/EI となし極距を 1 としてゐるが, 若し弾性荷重を上向きに作用させれば力多角形は (b) 圖の如く畫けば良い。然し若し下向きに作用するものと看做すときは力の多角形を (c) 圖の如く畫くのである。計算による場合には, 反對に B を固定し A を放端とした片持梁と考へて之に Mdx/EI の弾性荷重を作用させれば良いのである (コンジュゲート梁)。



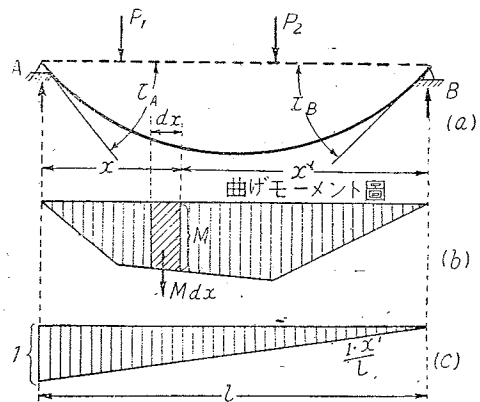
第 4-33 圖

次に直線梁の撓角に就いて述べる。第 4-34 圖 (a) は直線梁が變形したときの弾性曲線と支端の撓角を示し, (b) は曲げモーメント圖を, (c) は右支端 A に $\bar{M}=1$ なる假想荷重を與へたる場合のモーメント圖を夫れ夫れ示すのであるが, 可能變形法則によれば, モーメントの影響のみを採るとき,

$$\left. \begin{aligned} 1. \tau_A &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx \\ &= \frac{1}{E \cdot I} \int M\bar{M} dx \dots \dots (E \text{ 及び } I \text{ を定値とする}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4-21)$$

茲に $\bar{M}=1 \cdot x/l$ であるから

此の式の右項は梁 AB に $M \cdot dx$ なる弾性荷重が載つたときの支點 A の反力であるから, 梁 AB の支點に於ける弾性曲線切線が梁 AB と爲す傾角 (撓角) は, 此の梁のモーメント面積を荷重として考へたときの支點反力に $1/EI$ を乗じたものである。慣性モーメント I が定値ならば, モーメント面積を第 4-32 圖のやうに修正すれば良いのである。



第 4-34 圖

[算例] 鋼桁の撓み

支間 19.2m なる鋼桁の 8 等分點に於ける曲げモーメント及び慣性モーメントは次表の如きものなりとす。然るときは第 4-32 圖により之等の M によりて作らるる Δ モーメントに $\frac{I_a}{EI}$ を乗じたる面積を單桁 AB の荷重として各點の曲げモーメントを求め, この曲げモーメントを I_a を以て除せるものは撓みとなる ($E=2,100,000 \text{ kg/cm}^2$)。

等分點	a	b	c	d
$M \text{ kg.cm}$	15,000,000	26,000,000	38,000,000	37,000,000
$\frac{M}{B} \text{ cm}^3$	7.143	12.381	15.714	17.619
$I \text{ cm}^4$	-2,000,000	2,500,000	2,800,000	3,000,000
$I_a + I$	1.5	1.2	1.07	1

$$F = \frac{1}{2} \frac{M}{E} \cdot \frac{I_a}{I} (\lambda + \lambda); \lambda = 240 \text{ cm}$$

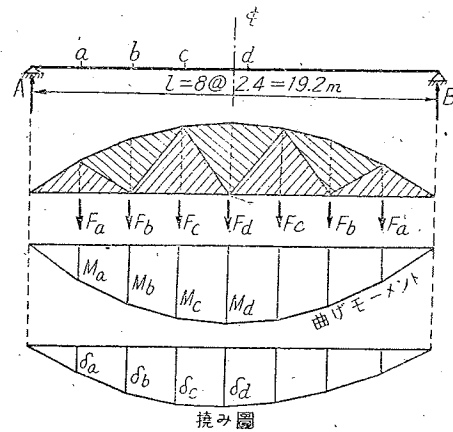
$$F_a = \frac{1}{2} \times 7.143 \times 480 \times 1.5 = 2,571 \text{ cm}^4$$

$$F_b = \frac{1}{2} \times 12.381 \times 480 \times 1.2 = 3,566 \text{ ''}$$

$$F_c = \frac{1}{2} \times 15.714 \times 480 \times 1.07 = 4,035 \text{ ''}$$

$$F_d = \frac{1}{2} \times 17.619 \times 480 = 4,229$$

曲げモーメントの計算は次式の形で行ふのが便利である (§ 16. 参照)。



第 4-35 圖

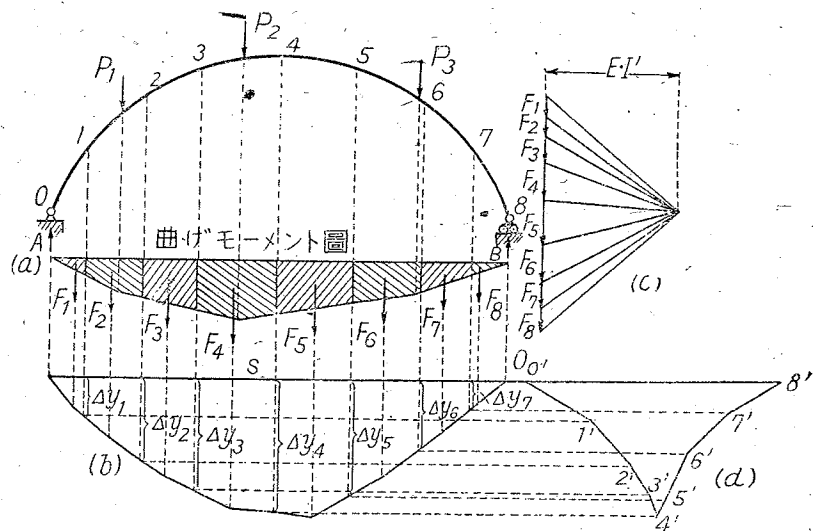
$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m; \quad \delta_m = -\frac{M_m}{I} \times \lambda$$

$Q_a = \frac{1}{2} P_a = 2,115 \text{ cm}^4$	$\frac{M_a}{\lambda} = 12,287 \text{ cm}^4$	$\delta_a = \frac{12,287 \times 240}{3,000,000} = 1.08 \text{ cm}$
$\frac{4,035}{6,150}$	$\frac{9,719}{22,003}$	
$Q_c = 6,150 \text{ ''}$	$\frac{M_b}{\lambda} = 22,003 \text{ ''}$	$\delta_b = \frac{22,003 \times 240}{3,000,000} = 1.76 \text{ ''}$
$\frac{3,566}{6,150}$		
$Q_e = 9,716 \text{ ''}$	$\frac{M_c}{\lambda} = 28,153 \text{ ''}$	$\delta_c = \frac{28,153 \times 240}{3,000,000} = 2.15 \text{ ''}$
$\frac{2,571}{2,115}$		
$Q_a = 12,287 \text{ ''}$	$\frac{M_a}{\lambda} = 30,268 \text{ ''}$	$\delta_a = \frac{30,268 \times 240}{3,000,000} = 2.42 \text{ ''}$

§ 11. 曲線梁の撓みの圖解法

第 4-36 圖に示す曲線梁の各點の撓位は、ウヰリヨの方法を用ひれば近似的ではあるが之を圖解的に容易に求める事が出来る。茲に $I \cos \varphi = I' = \text{定値}$ とする。

最初にモールの撓みの求め方に倣つて、この梁の曲げモーメント圖を畫き、分割した微小モーメント面積 F_1, F_2, \dots を弾性荷重とし極距を EI' として連力圖を畫けば、曲線梁各點の鉛直撓み $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots$ は直に求められるのである。



第 4-36 圖

次に 1 點の撓位を考へるに、この點は 0 を中心にし半徑 0-1 で畫いた圓の上になるべき事が明であるが、近似的には 1 點に於て 0-1 線に垂直に引いた線の上にあるものと考へられるから、(d) 圖に於て 0 (0) 點をとり、0'-1' ⊥ 0-1 と作圖し (b) 圖の Δy_1 の下方より引いた水平線と交つた點を 1' とすれば長さ 0-1' は 1 點の撓位を示すのである。同様に 1'-2' ⊥ 1-2 と作圖し Δy_2 の下方から引いた水平線と交つた點を 2' とすれば、長さ 0'-2' は 2 點の撓位を示すのである。この方法を順次に行へば (d) 圖の 0' 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' なる撓位圖が得られる。之によれば右支點 B の撓位は、單に水平方向のみに撓位し、その長さは 0'-8' によつて示される事が分る。

此の作圖に當つては (b) 圖の連力圖は閉塞線 S が水平となるやう書き改める必要がある。この作圖法は 2 鉸拱の近似計算に屢々用ひられる。

§ 12. 直線梁の彈性曲線方程式

直線梁が曲げモーメントの爲に撓曲した彈性曲線を第 4-37 圖の mn 線によつて示す。線上の m 及び n は近接する 2 點であつて $mn = ds$ 、而して m 及 n 點の切線の水平 (x 軸) と交はる角を θ 及び $\theta + d\theta$ とすれば、 $mn = ds$ 間に於ける撓角の變化は $d\theta$ であつて、 $\angle min$ が之を示す (mi 及び ni は夫れ夫れ mm' 及び nn' に直角)。然るときは、

$$d\theta = \frac{mn}{in} = \frac{ds}{R}; \quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\text{茲に } \tan \theta = \frac{dy}{dx},$$

之を s で微分すれば、

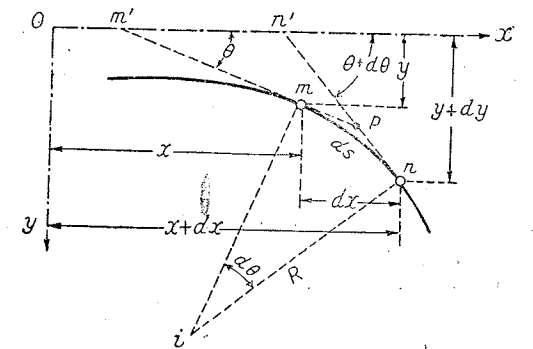
$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds}$$

而して $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$ であるから、

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\sec^3 \theta}$$

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \dots \dots \dots (4-22)$$



第 4-37 圖

1/R は ds 部分の曲率である。dy/dx = tan θ は微小であるから、

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots\dots(4-23)$$

と書くことが出来る。然るに慣性モーメント I 、弾性係数 E なる直線梁の弾性曲線の曲率は之に作用してゐる曲げモーメントを M とすれば、

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(4-24)$$

よつて、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(4-25)$$

本式は直線梁の曲げモーメントに因つて撓曲した弾性曲線の一般式である。茲に特に注意すべきは、符號であつて、普通は曲げモーメントの符號を第 4-38 圖のやうに採るから、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \dots\dots\dots(4-26)$$

となる。次に本式の利用法を例示する。

【例題】

等分布荷重満載の片持梁 (第 4-39 圖)

$$M_x = -\frac{1}{2} p(l-x)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} = \frac{p}{2EI} (l-x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2EI} \left\{ l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right\} + C_1$$

$$x=0 \text{ のとき } dy/dx = \tan \theta = 0 \quad \therefore C_1 = 0$$

$$y = \frac{p}{2EI} \left\{ \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right\} + C_2$$

$$x=0 \text{ のとき, } y=0. \quad \therefore C_2 = 0$$

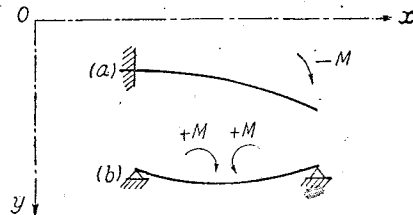
$$y = \frac{p}{2EI} \left\{ \frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right\} \dots\dots\dots(4-27)$$

撓み y は $x=l$ なる B 點に於て最大である。

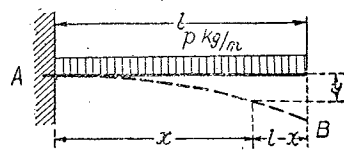
等分布荷重満載の單純梁 (第 4-40 圖)

$$M_x = +\frac{p}{2} \left\{ \frac{l^2}{4} - x^2 \right\}$$

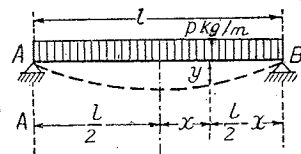
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} = \frac{-p}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$



第 4-38 圖



第 4-39 圖



第 4-40 圖

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-p}{2EI} \left(\frac{l^2x}{4} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$x=0 \text{ のとき, } dy/dx=0, \quad \therefore C_1 = 0$$

$$y = \frac{-p}{2EI} \left(\frac{l^2x^2}{8} - \frac{x^4}{12} \right) + C_2$$

$$x = \frac{l}{2} \text{ のとき, } y=0, \quad \therefore C_2 = \frac{p}{2EI} \cdot \frac{5l^4}{192}$$

$$y = \frac{p}{2EI} \left(\frac{5l^4}{192} - \frac{l^2x^2}{8} + \frac{x^4}{12} \right) \dots\dots\dots(4-28)$$

撓み y は $x=0$ 即ち中央點に於て最大となる。

弾性曲線については次の關係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M}{EI} = \frac{1}{R} \dots\dots\dots \text{曲率} \\ \frac{dy}{dx} &= \int \frac{M}{EI} dx = \theta \dots\dots\dots \text{撓角} \\ y &= \iint \frac{M}{EI} dx \cdot dx \dots\dots\dots \text{撓み} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-29)$$

EI が定値なるときは、

$$EI \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = p \dots\dots\dots \text{荷重} \quad EI \cdot \frac{dy}{dx} = \iint \int p dx \cdot dx \cdot dx = \int M dx \dots\dots\dots \text{撓角}$$

$$EI \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = \int p dx = Q \dots\dots\dots \text{剪断力}$$

$$EI \cdot y = \iint \int \int p dx \cdot dx \cdot dx \cdot dx = \iint M dx \dots\dots\dots \text{撓み}$$

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \int \int p dx \cdot dx = M \dots\dots\dots \text{曲げモーメント}$$

§ 13. モーメント面積法

§ 10 に述べた曲げモーメント圖を弾性荷重として撓み及び撓角を求める解法は其の應用範圍極めて廣く、アメリカでは之にモーメント面積法 (Moment-area method) なる名稱を與へてゐるが、1873 年グリーン (Green) が之を初めて發表したのである。前掲諸項と聊か重複する所あるが之を解説する。

第 4-41 圖に於て曲線を呈してゐる梁 ACB は曲げモーメントによつて此の形に撓曲されたものとなし、此の弾性曲線の撓角の變化は dx につき $d\theta$ であるとする。而して $d\theta/dx$ は曲線 MNO で示されるものとする。然るときは ACB 部分の撓角變化の總量は

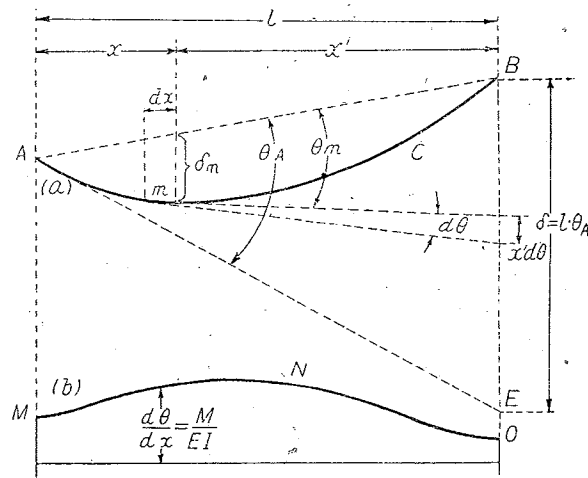
$$\int d\theta = \int \frac{d\theta}{dx} dx$$

であつて、之は (b) 圖の面積
で示されることになる。
第 4-29 式に示した通り

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{M}{EI} \\ d\theta &= \frac{M}{EI} dx \end{aligned} \right\} \dots (4-30)$$



第 4-41 圖

此の式から弾性曲線上の 2 点
の撓角に就いて

(I) 弾性曲線上の 2 点 A 及び B の撓角の變化は此の 2 点間の M/EI 圖の面積で示される。

弾性曲線上の dx 部分の切線の BE 線に挟まれる長さは、 $d\theta$ は微小であるから、 $x'd\theta$ と考へる事が出来る。然るときは、

$$BE = \int_a^b x' d\theta = \int_a^b x' \frac{d\theta}{dx} \cdot dx$$

即ち、 $BE = \delta$ とすれば

$$\delta = \int_a^b x' \frac{M}{EI} dx \dots (4-31)$$

(II) 弾性曲線上の B 点から同線上の A 点の切線に至る距離は、AB 2 点間の M/EI 圖面積に對する B 点でとつた面積一次モーメントに等しい。

之を第 4-42 圖に示す片持梁で説明すれば、b 点に作用する集中荷重 P に因る曲げモーメント圖は高さ $P \cdot l$ なる直角三角形で示され、弾性曲線は A 点に於て Ab 線に切線であるが、任意点 m の撓み δ_m は、第 4-31 式により、 $\delta_m = \int x \frac{M}{EI} dx$ であつて、 m 点に於ける之から左側の M/EI 面積の面積一次モーメントであるから (§1 及び第 4-2 圖参照)。

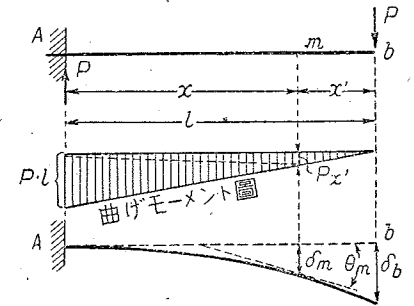
$$EI \cdot \delta_m = Px' \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} x + Pl \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{3} x$$

$$\therefore \delta_m = \frac{Px^2}{6EI} (2l+x')$$

$$\delta_b = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$EI \cdot \theta_m = -Px' \cdot \frac{x}{2} - Pl \cdot \frac{x}{2}$$

$$\therefore \theta_m = -\frac{Px}{2EI} (l+x')$$



第 4-42 圖

此のモーメント面積法は片持梁に對しては甚だ簡單である。而してアメリカでは本法を次に述べるコンジュゲート梁解法と組合せて梁の撓み及び撓角の解法に利用してゐる。

以上は曲げモーメントによつて撓曲した梁の撓度及び撓角に關する二つの重要定理であるが、§10 で述べた撓角の問題を上記の關係を敷衍して更に説明する。

第 4-41 圖に示す AB は或る直線梁の弾性曲線の一部を示し、MNO は之に相當する撓角の變化を示すものとせよ。

$$l \cdot \theta_A = \delta = \int_a^b x' d\theta = \int_a^b x' \frac{d\theta}{dx} dx$$

然るときは、AB 間の $\frac{d\theta}{dx}$ 曲線が作る面積に對する B 点の断面一次モーメントを、 l で割つたものは、端撓角 θ_A の大きさを示すのである。今、AB を支間 l なる單純梁として考へて見れば、前記の形で θ_A は、 $d\theta/dx$ なる分布荷重の載つた單純梁 AB の支點 A の反力と同じになるから、茲で次の事が言へるのである。直線梁の弾性曲線の一部を AB とし、その中の任意点の撓角變化が $d\theta/dx$ であるとするれば、弦 AB に對する一端の撓角は、 $d\theta/dx$ なる分布荷重を荷つてゐる假想梁 AB の其の一端の反力に等しい。此の假想梁に對しては、 $d\theta/dx = \frac{M}{EI}$ は一つの彈性荷重である。

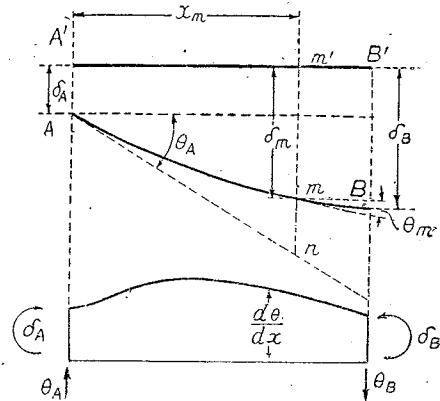
之を同圖 (第 4-41 圖) の m 点の撓角に就いて考へれば、 m 点の撓角は (角は弦 AB に對して測る) 左端の撓角から左端と m 点との間の $d\theta/dx$ 圖の面積を差引いたものと見ることが出来る。曲げモーメントのみに因る撓曲をとれば $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ であるから直線梁の一部 AB に於ける任意点 m の撓角 (弦 AB に對する) は分布荷重 M/EI を荷へる支間 AB なる假想梁の m 点の剪断力に等しい。然るに m 点の弦に對する撓度 δ_m は、第二定理を利用して、 $\theta_A \cdot x$ より A_m 間の $d\theta/dx$ 圖面積に對する m 点のモーメントを差引いたものに等しい事が分り、その結果として、假想梁 AB の曲げモーメントを求めると同一の方法で δ_m が求められることになる。よつて、直線梁弾性曲線中の任意点 m の撓度 δ_m は、 M/EI を荷へる支間 AB なる梁の m 点の曲げモーメントに等しい。

§14. コンジュゲート梁解法

モーメント面積法の擴充策としてアメリカでは古くから茲に示すコンジュゲート梁法

(Conjugate-beam method) を用ひてゐる。此の梁は假想的な梁であつて、長さは與へられた梁と同一であるが、之の剪断力圖及びモーメント圖が與へられた梁の撓角及び撓みを其の儘示すやうに支點並に荷重が定められた靜定梁である。

第 4-43 圖に於て $A'm'B'$ を直線梁の原形、曲げモーメントの影響によつて撓曲した形を AmB と考へ且つ δ_A 及び θ_A を



第 4-43 圖

A 點の撓み及び撓角とすれば、モーメント面積法によれば、 m 點の撓角は

$$\theta_m = \theta_A - \int_A^m \frac{d\theta}{dx} dx$$

又、 m 點の撓みは

$$\delta_m = \delta_A + \theta_A \cdot x_m - \int_A^m x \frac{d\theta}{dx} dx$$

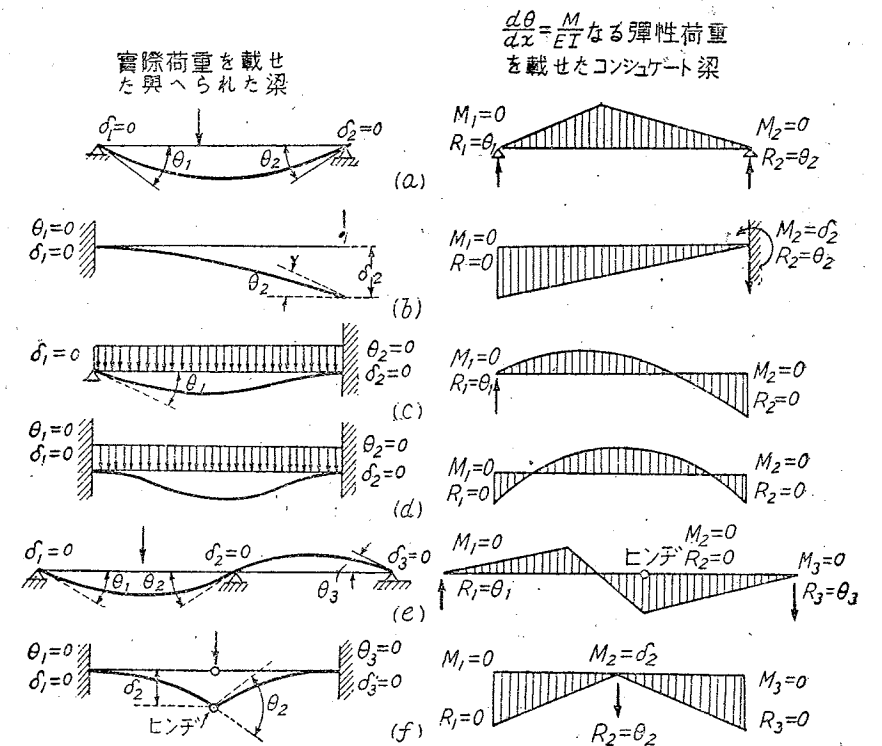
AB をコンジュゲート梁と看做して θ_A は A 點の剪断力であり、 δ_A は A 點の曲げモーメントであり、且つ $\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$ を荷重と考へれば、此のコンジュゲート梁の剪断力圖及び曲げモーメント圖は與へられた梁 $A'm'B'$ の撓角圖並に撓み圖と同一になるべきであつて、仍ち、コンジュゲート梁は弾性荷重 $\frac{d\theta}{dx}$ に作用せられて釣合を保ち、之の端部撓角及び撓みは夫れ夫れ反力及びモーメントに等しいと考へられるものである。

コンジュゲート梁の支承方法を選ぶに當つては凡その次の注意が必要である。

- (1) 或る梁の或る點の撓みが零であるときは、コンジュゲート梁では其の點にヒンジを入れて其の點の曲げモーメントを零にする。
- (2) 或る梁の端部の撓みが零ならざるときは、コンジュゲート梁のその端部に曲げモーメントが生ずるやうに反力モーメントを與へる。
- (3) 或る梁の端部撓角が零であるときは、コンジュゲート梁の其の點に於ては反力なく剪断力なきものとする。
- (4) 或る梁の端部撓角が零ならざるときは、コンジュゲート梁の其の點には剪断力を作作用せしむる爲に反力を與へる。
- (5) 或る梁の中間にヒンジあるときは、コンジュゲート梁の其の點には鉛直反力を與へ

る。與へられた梁のヒンジの兩側に於ては、撓みは同じであり、撓角は違ふのが一般であるが、斯うすればコンジュゲート梁の其の點でも曲げモーメントは同じであり剪断力は不同となる。

(6) 以上諸項に従へば、單純支承はコンジュゲート梁でも單純支承となり ($\delta=0, \theta \neq 0$; 曲げモーメント $M=0$, 剪断力 $Q \neq 0$)、固定支承はコンジュゲート梁では自由端となり、($\delta \neq 0, \theta=0$; $M=0, Q=0$)、自由端はコンジュゲート梁では固定支承となり ($\delta=0, \theta \neq 0$; $M \neq 0, Q \neq 0$)、梁の中間のヒンジはコンジュゲート梁では單純支承となる。而して之等の數例は第 4-44 圖に示した通りである。



第 4-44 圖

§ 15. 撓み及び撓角を求むる諸方法に関する注意

既に述べた撓み及び撓角を求むる諸方法は明らかに之を大別することが出来る。

- (1) 弾性變形に於て爲される仕事に立脚するもの (可能變形法則, カステリアノの定理)
- (2) 弾性變形に現れる幾何學的關係に立脚するもの (弾性荷重法, 之と同一圈にあるモ

ーメント面積法及びコンジュゲート梁法, ウェリオリオ・モールの圖解法, ………)

之等の諸方法を應用する場合に就いて一言すれば,

(a) 梁のやうな充腹構造の變形を求めるとき, (1) の方法はモーメントの影響のみならず, 軸應力 (推力), 剪断力の影響を加算するが, (2) の方法は其の目的が實用を主としたものであるからモーメントの影響のみを採るを普通とする。

(b) 單純梁, 片持梁のやうな簡単な梁の撓み及び撓角を求めるには, モーメント面積法, コンジュゲート梁法, などが適當してゐるが, 弾性荷重 w を用ひる方法によれば總ての點の撓みが一舉にして求められるのである。

(c) 弾性曲線の一般式を用ひる方法は, 問題の梁の場合が教科書及びハンド・ブック等に掲げてあれば兎も角, 然らざるときに $d^2y/dx^2 = M/EI$ の積分から出發する法は一般に不利である。

(d) トラスの 1 格點の撓みを正確に求めるには可能變形法則を用ひるのが定石である。然し, 各格點の撓みを同時に求める爲には弾性荷重を用ひた方がよい。

(e) トラスの諸格點の變位を近似的に且つ迅速に求めるにはウェリオリオ・モールの圖解法が適してゐる。

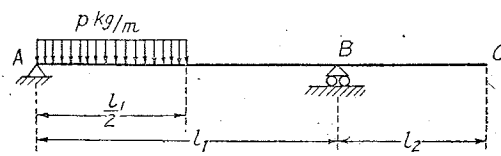
【例題】第 4-45 圖に示す梁の

先端 C の撓み及び撓角を求む。

(1) 可能變形法則による解法

撓み δ_c を求める爲には C 點に

$\bar{P}=1$, 撓角 θ_c を求める爲には C 點に $\bar{M}=1$ なる假想荷重を夫れ夫れ作用せしめる (第 4-46 圖)。



第 4-45 圖

$$\delta_c = \int \frac{MM}{EI} dx$$

(x は A より測る)

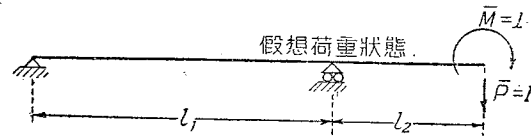
實際荷重 p kg/m による曲げ

モーメント

$$M = \frac{3}{8}pl_1x - \frac{1}{2}px^2 \dots\dots\dots A \text{ より } \frac{l_1}{2} \text{迄}$$

$$= \frac{3}{8}pl_1x - \frac{1}{2}pl_1\left(x - \frac{l_1}{4}\right) \dots\dots\dots \frac{l_1}{2} \text{より } B \text{迄}$$

$$= 0 \dots\dots\dots B \text{より } C \text{迄}$$



第 4-46 圖

假想荷重 $\bar{P}=1$ による曲げモーメント

$$\bar{M} = -x \frac{l_2}{l_1} \dots\dots\dots A \text{ より } B \text{迄}$$

之等を上式に代入すれば, BC 間では $M\bar{M}=0$ であるから,

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{\frac{l_1}{2}} \left(\frac{3}{8}pl_1x - \frac{1}{2}px^2 \right) \left(-x \frac{l_2}{l_1} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{l_1}{2}}^{l_1} \left[\frac{3}{8}pl_1x - \frac{1}{2}pl_1\left(x - \frac{l_1}{4}\right) \right] \left(-x \frac{l_2}{l_1} \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ -\int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{3}{8}pl_1x^2 dx + \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{pl_1^2}{2l_1}x^3 dx + \int_{\frac{l_1}{2}}^{l_1} \frac{1}{8}pl_1x^2 dx - \int_{\frac{l_1}{2}}^{l_1} \frac{1}{8}pl_1l_2x dx \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \delta_c = -\frac{7}{384} \frac{pl_1^3 l_2}{EI} \quad (\text{上方に向ふ})$$

$$\theta_c = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

M の値は前に同じ。 \bar{M} は C に加へられる 1 なる假想モーメントに依る各部の曲げモーメントであつて, このモーメントは支點 A に $\frac{1}{l_1}$ kg なる反力を生ず, 依て

$$\bar{M} = -\frac{x}{l_1} \dots\dots\dots A \text{ より } B \text{迄}$$

δ_c の場合と同様の積分を行ひ, 即ち $\left(-x \frac{l_2}{l_1}\right)$ の代りに $\left(-\frac{x}{l_1}\right)$ を代入すれば,

$$\theta_c = -\frac{7}{384} \cdot \frac{pl_1^3}{EI}$$

その方向は假定したものと, 反対であつて, 即ち時計と反対なる方向を有す。 δ_c は微小なる長さであるから $\theta_c \times l_2 \approx \delta_c$ である。

$$\theta_c \times l_2 = -\frac{7}{384} \cdot \frac{p \cdot l_1^3}{EI} \times l_2 = -\frac{7}{384} \cdot \frac{p \cdot l_1^3 l_2}{EI} = \delta_c$$

前記 δ_c と同値である。

(2) カスティリアノの定理による解法

C 點に作用する實際荷重なきを以て, 直接 C 點の撓みを求むることは出来ないが, 今 C 點に \bar{P} なる假想荷重を採るときは, 第一定理をそのまま適用することが出来る。與へられたる荷重 p に依る M を M_p とせば,

$$M = M_p - \bar{P} \cdot x \cdot \frac{l_2}{l_1}; \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} = -x \frac{l_2}{l_1} \dots\dots\dots A \text{ より } B \text{迄}$$

$$M = -\bar{P}(l_1 + l_2 - x); \quad \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} = -(l_1 + l_2 - x) \dots B \text{ より } C \text{ 迄}$$

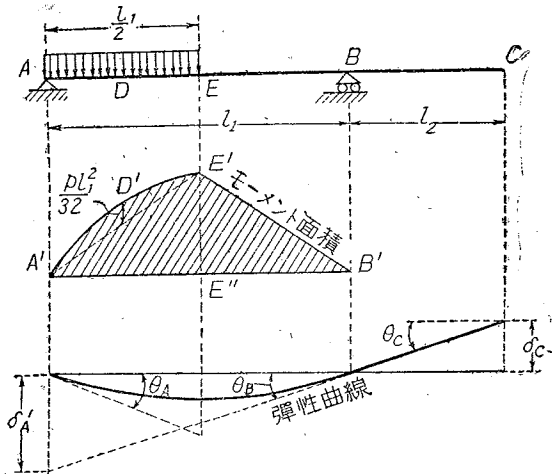
$$\delta_c = \int_A^C \frac{M dx}{EI} \frac{\partial M}{\partial \bar{P}} = \int_A^B \frac{(M_p - \bar{P} \cdot x \frac{l_2}{l_1})}{EI} dx \left(-x \frac{l_2}{l_1}\right) + \int_B^C \frac{\bar{P}(l_1 + l_2 - x)}{EI} dx (l_1 + l_2 - x) (-1)$$

$\bar{P}=0$ なるにより $\delta_c = \int_A^B \frac{M_p dx}{EI} \cdot \left(-x \frac{l_2}{l_1}\right)$ にして、可能変位法則に依る場合と同式となる。

(3) 弾性荷重に依る解法

$\delta_c = \theta_c \cdot l_2$ 且つ $\theta_c = \theta_B$ なる関係あるを以て、問題は θ_B を求むるに初まる。

θ_B は $\frac{M}{EI}$ を荷重強度とせる場合の B 点の剪断力に同じである。曲げモーメントは圖に於て示せる $A'D'E'B'$ となり、之は三角形 $A'E'B'$ と拋物線 $A'D'E'$ とに分つを得。但し拋物線の D' に於ける縦距は $A'E''$ を支間と考へたときの中央点の M の値である。



第 4-47 圖

$$\text{三角形 } A'E'B' \text{ の面積} = \frac{1}{2} p l_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{p l_1^3}{32}$$

$$\text{拋物線 } A'D'E' \text{ の面積} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{p l_1^2}{32} = \frac{p l_1^3}{96}$$

依つて、 $EI \theta_B$ はこの合計面積を荷重とせるときの B 点の剪断力にして

$$EI \cdot \theta_B = - \left[\frac{p l_1^3}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{p l_1^3}{96} \cdot \frac{1}{4} \right] = - \frac{7}{384} p l_1^3$$

δ_c は $\delta_c = \theta_B \cdot l_2$ から求められる。

(4) モーメント面積法に因る解法

$$\theta_c = \theta_B = - \frac{\delta'_A}{l_1}$$

$EI \cdot \delta'_A = (A \text{ 点に於ける } A'E'B' \text{ に対するモーメント}) + (A \text{ 点に於ける } A'D'E' \text{ に}$

對するモーメント)

$$= \frac{p l_1^3}{32} \cdot \frac{l_1}{2} + \frac{p l_1^3}{96} \cdot \frac{l_1}{4} = \frac{7}{384} p l_1^4$$

$$\therefore \theta_c = - \frac{7}{384} \cdot \frac{p l_1^3}{EI}$$

(5) コンジュゲート梁による解法

與へられた梁は、 A 点單純支承、 B 点ヒンジ、 C 点固定のコンジュゲート梁となる。 B のヒンジに作用する梁 AB の反力は (3) により $\frac{7}{384} \cdot \frac{p l_1^3}{EI}$ であるから

$$\delta_c = -M_c = - \frac{7}{384} \cdot \frac{p l_1^3}{EI} \cdot l_2$$

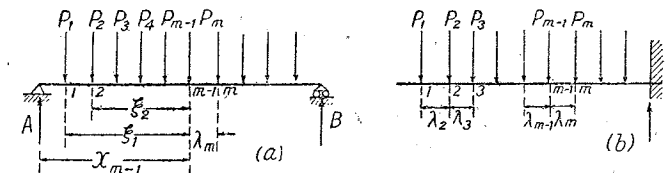
§ 16. 梁の曲げモーメント算法

弾性荷重による梁の曲げモーメント計算等に際し、計算を簡易化して誤算を防止する爲には、既に算例に示したやうに之を機械的に行ふを可とする。二點支承の場合は、

$$M_m = A(x_{m-1} + \lambda_m) - \sum_1^{m-1} P(\xi + \lambda_m)$$

$$= [A \cdot x_{m-1} - \sum_1^{m-1} P \cdot \xi] + [(A - \sum_1^{m-1} P) \lambda_m]$$

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \cdot \lambda_m \dots \dots \dots (4-32)$$



第 4-48 圖

單 純 梁				片 持 梁		
點	力	Q	M	點	Q	M
0	-A	0	0	0	0	0
1	P ₁	A	Q ₁ · λ ₁	1	0	0
2	P ₂	Q ₁ - P ₁	M ₁ + Q ₂ · λ ₂	2	P ₁	-P ₁ · λ ₂
3	P ₃	Q ₂ - P ₂	M ₂ + Q ₃ · λ ₃	3	$-\sum_1^2 P$	M ₂ + Q ₃ · λ ₃
4	P ₄	Q ₃ - P ₃	M ₃ + Q ₄ · λ ₄	4	$-\sum_1^3 P$	M ₃ + Q ₄ · λ ₄
...
m	P _m	Q _{m-1} - P _{m-1}	M _{m-1} + Q _m · λ _m	m	$-\sum_1^{m-1} P$	M _{m-1} + Q _m · λ _m

片持梁でも同様であるが、 $Q_m = -\sum_1^{m-1} P$ であるから、 $M_m = M_{m-1} + Q_m \cdot \lambda_m = M_{m-1} - \sum_1^{m-1} P \cdot \lambda_m$ となる。

§ 17. 歴史的に観たる構造物應力解法

中世以前の構造物は工學的理論の背景を持たず、全く過去の貴い経験を母體として漸進的に發達したのであつたが、17世紀の頃から擡頭した力學の理論は、自然科学の一般的なる進展に伴ひ橋梁その他の構造物を理論的に取扱ふことに甚大なる寄與をなし、18世紀を経て19世紀に於ては力學は物理學者から工學者の手に移つて構造力學の基礎が築き上げられ、構造材料として極めて優秀なる構造用鋼及び鐵筋コンクリートの市場に出現して茲に新なる構造形式の創出せらるゝに及んでは、精緻巧妙を盡したる種々なる應力解法が發表せられ、之に従つては未曾有なる大構造物が地上に築造せられるに至つたのである。

今その道程の一端を抄記するならば、應力と變形の問題は伊太利亞のガレリオ (1564—1642) の理論を先驅とし、フック (英) は 1676 年材料力學の根幹を爲す所の應力と之に因て生ずる變形との關係を論じ (*Ut tensio sic vis*), 1680 年マリオッテ (伊) は始めて曲げ作用を受ける梁の理論に關して發表する所があつたが、この問題はダニエル・ベルヌキ、クウロン、ナヴェエ、コオンイ、等の碩學によつて大成せられ、又、最も重要なる問題の一つである長柱の安定に關する研究に於ては、理論的にはオイラア (1757 年) の有名なる長柱理論を第一としてヤング、ナヴェエ、ランキン、エンゲッサー、ジョンソンの理論あり、實驗的にはホッジキンソン (1840 年)、パウシンガア、コンンデエル、テトマイア、カルマン、等の卓越した研究が公にせられて長柱強度の決定の基礎が確立せられるに至つた。

讀者にして若し構造力學の發達史に就いて興味を持たれるとすれば、トドハンタア及びウェスタアガアト、等の著書は甚だ有益であると考へられる。本書に於て論すべき構造理論の史的經過を茲に概説すれば、構造物を一つの彈性體系と看做し之に作用する力と變形との關係を論ずる構造物の彈性理論は、1788 年ラグランジュの説いた可能變形の原理によつて輝かしい展開を示し、之と同じくナヴェエ (佛) は 1825 年連続梁解法に第一步を印したが、連続梁の問題は同じく佛蘭西人である所のクラペイロンの 3 個モーメントの定理 (1857 年) によつて一先づ大成するに至つた。

* Todlaunter and Pearson "History of the elasticity and strength of materials"

Westergaard. "One hundred fifty years advance in structural analysis" Trans, Am. S. C. E., 1930.

彈性變形乃至は不靜定構造に於ける餘剩力を求めるに際しては、變形に於て爲される仕事に立脚する方法が弘く用ひられてゐるのであるが、之に可能變形 (速度) に因るものと實際仕事に因るものとがあり、可能變形仕事の定理の實用化は、之が一般化はモール (獨 1874 年) に始まり (マックスウェル・モールの方法)、簡明にして且つ用法の頗る巧妙なるミュウラア・ブレスラウ (獨) の方法によつて大成された。實際仕事の原理は 1833 年に發表されたクラペイロンの定理に始まつて著明なる最小仕事の原理 (1858) はメナブレア (伊) によつて構造物應力解析への大なる貢獻を爲し、この理論はカスティリアノ (伊) の樹てた定理に於て完成し各種構造物の設計に廣く用ひられるに至つたのである。

彈性構造の諸理論に於ける一つの重要なものにはマックスウェル (英) によつて唱へられた相反法則 (1864 年)、モールによつて創められた M/EI による彈性曲線の定理 (1868 年) が在り、精彩限ない之等の理論は當時澎湃として興つた大橋梁大建築物建立の基礎を形作つたのであるが、之が設計々算を簡易ならしめた便法の一つとして特記すべきは影響線の利用であつて、1868 年時を同じくしてモール並びにウヰンクラア (獨) によつて示された圖式解法は、ヴェキラウヒ (獨) によつて影響線解法の名を與へられ、ミュウラア・ブレスラウは巧みに此の特性を應用して各種構造物の應力解法を明に爲したのであつた。之と同じく應力並に撓度の解法に一つの捷徑を開いたのは彈性荷重の利用であり、1889 年ラント (獨) によつて示された彈性荷重は 1890 年代に至るやミュウラア・ブレスラウによつて實用化せられ、之と同時に記すべきものにはウヰリオ (佛, 1877 年) によつて創められモールが改良した所の變形の圖式解法がある。

木材石材のみを主要構造材料とした過去の橋梁は 19 世紀の後半に至るや構造用鍊鐵の大量生産せられるに及んでトラス橋の時代を作り、ラティス・ガアダア、ホキップル・トラスの如き今日にあつては凡そ古風なる橋術と觀られるものが此の時代には驚異的橋梁として出場したのであつたが、ワアレン、プラットの剛結合トラスの數多く各地に架設せられるに及んでは、「剛結合せられたるトラスの各部材に生ずべき副應力は果して幾干なりや」の問答が構造技術界に一大波紋を興へ、1877 年獨逸ミュンヒェン工科大学にあつては之に對する論文を懸賞して募集したのである。之に應募した諸論文中の第一位はマンデルラの「格點の剛結合に伴つて生ずべき單純トラスの二次應力計算」(1880 年) であつて、この論文は今日に於ても精密解法の古典として嚴存してゐるが之に續いてはミュウラア・ブレスラウ、モール、等の實用解法が發表されてゐる。不靜定構造の解法として廣く利用され

てゐる所の方法は、カスティリアノの定理にせよ可能變形仕事による弾性方程式にせよ孰れも弾性變形に際して爲される仕事に其の基礎を置き、反力、應力、モーメント、等を不靜定未知量に選んでゐるのであるが、此の副應力（二次應力）の解法にあつては仕事を考慮せず、弾性變形に於て生ずる撓度及び撓角を不靜定未知量とする方法の優秀さが其の姿を現はし、20世紀に入つて鋼構造、鐵筋コンクリート構造の築造が盛んとなるに及んでは、ゲエラア（獨）、マネエ（米）、ウエルソン（米）（1915～18年）はモールの副應力解法を利用して所謂「撓角撓度法」をラーメン構造に對して作り上げたのであつた。このラーメン解法に對する研究は年を逐つ熾んであるが、丁抹人オステンフェルドの變形法（1925年）、米國人クロスのモーメント配分法（1932年）の如きは近年に於ける著明なる解法の一つであり、モーメント配分法に續いて鷹部屋福平、グリンタアの撓角配分法（1935年）がある。