

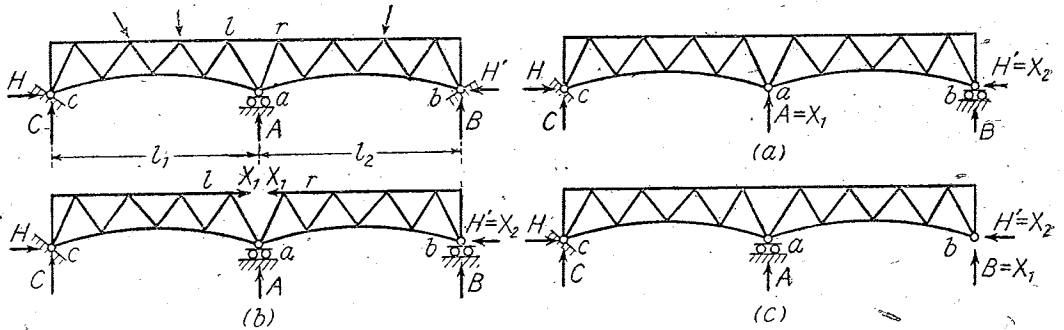
第3章 弾性勢力方程式

§1. 不静定構造物の解法

茲に不静定構造の一例として第 3-1 圖に示す 2 徑間連続構拱を採り其の兩側支點 b 及び c はヒンデ (反力棒數=2) よりなり, 中央支點 a は振り搖支承 (反力棒數=1) (*Pendulum rocker*) より成れるものとすれば, 此の構造は反力條件 $r=5$; 部材數 $m=35$; 格點數 $p=19$ にして

$$n_1 = r + m - 2p = 5 + 35 - 38 = 2 \quad ; \quad \text{即ち 2 次不静定}$$

依つて, 此の構造物の部材應力及び反力は静力學的釣合條件のみに依つては解き得ない。即ちこの構造物は 2 個の不静定未知量を有するを知るのである。



第 3-1 圖

不静定未知量のうちの如何なる應力或は反力 (一般にはモーメントをも含む) を X_1, X_2, \dots として選ぶべきかについては一定の法則がない。第 3-1 圖に於て支點 a の反力 A を以て X_1 , 支點 b の水平反力 H' を以て X_2 なりと假定するのは其の一方方法である。此の假定は同圖 (a) に示す如く, 中央支點を除去して其の代りに a 點に $A=X_1$ なる外力を作用せしめ, 右支點 b を振り搖支承の可動端に改めて其の代りに $H'=X_2$ なる外力を作用せしめたることを意味し, $X_1=A, X_2=H'$ なる限り此の假定に依つて構造物は何等の變化を蒙らない。即ち第 3-1 圖は同圖 (a) と全く同一の状態に在り, (b)-圖に於ては部材 lr の應力 lr を X_1 , 支點 b の水平力 H' を X_2 と假定してゐる。此の假定は, 部材 lr を撤去して其の代りに格點 l 及び r に X_1 なる外力を作用せしめ, 又支點 b を改めて可動端

となし其の代りに $H' = X_2$ なる外力を作用せしめたることを意味し、かくの如く假定しても、第 3-1 圖と同圖 (b) とは全く同一の状態にある。同様にして同圖 (c) に示す如く、右支點を除去してその代りに $B = X_1$ 、及び $H' = X_2$ なる外力を作用せしめたるものと假定しても差支へない。但し之等の如く或は部材を切斷し或は支點を改變するに際しては、斯くの如き假定をしても構造が不安定にならないやうに注意する必要がある。

斯くの如く不静定構造物の部材應力或は反力の内より不静定未知量を適當に選んで之れを外力なりと假定するときは、該構造物は静定構造となる。此の静定構造を或る不静定構造物の主系 (Hauptsystem) と謂ふ。換言すれば或る不静定構造の主系とは、之に含まれる不静定未知量が零に等しく、且つ静定なる構造を云ふ。抑も不静定未知應力が作用すると假定せられたる部材或は反力棒 (Reaction bar) は餘剩材 (Redundant member) であつて不静定未知量或は餘剩値たる X は $X=0$ なる状態に於て全體が丁度安定なる構造と成るやう選ぶを必要とする。之等に関しては既に第 1 章に於て述べた通りである。依つて主系とは或る不静定構造より餘剩材を除去したるものとも謂ふことが出来る。

不静定構造物の應力及び反力(一般にはモーメントをも含む)を解かんとするには、不静定未知應力 X を適當に選ぶを必要とし、換言せば主系を適當に選ぶを必要とする。 X を解くためには、若し X が n 個ありとすれば n 個の弾性方程式を設ける。之に依つて n 個の條件方程式を新に得るから n 個の X は悉く解き得ることとなる。主系の選定法は第 3-1 圖の場合に於ても、(a), (b), (c) の以外に尙多數ある。最も適當なる選定は、弾性方程式が最も簡單にして且つ之れを容易に解き得るものたらしむるにある。

弾性方程式には、弾性變形に出發するものと、弾性變形に因りて爲される仕事より出發するものとの二つがある。本章には後者について述べる。

§ 2. 可能變形法則に基く弾性方程式

1) 不静定結構の弾性方程式*

前項第 3-1 圖に示したる 2 徑間連続結構拱を採り (第 3-2 圖), その主系を同圖 (a) の如く定めて、中央支點反力及び右支點水平反力を夫々 X_a 及び X_b とする。

結構部材の應力に關して

S ……主系部材應力

* Müller-Breslau, "Graphische Statik" II. 1.

S_0 …… P のみ作用する状態 ($X=()$) の部材應力

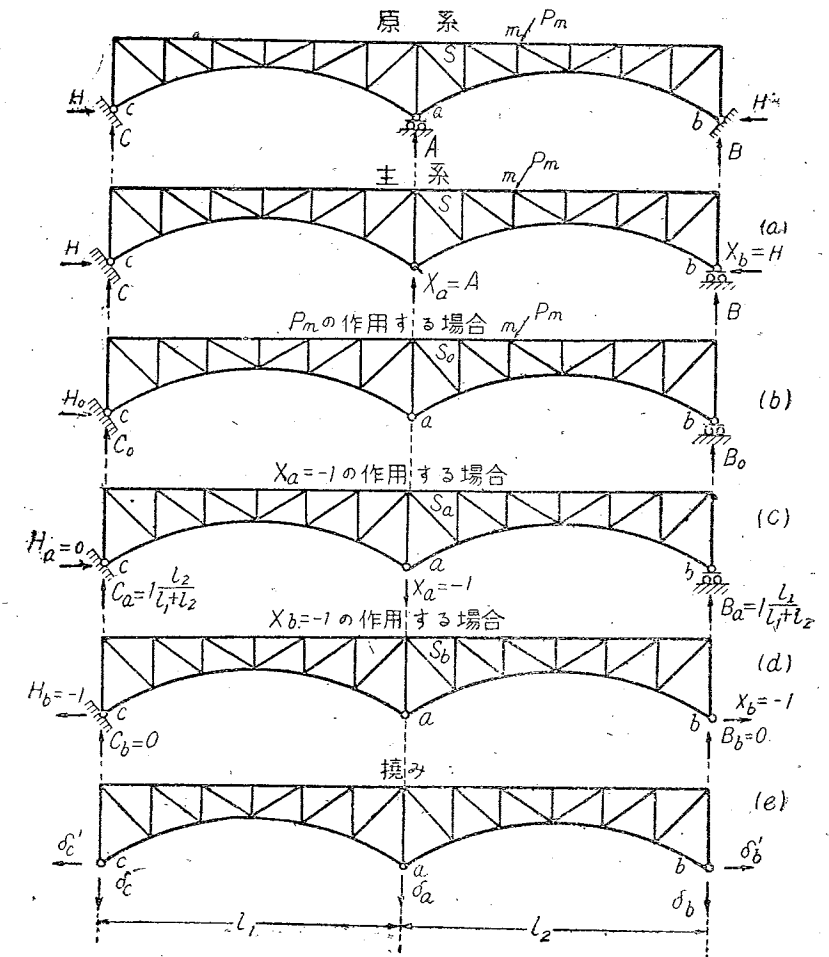
S_a …… $X_a = -1$ のみ作用する状態の部材應力

S_b …… $X_b = -1$ のみ " " "

とすれば、Superposition の法則に従ひて

$$S = S_0 - S_a \cdot X_a - S_b \cdot X_b \dots\dots\dots(3-1)$$

茲に X_a 及び X_b の單位荷重に對して負記號を與へたのは、單位荷重 1 を主系に於て假定せるものと反對の方向に作用させるからである。



第 3-2 圖

主系に $X_a = -1$ のみが作用するとき、支點 c 及 b の反力は夫々

$$C_a = 1 \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}; B_a = 1 \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

而して原系の支點 c, b は (e) 圖に示す如く δ_c 及び δ_b だけ沈下するものとすれば、
 $X_a = -1$ のみ作用する状態の支點沈下に依る可能仕事 L_a は、

$$L_a = -C_a \cdot \delta_c - B_a \cdot \delta_b \\ = -1 \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} \delta_c - 1 \cdot \frac{l_1}{l_1 + l_2} \delta_b \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

トラスの可能変形法則に於て $X_a = -1$ の假想荷重状態及び實際變形状態 (第 2-9 式) を採れば

$$1 \cdot \delta_a + L_a = \sum S_a \cdot \Delta s \quad \dots\dots\dots (3-3)$$

同様に於て $X_b = -1$ の假想荷重状態及び實際變形状態を考へれば

$$1 \cdot \delta_b + L_b = \sum S_b \cdot \Delta s \quad \dots\dots\dots (3-4)$$

實際變形に於ける Δs はフックの法則に依つて

$$\Delta s = \frac{S \cdot s}{EA} + \varepsilon \cdot t \cdot s = S \cdot \rho + \varepsilon \cdot t \cdot s$$

茲に、 $\rho = \frac{s}{EA}$

然るときは、第 3-3, 3-4 式の Δs に上記の値を入れ、 S に對して第 3-1 式の値を入れるときは、

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_a + L_a &= \sum S_a S_0 \rho - X_a \sum S_a^2 \rho - X_b \sum S_a S_b \rho + \sum S_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ 1 \cdot \delta_b + L_b &= \sum S_b S_0 \rho - X_a \sum S_b S_a \rho - X_b \sum S_b^2 \rho + \sum S_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-5)$$

本式は X_a, X_b を決定すべき聯立弾性方程式である。而して之等の式は次に記する記號を用ひることに依つて、更に簡單なる形となすことが出来る。

- $\delta_{ma} \dots X_a = -1$ に依る m 點の變位、その方向は m 點に作用する P_m の方向に同じ。
- $\delta_{aa} \dots X_b = -1$ に依る a 點の變位、その方向は a 點に作用する $X_a = -1$ の方向に同じ。
- $\delta_{at} \dots$ 温度變化に依る a 點の變位、その方向は a 點に作用する $X_a = -1$ の方向に同じ。

(1) 實際荷重状態 ($X=0$)、及び $X_a = -1; X_b = -1$ に依る變形状態に對して

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{ma} &= \sum S_0 \cdot \Delta s_a = \sum S_0 \cdot S_a \cdot \rho \\ \sum P_m \delta_{mb} &= \sum S_0 \cdot \Delta s_b = \sum S_0 \cdot S_b \cdot \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-6)$$

(2) 假想荷重状態 $X_a = -1$ 及び $X_a = -1, X_b = -1$ に依る變形状態に對して

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{aa} &= \sum S_a \cdot \Delta s_a = \sum S_a^2 \cdot \rho \\ 1 \cdot \delta_{ab} &= \sum S_a \cdot \Delta s_b = \sum S_a \cdot S_b \cdot \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-7)$$

(3) 假想荷重状態 $X_b = -1$ 及び $X_a = -1, X_b = -1$ に依る變形状態に對して

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{ba} &= \sum S \cdot \Delta s_a = \sum S_b \cdot S_a \cdot \rho \\ 1 \cdot \delta_{bb} &= \sum S \cdot \Delta s_b = \sum S_b^2 \cdot \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-8)$$

(4) 假想荷重状態 $X_a = -1, X_b = -1$ 及び 温度變化に依る變形状態に對して

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{at} &= \sum S_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ 1 \cdot \delta_{bt} &= \sum S_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-9)$$

第 3-7, 3-8 兩式から $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ 、即ちマックスウェルの法則が證明されるのを知る。以上諸式を第 3-5 式に代入すれば、弾性方程式は

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_a + L_a &= \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} \\ 1 \cdot \delta_b + L_b &= \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-10)$$

となつて、變位と荷重に依りて示され、之から未知量 X を解くことができる。

斯くして、 n 次不靜定トラスの弾性方程式 (Elastizitätsgleichung) は次の如く記し得るのである。

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_a + L_a &= \sum S_a S_0 \rho - X_a \sum S_a^2 \rho - X_b \sum S_a S_b \rho - X_c \sum S_a S_c \rho - \dots + \sum S_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ 1 \cdot \delta_b + L_b &= \sum S_b S_0 \rho - X_a \sum S_b S_a \rho - X_b \sum S_b^2 \rho - X_c \sum S_b S_c \rho - \dots + \sum S_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ 1 \cdot \delta_c + L_c &= \sum S_c S_0 \rho - X_a \sum S_c S_a \rho - X_b \sum S_c S_b \rho - X_c \sum S_c^2 \rho - \dots + \sum S_c \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ &= \dots\dots\dots \\ 1 \cdot \delta_n + L_n &= \sum S_n S_0 \rho - X_a \sum S_n S_a \rho - X_b \sum S_n S_b \rho - X_c \sum S_n S_c \rho - \dots + \sum S_n \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-11)$$

或は

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_a + L_a &= \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} \\ 1 \cdot \delta_b + L_b &= \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} \\ 1 \cdot \delta_c + L_c &= \sum P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} \\ &= \dots\dots\dots \\ 1 \cdot \delta_n + L_n &= \sum P_m \delta_{mn} - X_a \delta_{na} - X_b \delta_{nb} - X_c \delta_{nc} - \dots + \delta_{nt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-12)$$

上式に於て、支端堅固にして沈下なき場合は、 $1 \cdot \delta + L = 0$ である。既に此の聯立方程式より $X_a, X_b, X_c, \dots, X_n$ の値を解き得たとすれば、部材應力 S は

$$S = S_0 - X_a \cdot S_a - X_b \cdot S_b - X_c \cdot S_c - \dots - X_n \cdot S_n \quad \dots\dots\dots (3-13)$$

より求むることが出来る。

2) 充腹構造の弾性方程式

第 3-12 式は、之を直ちに充腹構造に適用し得るのである。而して δ に關する諸値は

第 2-23 式の可能変形法則に依り次のやうにして求める事が出来る。

充腹構造の任意點の曲げモーメント, 推力, 剪斷力は夫々

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - M_a \cdot X_a - M_b \cdot X_b - M_c \cdot X_c \dots\dots\dots \\ N &= N_0 - N_a \cdot X_a - N_b \cdot X_b - N_c \cdot X_c \dots\dots\dots \\ Q &= Q_0 - Q_a \cdot X_a - Q_b \cdot X_b - Q_c \cdot X_c \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-14)$$

たるべく, M, N, Q に於て下記號 $0 \cdot a \cdot b \cdot c \dots\dots$ を附したものは, $X=0, X_a=-1, X_b=-1, X_c=-1 \dots\dots$ なる荷重状態の M, N, Q の値を示す。然るときは第 2-23 式に於て温度變化の影響を除外すれば

$$\Sigma P \cdot \delta = \int M \cdot \Delta d\theta + \int N \cdot \Delta ds + \int Q \cdot \varphi ds$$

に於て, 實際荷重状態 ($X=0$) 及び $X_a=-1$ に依る變形状態を採れば

$$\Sigma P_m \cdot \delta_{ma} = \int M_0 \cdot \Delta d\theta_a + \int N_0 \cdot \Delta ds_a + \int Q_0 \cdot \varphi \cdot ds_a$$

且つ $\Delta d\theta_a = \frac{M_a}{EI} \cdot ds; \Delta ds_a = \frac{N_a}{EA} ds; \varphi ds_a = \frac{Q_a}{GA} ds$

依て $\Sigma P_m \cdot \delta_{ma} = \int M_0 M_a \frac{ds}{EI} + \int N_0 N_a \frac{ds}{EA} + \int Q_0 Q_a \frac{ds}{GA}$

$P_m \cdot \delta_{mb}; P_m \cdot \delta_{mc}$ に対しても同様に求めることが出来る。即ち 第3-12 式に適用すべき各々の δ の値を列記すれば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma P_m \cdot \delta_{ma} &= \int M_0 M_a \frac{ds}{EI} + \int N_0 N_a \frac{ds}{EA} + \int Q_0 Q_a \frac{ds}{GA} \\ \Sigma P_m \cdot \delta_{mb} &= \int M_0 M_b \frac{ds}{EI} + \int N_0 N_b \frac{ds}{EA} + \int Q_0 Q_b \frac{ds}{GA} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-15)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} &= \int M_a^2 \frac{ds}{EI} + \int N_a^2 \frac{ds}{EA} + \int Q_a^2 \frac{ds}{GA} \\ \delta_{bb} &= \int M_b^2 \frac{ds}{EI} + \int N_b^2 \frac{ds}{EA} + \int Q_b^2 \frac{ds}{GA} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-16)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ab} &= \int M_a M_b \frac{ds}{EI} + \int N_a N_b \frac{ds}{EA} + \int Q_a Q_b \frac{ds}{GA} \\ \delta_{bc} &= \int M_b M_c \frac{ds}{EI} + \int N_b N_c \frac{ds}{EA} + \int Q_b Q_c \frac{ds}{GA} \\ \delta_{ab} &= \delta_{ba} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-17)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} &= \int M_a \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot \frac{ds}{h} + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \\ \delta_{bb} &= \int M_b \cdot \varepsilon \cdot \Delta t \cdot \frac{ds}{h} + \int N_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-18)$$

即ち充腹構造に於ける弾性方程式は第 3-12 式に第 3-15~3-18 式を適用したものである。従つて剪斷力影響を無視して次の形で示される。

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_a + L_a &= \int \frac{M_0 M_a}{EI} ds + \int \frac{N_0 N_a}{EA} ds - X_a \left[\int \frac{M_a^2}{EI} ds \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{N_a^2}{EA} ds \right] - X_b \left[\int \frac{M_a M_b}{EI} ds + \int \frac{N_a N_b}{EA} ds \right] \\ &\quad - X_c \left[\int \frac{M_a M_c}{EI} ds + \int \frac{N_a N_c}{EA} ds \right] - \dots\dots \\ &\quad + \int M_a \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_a \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \\ 1 \cdot \delta_b + L_b &= \int \frac{M_0 N_b}{EI} ds + \int \frac{N_0 N_b}{EA} ds - X_a \left[\int \frac{M_b M_a}{EI} ds \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{N_b N_a}{EA} ds \right] - X_b \left[\int \frac{M_b^2}{EI} ds + \int \frac{N_b^2}{EA} ds \right] \\ &\quad - X_c \left[\int \frac{M_b M_c}{EI} ds + \int \frac{N_b N_c}{EA} ds \right] - \dots\dots \\ &\quad + \int M_b \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_b \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \end{aligned} \right\} \dots\dots (3-19)$$

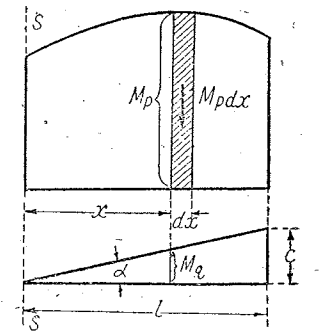
以上の式の中に含まれる $\int M_a M_b ds; \int M_b M_c ds \dots\dots$ は一般には $\int M_p M_q ds$ なる形で示されるのであるが, M_p 及び M_q を普通實際に屢々生じ得べき次の形に分解して考へれば, 其の積分を甚だ容易にすることができる。

(1) M_p 圖は任意にして, M_q 圖は三角形なる場合 (第 3-3 圖)。

$$M_q = \frac{e \cdot x}{l}; \frac{c}{l} = \tan \alpha$$

$$\int M_p \cdot M_q \cdot dx = \int_0^l M_p \frac{c \cdot x}{l} dx = \frac{c}{l} \int_0^l M_p \cdot dx \cdot x$$

$$\int_0^l M_p dx \cdot x = M_p \text{ 圖の } S-S \text{ 軸に対する 1 次率} = S_0$$



第 3-3 圖

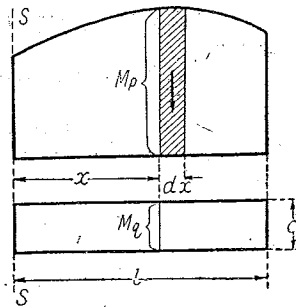
$$\int M_p M_q dx = S_0 \tan \alpha \dots \dots \dots (3-20)$$

(2) M_p 圖は任意にして, M_q 圖は矩形なる場合 (第 3-4 圖)

$$\int M_p \cdot M_q dx = \int M_p \cdot c \cdot dx = c \int_0^l M_p \cdot dx$$

$$\int_0^l M_p \cdot dx = M_p \text{ の面積圖} = A_0$$

$$\int M_p \cdot M_q dx = c \cdot A_0 \dots \dots \dots (3-21)$$



第 3-4 圖

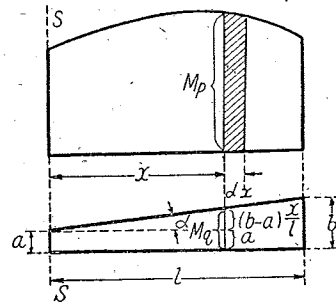
(3) M_p 圖は任意にして, M_q 圖は梯形なる場合 (第 3-5 圖)

$$M_q = (b-a) \frac{x}{l} + a$$

$$\int M_p \cdot M_q \cdot dx = \int_0^l M_p \left[a + (b-a) \frac{x}{l} \right] dx$$

$$= a \int_0^l M_p \cdot dx + \frac{b-a}{l} \int_0^l M_p \cdot x \cdot dx$$

$$\int M_p M_q \cdot dx = a \cdot A_0 + S_0 \tan \alpha \dots \dots \dots (3-22)$$



第 3-5 圖

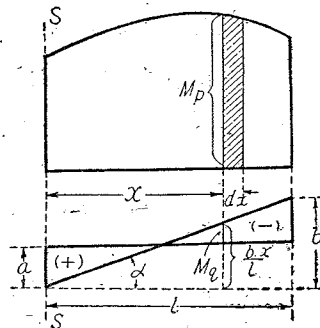
(4) M_p 圖は任意にして, M_q は直線的に正負の變化ある圖形の場合 (第 3-6 圖)

$$M_q = a - \frac{b \cdot x}{l}$$

$$\int M_p M_q \cdot dx = \int M_p \left(a - \frac{b \cdot x}{l} \right) dx$$

$$= a \int_0^l M_p dx - \frac{b}{l} \int_0^l M_p \cdot dx \cdot x$$

$$\int M_p \cdot M_q \cdot dx = a \cdot A_0 - S_0 \tan \alpha \dots \dots \dots (3-23)$$



第 3-6 圖

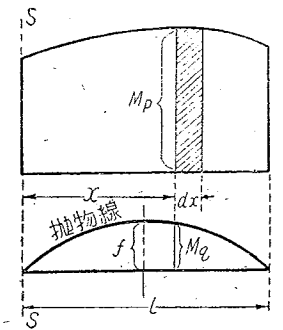
(5) M_p 圖は任意にして, M_q 圖は拋物線となすとき, 其の一 (第 3-7 圖)

$$\int M_p M_q \cdot dx = \int_0^l M_p \frac{4f}{l^2} x(l-x) dx$$

$$= \frac{4f}{l^2} \left[l \int_0^l M_p \cdot dx \cdot x - \int_0^l M_p \cdot dx \cdot x^2 \right]$$

$$\int_0^l M_p \cdot dx \cdot x^2 = (M_p \text{ 圖の } S-S \text{ 軸に対する慣性モーメント}) = J$$

$$\int M_p \cdot M_q \cdot dx = \frac{4f}{l^2} (S_0 \cdot l - J) \dots \dots \dots (3-24)$$



第 3-7 圖

(6) 同上の場合, 其二 (第 3-8 圖)

$$\int M_p M_q dx = \int_0^l M_p \frac{cx^2}{l^2} dx = \frac{c}{l^2} \int_0^l M_p \cdot dx \cdot x^2$$

$$\int M_p \cdot M_q \cdot dx = \frac{c}{l^2} J \dots \dots \dots (3-25)$$

(7) M_p 圖の任意なる場合の $\int M_p^2 \cdot dx$ (第 3-8 圖上圖)。

$$\int M_p^2 \cdot dx = 2 \int M_p \cdot dx \cdot \frac{M_p}{2}$$

$$\int_0^l M_p \cdot dx \cdot \frac{M_p}{2} = (M_p \text{ 圖の底邊に対する面積}$$

$$1 \text{ 次率}) = S$$

$$\int M_p^2 \cdot dx = 2S \dots \dots \dots (3-26)$$

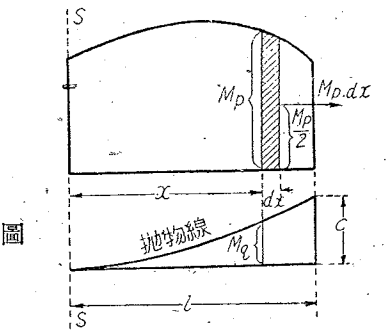
以上の諸式に含まれたる慣性モーメントの値次の如し (第 3-9 圖)。

a) $J_i = \frac{cl^3}{4}$; $J_r = \frac{cl^3}{12}$; b) $J_i = J_r = \frac{cl^3}{3}$

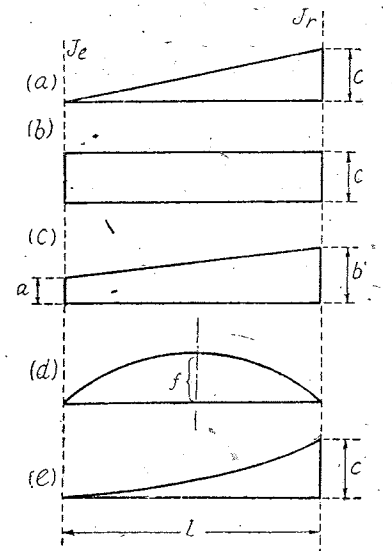
c) $J_i = (a+3b) \frac{l^3}{12}$; $J_r = (3a+b) \frac{l^3}{12}$

d) $J_i = J_r = \frac{fl^3}{5}$

e) $J_i = \frac{cl^3}{5}$; $J_r = \frac{cl^3}{30}$



第 3-8 圖



第 3-9 圖

§ 3. 変形仕事に於けるカステリアノの定理

1) カステリアノ第一定理

茲に初應力なく且つ支點不動なる弾性構造物あり、之に温度變化の影響なしとせば、その構造物の變形に於てなされる、實際の仕事はクラベイロンの法則 (2-27) に依り

$$W = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{EA} s + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} ds + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA} ds + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{GA} ds$$

此の構造物の可能變形の仕事は

$$\sum P \cdot \delta = \sum S \cdot \Delta s + \int M \cdot \Delta d\theta + \int N \cdot \Delta s + \int Q \cdot \varphi ds$$

にして、之に對し $P_m = 1$ なる實際荷重状態及び實際變位状態を探れば、

$$1 \cdot \delta_m = \sum S_m \cdot \Delta s + \int M_m \cdot \Delta d\theta + \int N_m \cdot \Delta ds + \int Q_m \cdot \varphi ds$$

$$1 \cdot \delta_m = \sum S_m \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{M_m M}{EI} ds + \int \frac{N_m N}{EA} ds + \int \frac{Q_m Q}{GA} ds \dots (3-27)$$

而して $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots, P_n$ なる荷重群に依りて構造物に生ずべき部材應力, 曲げモーメント, 軸應力, 剪斷力を夫々 S, M, N 及び Q となし, 且 $P_1=1, P_2=1, \dots, P_m=1, \dots, P_n=1$ に依る夫等の値を, 例へば S に對しては $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots, S_n$ とすれば, *Superposition* の法則に依つて

$$S = S_1 P_1 + S_2 P_2 + \dots + S_m P_m + \dots + S_n P_n$$

$$M = M_1 P_1 + M_2 P_2 + \dots + M_m P_m + \dots + M_n P_n$$

$$N = N_1 P_1 + N_2 P_2 + \dots + N_m P_m + \dots + N_n P_n$$

$$Q = Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + \dots + Q_m P_m + \dots + Q_n P_n$$

之を P_m に就きて偏微分すれば,

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = S_m; \frac{\partial M}{\partial P_m} = M_m; \frac{\partial N}{\partial P_m} = N_m; \frac{\partial Q}{\partial P_m} = Q_m$$

之を第 3-27 式に代入すれば,

$$1 \cdot \delta_m = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial Q}{\partial P_m} \cdot \frac{Q}{GA} ds \dots (3-28)$$

之に反して第 2-27 式を P_m にて偏微分せば

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial Q}{\partial P_m} \cdot \frac{Q}{GA} ds \dots (3-29)$$

此の兩式から

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \delta_m \dots (3-30)$$

即ち、支點不動なる構造に於て、 P_m の作用點 m の P_m の方向に於ける變位 δ_m は、實際變形仕事を P_m に依りて偏微分せるものに等し、之をカステリアノの第一定理と云ふ。*

此の定理は支點に沈下あり、温度變化に依る伸縮ある場合にも成立するのである。温度變化のある場合は後に述ぶべきにより、支點沈下のある場合につきて論ずるに、構造がトラスのみより成るときは $\bar{P}_m = 1$ なる假想荷重状態及び實際變形状態に對する仕事は

$$1 \cdot \delta_m = \sum \bar{S} \cdot \Delta s - L = \sum \bar{S} \cdot \Delta s - \sum \bar{C} \cdot c$$

但し、 \bar{S} 及び \bar{C} は $\bar{P}_m = 1$ に依る部材應力 S_m 及び支點反力 C_m を示し、 c は支點の實際變位を示す。

$$S = S_1 P_1 + S_2 P_2 + \dots + S_m P_m + \dots$$

$$C = C_1 P_1 + C_2 P_2 + \dots + C_m P_m + \dots$$

$$S_m = \bar{S} = \frac{\partial S}{\partial P_m}; C_m = \bar{C} = \frac{\partial C}{\partial P_m}; \Delta s = \frac{S \cdot s}{EA}$$

$$\therefore 1 \cdot \delta_m = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} - \sum \frac{\partial C}{\partial P_m} \cdot c$$

然るに實際變形仕事は

$$W' = \frac{1}{2} \sum S^2 \frac{s}{EA} - \sum C \cdot c$$

$$\frac{\partial W'}{\partial P_m} = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} - \sum \frac{\partial C}{\partial P_m} \cdot c$$

即、此の場合に於ても、 $\delta_m = \frac{\partial W'}{\partial P_m}$ は成立する。

2) カステリアノ第二定理——最小仕事の原理

* 此の定理は m 點に作用する P_m が零の場合にも尚 δ_m を求むるに應用し得。その場合には m 點に假想荷重 \bar{P} を與へ、 $\delta_m = \frac{\partial W'}{\partial \bar{P}} = \sum S' \cdot \rho \cdot \frac{\partial S'}{\partial \bar{P}}$; $S' = S + \bar{S} \cdot \bar{P}$, 茲に S は實際荷重に因る應力、 \bar{S} は $\bar{P} = +1$ に因る應力を示す。 $\frac{\partial S'}{\partial \bar{P}} = \bar{S}$ であるから、 $\delta_m = \sum (S + \bar{S} \cdot \bar{P}) \cdot \bar{S} = \sum S' \cdot \bar{S} \cdot \rho$

可能変形法則に於て、 $X_a = -1$ なる荷重状態及び實際変形状態を適用し、且つ X_a の作用點は不動なりとする。然らば、外的仕事は零であつて、

$$0 = \sum S_a ds + \int M_a \cdot d\theta + \int N_a \cdot ds + \int Q_a \cdot \varphi ds$$

$$= \sum S_a \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{M_a M}{EI} ds + \int \frac{N_a N}{EA} ds + \int \frac{Q_a Q}{GA'} ds$$

但し $S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b \dots\dots\dots$

$$M = M_0 - M_a X_a - M_b X_b \dots\dots\dots$$

$$N = N_0 - N_a X_a - N_b X_b \dots\dots\dots$$

$$Q = Q_0 - Q_a X_a - Q_b X_b \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_a} = -S_a; \quad \frac{\partial M}{\partial X_a} = -M_a; \quad \frac{\partial N}{\partial X_a} = -N_a; \quad \frac{\partial Q}{\partial X_a} = -Q_a$$

依つて

$$0 = \sum \frac{\partial S}{\partial X_a} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial X_a} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial X_a} \cdot \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial Q}{\partial X_a} \cdot \frac{Q}{GA'} ds$$

然るに、實際変形仕事の第 2—27 式を X_a にて偏微分すれば

$$\frac{\partial W}{\partial X_a} = \sum \frac{\partial S}{\partial X_a} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial X_a} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial X_a} \cdot \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial Q}{\partial X_a} \cdot \frac{Q}{GA'} ds$$

故に $\frac{\partial W}{\partial X_a} = 0$ なるを知る。一般には

$$\frac{\partial W}{\partial X_a} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial X_b} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial X_c} = 0; \quad \dots\dots\dots (3-31)$$

本式は實際変形仕事 W が不静定未知量 X に依りて最大或は最小の値を有すべきを示す。

然るに

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X_a^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X_b^2} > 0 \dots\dots\dots$$

なるにより、最小の値を有するを知る。依つて、不静定未知量 X は内力のなす實際変形仕事をして最小ならしむる値を有す。之を最小仕事の原理 (*Principle of least work*) と謂ふ。

カステリアノ定理の第一は、英國に於て天文學者グリーンが既に此の趣旨を利用してゐたが、之を弾性構造物に於ける一大定理として築き上げたのは伊太利人カステリアノであつて、又、第二定理は第一定理に比して古くから一般に知られ、ヴェーヌ、カルノオ等は此の問題を研究し、而して新弾性定理として此の最小仕事の原理を提唱したのはメナブレ

アである。メナブレアの理論は不完全であつたために多くの人の顧みる處とならず、1875 年カステリアノに依つて體系的に纏められてから**、此の二つの定理は技術界に廣く利用せらるゝに至つたのである。

カステリアノの定理の中、第一定理は外力の作用點が變位する場合を稱し、可能變位法則とは根本を異にしてゐるが、可能變位法則に於ける M_m, N_m, Q_m はカステリアノ定理に於て、 $\frac{\partial M}{\partial P_m}, \frac{\partial N}{\partial P_m}, \frac{\partial Q}{\partial P_m}$ なる形式に依つて示され、結局カステリアノ定理は、可能變形法則と同じき効用を有し、第二定理は外力の作用點が不動であつて、即 $\delta_m = 0$ なる特別の場合を論じてゐるのである。

カステリアノの定理に基く公式 3—30, 3—31 式は、一般弾性方程式 (第 3—12 式) と相並んで、弾性構造の不静定應力を解くのに廣く用ひられてゐる。カステリアノの公式は、各部の撓度を求める爲の煩雜なる手数を必要としないから、簡單なる充腹構造 (抗曲材) の場合に多く使用されるのであるが、部材の多いときは其の實際仕事を求めることが相當の手数を必要とするので、トラスの場合には一般弾性方程式 (第 3—12 式) を用ゐるを普通とする。

3) 温度變化の影響

カステリアノの第一及び第二定理は温度變化の影響ある場合にも成立する。温度變化に依る伸縮を考へた實際変形仕事は、

$$W = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 s}{EA} + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} \cdot ds + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA} ds + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{GA'} ds + \sum S \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s + \int M \cdot \varepsilon \cdot \frac{dt}{h} \cdot ds + \int N \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds \dots\dots (3-32)$$

之を荷重 P_m で偏微分すれば、

$$\frac{\partial W}{\partial P_m} = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \frac{N}{EA} ds + \int \frac{\partial Q}{\partial P_m} \cdot \frac{Q}{GA'} ds + \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot \frac{dt}{h} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

* Ména-bréa. "Nouveau principe sur la distribution des tensions". 1858.

** Castigliano. "Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques". 1879, 此の書には英譯書がある。

可能変形法則に於て $P_m=1$ なる仮想荷重状態及び實際變位状態を探れば

$$1 \cdot \delta_m = \sum \bar{S} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}N}{EA} ds + \int \frac{\bar{Q}Q}{GA'} ds$$

$$+ \sum \bar{S} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s + \int \bar{M} \cdot \varepsilon \cdot \frac{4t}{h} ds + \int \bar{N} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s$$

$$\bar{S} = S_m = \frac{\partial S}{\partial P_m}; \bar{M} = M_m = \frac{\partial M}{\partial P_m}; \bar{N} = N_m = \frac{\partial N}{\partial P_m}; \bar{Q} = Q_m = \frac{\partial Q}{\partial P_m}$$

依て,

$$1 \cdot \delta_m = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{S \cdot s}{EA} + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \frac{M}{EI} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \frac{N}{EA} ds$$

$$+ \int \frac{\partial Q}{\partial P_m} \cdot \frac{Q}{GA'} ds + \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s + \int \frac{\partial M}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot \frac{4t}{h} ds + \int \frac{\partial N}{\partial P_m} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot ds$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial P_m} &= \delta_m \\ &= 0 \quad (\delta_m = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-33)$$

即ち、同結果を得るのである。

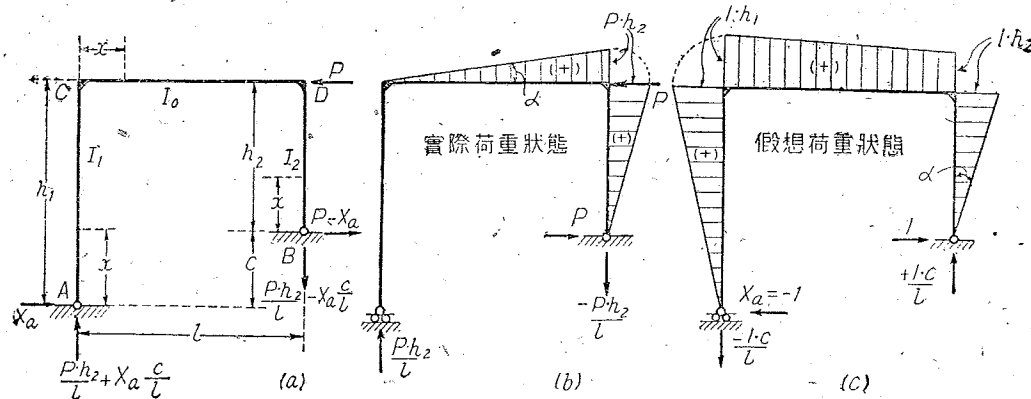
§ 4. 不静定構造解法例題

以上に論じた諸項の内容を明にし且つ之の適用方法を會得する意味に於て、次に二、三の例題を掲げる。

[例題 1] 單徑間ラーメンの水平反力を不静定値としてその大きさを求む (第 3-10 圖)。

1) 一般弾性方程式に依る解法

左側支點を可動支點 (反力棒 1 個) と考へたものを静定主系として選び、仮想荷重として左側支點に $X_a = -1$ を作用させる。而して支點は不動、溫度變化なく、軸應力及び剪



第 3-10 圖

斷力の變形に及ぼす影響は微量であるを普通とするので之等の影響を無視する。第 3-12 式から $P=1$ に對して

$$0 = 1 \cdot \delta_{m1} - X_a \cdot \delta_{aa}, \text{ 或は } X_a = \frac{1 \cdot \delta_{m1}}{\delta_{aa}} = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{EI_0 \delta_{ma}}{EI_0 \delta_{aa}}$$

第 3-15 式から,

$$EI_0 \delta_{ma} = \int M_0 M_a dx \frac{I_0}{I}; \quad EI_0 \delta_{aa} = \int M_a^2 dx \frac{I_0}{I}$$

M_0 は静定主系に P のみ作用する場合 ($X_a=0$) の各點曲げモーメントであつて、之が圖は (b) に示す通りである、 M_a は静定主系に $X_a=-1$ のみ作用する場合 ($P=0$) の各點曲げモーメントであつて、之が圖は (c) に示す通りである (第 3-10 圖)。然るときは、之に第 3-20 式以下に示す算法を利用して、*

$$EI_0 \delta_{ma} = \left[h_2 l \frac{l}{2} + (h_1 - h_2) \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} l \right] P \frac{h_2}{l} + Ph_2 \left(\frac{h_2}{2} \right) \frac{2}{3} h_2 \left(\frac{h_2}{h_2} \right) \left(\frac{I_0}{I_2} \right)$$

$$= \left[h_2 \frac{l}{2} + (h_1 - h_2) \frac{l}{6} \right] P \cdot h_2 + \frac{I_0}{I_2} P \frac{h_2^3}{3}$$

$$EI_0 \delta_{aa} = \left(\frac{I_0}{I_1} \right) \frac{2h_1 \left(\frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{3} \right)}{2S} + \left(\frac{I_0}{I_2} \right) \frac{2h_2 \left(\frac{h_2}{2} \right) \left(\frac{h_2}{3} \right)}{2S}$$

$$+ 2 \left[h_2 \left(\frac{h_2}{2} \right) + (h_1 - h_2) \left(\frac{l}{2} \right) \left\{ h_2 + (h_1 - h_2) / 3 \right\} \right] \frac{1}{2S}$$

$$= \left(\frac{I_0}{I_1} \right) \left(\frac{h_1^3}{3} \right) + \left(\frac{I_0}{I_2} \right) \left(\frac{h_2^3}{3} \right) + \left(\frac{l}{3} \right) (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)$$

$$X_a = \frac{EI_0 \delta_{m1}}{EI_0 \delta_{aa}} = \frac{Ph_2}{2} \cdot \frac{l(2h_2 + h_1) + 2 \left(\frac{I_0}{I_2} \right) h_2^2}{h_1^3 \left(\frac{I_0}{I_1} \right) + h_2^3 \left(\frac{I_0}{I_2} \right) + l(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)}$$

2) カステリアノの定理に依る解法

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds; \quad \frac{\partial W}{\partial X} = \int \frac{\partial M}{\partial X} \cdot \frac{M}{EI} ds = 0 \dots\dots (\text{最小仕事の原理})$$

實際の計算にあつては $\int \frac{\partial M}{\partial X} \cdot \frac{I_0}{I} M ds = 0$ とした方が計算が容易である。

* EI_0 を特に乗じたのは、實際構造物に本法を適用する場合に、數字の取扱ひが比較的容易となるからである。

最初に各部分の曲げモーメントを明にする。

柱 AC..... $M = X_a \cdot x$; $\frac{\partial M}{\partial X_a} = x$

梁 CD..... $M = \left(\frac{Ph_2}{l} + X_a \cdot \frac{c}{l}\right)x - X_a \cdot h_1$; $\frac{\partial M}{\partial X_a} = \frac{c}{l}x - h_1$

柱 DB..... $M = (P - X_a)x$; $\frac{\partial M}{\partial X_a} = -x$

依つて

$$0 = \int \frac{\partial M}{\partial X_a} \cdot \frac{I_0}{I} M dx = \frac{I_0}{I_1} \int_0^{h_1} X_a \cdot x \cdot x \cdot dx + \int_0^l \left[\left(\frac{Ph_2}{l} + X_a \cdot \frac{c}{l} \right) x - X_a \cdot h_1 \right] \left(\frac{c}{l} x - h_1 \right) dx + \frac{I_0}{I_2} \int_0^{h_2} (P - X_a) x (-x) dx$$

$$= \frac{I_0}{I_1} X_a \cdot \frac{h_1^3}{3} + \frac{Ph_2}{l} \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{l^3}{3} + X_a \cdot \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{l^3}{3} - X_a \cdot h_1 \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{Ph_2}{l} \cdot h_1 \cdot \frac{l^2}{2} - X_a \cdot \frac{c}{l} \cdot h_1 \cdot \frac{l^2}{2} + X_a \cdot h_1^2 l - \left(\frac{I_0}{I_2} \right) P \left(\frac{h_2^3}{3} \right) + \left(\frac{I_0}{I_2} \right) X_a \left(\frac{h_2^3}{3} \right)$$

之を整理すれば

$$X_a = Ph_2 \frac{h_1 \frac{l}{2} - \frac{c}{3} + \frac{I_0}{I_2} \cdot \frac{h_2^2}{3}}{\frac{I_0}{I_1} \cdot \frac{h_1^3}{3} + \frac{c^2 l}{3} - ch_1 l + h_1^2 l + \frac{I_0}{I_2} \cdot \frac{h_2^3}{3}}$$

式中 $h_1 - h_2 = c$ を代入すれば

$$X_a = \frac{Ph_2}{2} \cdot \frac{l(2h_2 + h_1) + 2h_2^2 \left(\frac{I_0}{I_2} \right)}{\left(\frac{I_0}{I_1} \right) h_1^3 + \left(\frac{I_0}{I_2} \right) h_2^3 + l(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)}$$

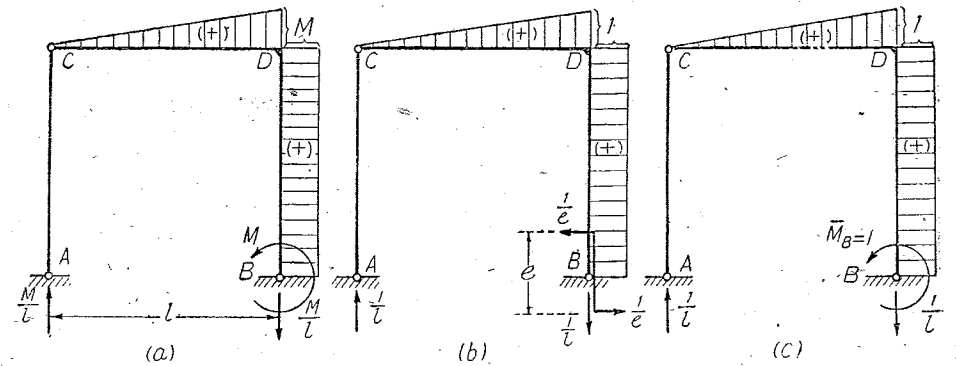
附言： 何れの方法が捷徑を與へるかは構造物の種類によつて異なる。カスティリアノの定理を用いれば甚だ機械的に解き得るのであつて、本例のやうな一次不静定充腹構造の場合には仕事の方程式が簡単であるから操作は容易である。然し乍ら構造がトラスから出来てゐるやうな場合には決して簡単ではない。トラスの場合には複雑化を避ける爲に稍近似的であるが、腹部材の伸縮影響を無視して之を梁（充腹構造）と同一に考へカスティリアノの定理を用いることがある。

【例題2】 第3-11圖に示す構造は A, B 及 C に於てヒンジ結合, D に於て剛結合せられてゐる。支點 B に M なるモーメントを作用せしめたときの柱 BD の B 點に於ける撓角を求む。

本構造は中間の C にヒンジが在つて静定構造である。與へられた M なるモーメントによる反力は A 點及び B 點に於てそれぞれ $\frac{M}{l}$ であり（その方向に注意を要す）、各部に

生ずる曲げモーメントは (a) 圖に示す通りである。

B 點の部材撓角を求める爲には $\bar{M}_B = 1$ なる假想モーメントを作用させる。 $\bar{M}_B = 1$ を作



第 3-11 圖

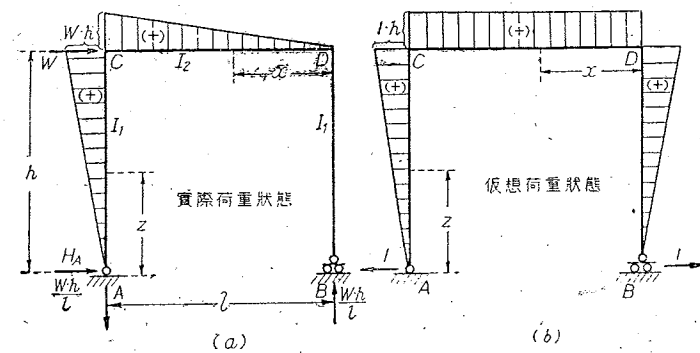
用させる事は (b) 圖に示すやうに B 點に於いて部材に長さ e なる棒を剛結し之の兩端に $\frac{1}{e}$ なる假想力を作用させた事と同じである。此の偶力に因る A, B 兩點の反力は共に $\frac{1}{l}$ である。従つて此の假想力による假想モーメント \bar{M} は (b) 圖に示した形となる。かくして M 及び \bar{M} を知れば、

$$1. \tau_B = \int \frac{M \bar{M}}{EI} ds$$

から B 點の撓角 τ_B が求められる（茲には、N, Q 及び温度變化の影響を無視してゐる）。

(c) 圖は (b) 圖の略圖であるが、反力を求める際は (b) 圖を畫いた方が解り易いので茲には特に (b) 圖を挿入したのである。

【例題3】 第3-12圖に示す構造は支點 A はヒンジ、支點 B は水平方向に移動し得



第 3-12 圖

るものとする。C 點に作用する水平荷重 W によつて支點 B は如何程移動するか？

本構造は靜定構造である。支點 A で $\Sigma M=0$ の式を作れば、

$$W \cdot h - B \cdot l = 0 \quad \therefore B = W \frac{h}{l}$$

$\Sigma V=0$ から、 $A = -W \frac{h}{l}$ なること明である。支點 A には水平反力が生ずる。この反力は $\Sigma H=0$ から $H_A = -W$ なること勿論である。既に反力が解れば、各部の曲げモーメントは容易に求められ其の結果は圖に圖示した通りとなつて、 $M_z = -W \cdot z$; $M_x = W \frac{h}{l} x$

次に B 點の移動する方向に 1 なる假想荷重を作用させれば、之によつて A 點に 1 なる反力が生じ、各部の曲げモーメント \bar{M} は (b) 圖に圖示した通りとなつて、

$$\bar{M}_z = 1 \cdot z; \quad \bar{M}_x = 1 \cdot h$$

1 なる假想荷重状態及び實際荷重 W による變形状態を探れば、第 2-23 式に於てモーメントの影響だけを考へるとき、

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_B &= \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds = \frac{W}{EI_1} \int_0^h z^2 dz + \frac{W}{EI_2} \cdot \frac{h^2}{l} \int_0^l x dx \\ &= \frac{W}{EI_1} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{W}{EI_2} \cdot \frac{h^2}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \\ &= \frac{W \cdot h^2}{6E} \left(\frac{2h}{I_1} + \frac{3l}{I_2} \right) \end{aligned}$$

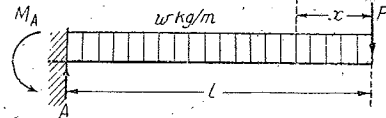
【例題 4】 支間 l なる片持梁の先端に集中荷重 P あり且つ w kg/m なる等分布荷重の満載せられるときの先端の撓みをカステリアノの定理によりて求めよ (第 3-13 圖)。

$$\begin{aligned} \text{實際仕事 } W &= \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(P \cdot x + \frac{1}{2} wx^2 \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 l^3}{3} + \frac{Pwl^4}{4} + \frac{wl^5}{20} \right) \end{aligned}$$

P の作用點の撓みはカステリアノの第一定理によつて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial P} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{2Pl^3}{3} + \frac{wl^4}{4} \right) = \delta \\ \delta &= \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{wl^4}{8EI} \end{aligned}$$

【例題 5】 支間 l なる片持梁が w kg/m なる満載等分荷重を受けるときの先端の曲げモーメントに因る撓角を求む。



第 3-13 圖

先端に $\bar{M}=1$ なる假想モーメントを作用させる。然るときは

$$1 \cdot \varphi = \frac{1}{EI} \int \bar{M}M dx = \frac{1}{EI} \int \frac{1}{2} wx^2 \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{6EI} wl^3 \text{ ラジアン}$$

【例題 6】 支間 100cm なるコンクリートの片持梁の先端に 200 kg なる集中荷重ある場合、先端のモーメント並に剪断力に因る撓みを可能變形法則に依つて求む。但し、梁の断面 = $30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$ 。

$$I = \frac{1}{12} 30 \times 30^3 = 67,500 \text{ cm}^4; \quad A' = 900 \times 0.9 = 800 \text{ cm}^2; \quad E = 210,000 \text{ kg/cm}^2$$

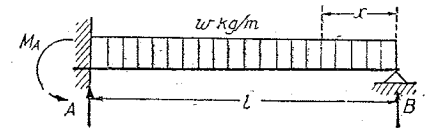
$$G = 80,000 \text{ kg/cm}^2; \quad M = 200x \text{ kg}\cdot\text{cm}; \quad \bar{M} = x \text{ kg}\cdot\text{cm}; \quad Q = 200 \text{ kg}; \quad \bar{Q} = 1 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx + \int_0^l \frac{\bar{Q}Q}{GA'} dx = \int_0^l \frac{200x^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{200}{GA'} dx \\ &= \frac{200 \times 100^3}{3 \times 210,000 \times 67,500} + \frac{200 \times 100}{80,000 \times 800} = 0.0047 + 0.0003 = 0.005 \text{ cm} \end{aligned}$$

茲に注意すべきはモーメントに因る撓みの方が遙に大なることであつて、剪断力に因る撓みは前者の約 6% に相當することである。

【例題 7】 一端は埋込 (固定)、他端は單に支えられてゐる支間 l なる一次不靜定梁に w kg/m の等分布荷重が満載されたとき、支點

反力及び固定端モーメントを求む (第 3-14 圖)。



第 3-14 圖

$$\text{反力 } \Sigma V = A + B - wl = 0$$

$$\text{モーメント } M = B \cdot x - \frac{1}{2} wx^2; \quad \frac{\partial M}{\partial B} = x$$

$$\text{實際仕事 } W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx; \quad \frac{\partial W}{\partial B} = 0$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial B} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(B \cdot x^2 - \frac{1}{2} wx^3 \right) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{B \cdot l^3}{3} - \frac{wl^4}{8} \right) = 0$$

$$\therefore B = \frac{3}{8} wl; \quad A = wl - B = \frac{5}{8} wl$$

固定端モーメントは、

$$M_A = B \cdot l - \frac{1}{2} wl^2 = -\frac{1}{8} wl^2$$

本問題は可能變位法則に因る弾性方程式を用ひても解くことが出来る。即ち支點 B の反力を X_a となし、靜定主系を片持梁となし、之に B 點に $X_a = -1$ なる假想荷重を作用させた状態を探るのである。かくの如き解法は後章に於て再び説明する。但し、本問題の場合は上掲の方法即ちカステリアノの定理 (最小仕事の原理) を用ゐる方が遙に簡單である。