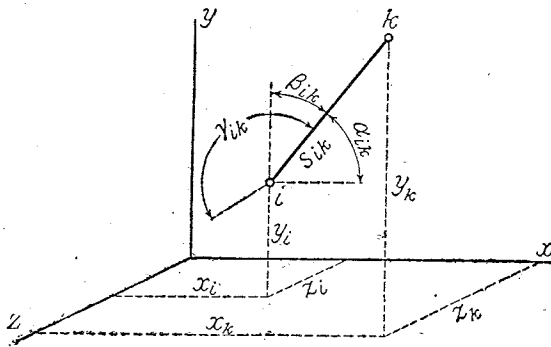


第 2 章 弾性變形に因りて爲さるゝ仕事

§ 1. トラス部材の變形

第 2—1 圖に示す ik はトラスの一部材であつて、此のトラスが外力その他の原因に依りて變形をなしたとき、格點 i 及び k の座標 (x_i, y_i, z_i) 及び (x_k, y_k, z_k) は夫々 $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ 及び $(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$ だけ移動せりと考えれば、部材 ik の原の長さ s_{ik} 及び變形せる長さ Δs_{ik} は次の式に依つて示される。



第 2—1 圖

$$\begin{aligned}
 s_{ik}^2 &= (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \\
 &\quad + (z_k - z_i)^2 \\
 (s_{ik} + \Delta s_{ik})^2 &= [(x_k + \Delta x_k) - (x_i + \Delta x_i)]^2 + [(y_k + \Delta y_k) - (y_i + \Delta y_i)]^2 \\
 &\quad + [(z_k + \Delta z_k) - (z_i + \Delta z_i)]^2 \\
 &= [(x_k - x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)]^2 \\
 &\quad + [(y_k - y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)]^2 \\
 &\quad + [(z_k - z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)]^2
 \end{aligned}$$

之等の式より

$$\begin{aligned}
 2 s_{ik} \Delta s_{ik} + \Delta s_{ik}^2 &= 2 (x_k - x_i) (\Delta x_k - \Delta x_i) + (\Delta x_k - \Delta x_i)^2 \\
 &\quad + 2 (y_k - y_i) (\Delta y_k - \Delta y_i) + (\Delta y_k - \Delta y_i)^2 \\
 &\quad + 2 (z_k - z_i) (\Delta z_k - \Delta z_i) + (\Delta z_k - \Delta z_i)^2
 \end{aligned}$$

橋梁其の他の實際構造物に使用せられるトラスの變形は、一般に其の原形に比し極めて微小であるから、上式に含まれたる Δs , Δx , Δy , Δz の二次の値は實用上省略し得べく、即ち、

$$\begin{aligned}
 s_{ik} \Delta s_{ik} &= (x_k - x_i) (\Delta x_k - \Delta x_i) + (y_k - y_i) (\Delta y_k - \Delta y_i) \\
 &\quad + (z_k - z_i) (\Delta z_k - \Delta z_i) \dots \dots \dots (2-1)
 \end{aligned}$$

部材 ik の x, y, z 各軸と交る角度を夫々 α_{ik} , β_{ik} , γ_{ik} とすれば

$$x_k - x_i = s_{ik} \cos \alpha_{ik}$$

$$y_k - y_i = s_{ik} \cos \beta_{ik}$$

$$z_k - z_i = s_{ik} \cos \gamma_{ik}$$

この関係を前式に入れれば

$$\Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik} \dots \dots \dots (2-2)$$

茲にトラス部材はフックの法則に従ふ弾體なりと考へ、且つ S_{ik} , E_{ik} , A_{ik} , ϵ_{ik} を夫々部材 ik の應力、弾性係數、斷面積、溫度伸縮係數とし、 t_{ik} を部材 ik の受くる溫度變化とすれば、第 2-2 式から

$$\Delta s_{ik} = \frac{S_{ik} \cdot s_{ik}}{E_{ik} \cdot A_{ik}} + \epsilon_{ik} \cdot t_{ik} \cdot s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik} \dots \dots \dots (2-3)$$

となる。(2-2) 及び (2-3) 式は荷重及び溫度變化に依りて變形せる弾性トラスの一部材に關する變形及び移動の關係を示し、斯くの如き等式はトラスの各部材毎に成立する。

§ 2. 可能仕事

$P_1, P_2, \dots, P_r, \dots, P_n$ なる諸力に作用せられた自由剛體が、或る原因に依り其の最初の位置より極めて微小なる距離 δ だけ可能變位をなしたとすれば、この物體は可能仕事を爲すのである。

茲に可能とは、實際的なると假想的なるとを問はず、爲し得べきことを云ふ。 δ の 3 軸 (x, y, z) に對する分長を夫々 $\bar{\delta}_x, \bar{\delta}_y, \bar{\delta}_z$ 、 P_r の 3 軸方向の分力を P_{rx}, P_{ry}, P_{rz} とする時は、此の剛體に作用する力 P によつてなされる仕事は

$$\sum_1^n P_{rx} \cdot \bar{\delta}_x; \sum_1^n P_{ry} \cdot \bar{\delta}_y; \sum_1^n P_{rz} \cdot \bar{\delta}_z$$

茲に δ の上端に付せる一は此の δ が可能なるを示す。

此の剛體が釣合状態にある限りに於ては

$$\sum_1^n P_{rx} = 0; \sum_1^n P_{ry} = 0; \sum_1^n P_{rz} = 0$$

であるから、

$$\sum_1^n P_{rx} \cdot \bar{\delta}_x = 0; \sum_1^n P_{ry} \cdot \bar{\delta}_y = 0; \sum_1^n P_{rz} \cdot \bar{\delta}_z = 0 \dots \dots \dots (2-4)$$

である。

此の剛體の任意軸に對する可能回轉の角速度を \bar{w} とし、一平面に在らざる 3 軸 (x, y, z) に關する之の分速度を $\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{w}_z$ とすれば dt 時間になさるゝ回轉量は

$$\bar{w}_x \cdot dt = \bar{\tau}_x; \bar{w}_y \cdot dt = \bar{\tau}_y; \bar{w}_z \cdot dt = \bar{\tau}_z$$

作用力 P の廻轉に依つてなさるゝ仕事は、モーメント M_{rx}, M_{ry}, M_{rz} に夫々 $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$ を乘じたるもの、即ち

$$\sum_1^n M_{rx} \cdot \bar{\tau}_x; \sum_1^n M_{ry} \cdot \bar{\tau}_y; \sum_1^n M_{rz} \cdot \bar{\tau}_z$$

を以て示され、此の剛體が釣合状態にある限りに於ては、

$$\sum_1^n M_{rx} = 0; \sum_1^n M_{ry} = 0; \sum_1^n M_{rz} = 0$$

依つて

$$\sum_1^n M_{rx} \cdot \bar{\tau}_x = 0; \sum_1^n M_{ry} \cdot \bar{\tau}_y = 0; \sum_1^n M_{rz} \cdot \bar{\tau}_z = 0 \dots \dots \dots (2-5)$$

を得る。

斯くして空間に於ける剛體の釣合に關しては、次の如く之れを云ひ得るのである。

- (1) 剛體に作用する總ての力が一平面内に在らざる 3 軸の方向の可能變位に因りて爲す仕事は零に等し。
- (2) 剛體に作用する總ての力が一平面内に在らざる 3 軸の周りの可能回轉に因りて爲す仕事は零に等し。

或は、剛體に作用する總ての力に因りてなさるゝ可能仕事の總和が零なる限り該物體は釣合状態に在り。之れを可能仕事の原理と云ふ。*

§ 3. 可能變形の法則

1) トラスの可能變形仕事

ある平面トラスの格點に任意方向の荷重が作用する場合に於て、若し釣合状態にあるときは任意格點 m に對して次の 2 式が成立する。

$$P_{xm} + \sum S \cdot \cos \alpha = 0; P_{ym} + \sum S \cdot \cos \beta = 0$$

茲に P_m は格點 m に作用する諸荷重(外力)の合力、 P_{xm} 及び P_{ym} は P_m の x 及び y 軸の方向への分力を示し、 S は格點 m を形成する部材の應力、 α, β は部材の x 軸、 y 軸に對する傾角を夫れ夫れ示す。

格點 m が m' の位置に移動したものと假想して、此の可能變位の x 及び y 軸の方向の分長を夫々 $\bar{\delta}_{xm}, \bar{\delta}_{ym}$ とすれば、可能變位の法則に依つて(第 2-4 式)、

$$(P_{xm} + \sum S \cdot \cos \alpha) \bar{\delta}_{xm} = 0; (P_{ym} + \sum S \cdot \cos \beta) \bar{\delta}_{ym} = 0$$

* Lagrange, J. L. "Mechanique analytique". 1788.

第 2-2 圖に於ける $P_{xm} = P_m \cdot \cos \varphi$ 及び $P_{ym} = P_m \cdot \cos \varphi'$ の関係を上式に代入し且つ合計すれば、

$$P_m(\bar{\delta}_{xm} \cdot \cos \varphi + \bar{\delta}_{ym} \cdot \cos \varphi') + \sum S \cdot \cos \alpha \cdot \bar{\delta}_{xm} + \sum S \cdot \cos \beta \cdot \bar{\delta}_{ym} = 0$$

然るに $\bar{\delta}_{xm} \cos \varphi + \bar{\delta}_{ym} \cos \varphi' = \bar{\delta}_m$ なるに依り

$$P_m \bar{\delta}_m + \sum S \cdot \cos \alpha \cdot \bar{\delta}_{xm} + \sum S \cdot \cos \beta \cdot \bar{\delta}_{ym} = 0$$

なる関係がある。

この関係は總ての格點に於て成立するが故に

其の合計は、

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum (\sum S \cdot \cos \alpha \cdot \bar{\delta}_{xm} + \sum S \cdot \cos \beta \cdot \bar{\delta}_{ym}) = 0 \dots\dots(2-6)$$

此式の第 2 項は、1 格點に集る部材應力の

和の x 及び y 軸に關する可能仕事

$(\sum S \cdot \cos \alpha \cdot \bar{\delta}_{xm} + \sum S \cdot \cos \beta \cdot \bar{\delta}_{ym})$ をトラス全體に亘つて合計したものである。本式は格點を元としないで部材を元としてトラス全體に總和しても同一の結果を得ること明である。即ち第 2-1 圖の部材 ik に於て、部材應力 S_{ik} が x 及 y 軸の方向になす可能仕事は、

$$S_{ik} \cos \alpha_{ik} \cdot \bar{\Delta x}_i + S_{ik} \cdot \cos \beta_{ik} \cdot \bar{\Delta y}_i$$

であつて、茲に $\bar{\Delta x}_i$ 及び $\bar{\Delta y}_i$ は夫れ夫れ格點 i の分變位 $\bar{\delta}_{xi}$ 及び $\bar{\delta}_{yi}$ を示すものである。

同様に k 點に於ける部材應力 S_{ki} のなす仕事は

$$S_{ki} \cdot \cos \alpha_{ki} \cdot \bar{\Delta x}_k + S_{ki} \cdot \cos \beta_{ki} \cdot \bar{\Delta y}_k$$

而して、之等の間には

$$S_{ik} = S_{ki}; \cos \alpha_{ik} = -\cos \alpha_{ki}; \cos \beta_{ik} = -\cos \beta_{ki}$$

なる関係がある。依つて一部材に關する和は、

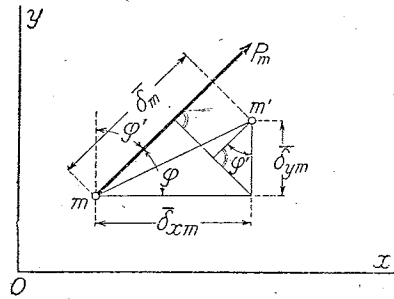
$$S_{ik} [(\bar{\Delta x}_i - \bar{\Delta x}_k) \cos \alpha_{ik} + (\bar{\Delta y}_i - \bar{\Delta y}_k) \cos \beta_{ik}]$$

であつて、之に對して第 2-2 式を代入すれば、 $-S_{ik} \bar{\Delta s}_{ik}$ となり、各部材に關する總和は $-\sum S \bar{\Delta s}$ によつて表はされる。既に第 2-6 式の第 2 項は $-\sum S_{ik} \bar{\Delta s}_{ik}$ たるべきであるから、トラス全體に對して

$$\sum P_m \bar{\delta}_m - \sum S \bar{\Delta s} = 0 \dots\dots(2-7)$$

$$\sum P_m \bar{\delta}_m = \sum S \bar{\Delta s} \dots\dots(2-8)$$

なる関係が成立する。而して上記と反對に、假想荷重及び之に基く應力を \bar{P}_m 及び \bar{S} と



第 2-2 圖

し、格點の實際變位及び部材の實際變長を δ_m 及び Δs とすれば、前式を得たと同様に

$$\sum \bar{P}_m \cdot \delta_m = \sum \bar{S} \cdot \Delta s \dots\dots(2-9)$$

なる関係が成立する。之等の等式に於て、 δ_m (或は $\bar{\delta}_m$) は P_m (或は \bar{P}_m) と同じ方向に向ふときは正、反對の方向に向ふときは負とする。

第 2-9 式に就いて考察するに、 δ_m は假想荷重 \bar{P}_m の作用點 m の \bar{P}_m の方向に測れる實際變位にして、 $\bar{P}_m \cdot \delta_m$ は m 點に作用する \bar{P}_m のなす仕事なり。茲に δ_m なる變位は必ずしも \bar{P}_m なる作用力に原因するものたるを要せず、即ち δ_m と \bar{P}_m との間には必然の因果關係がない。之に反して \bar{S} は假想荷重 \bar{P}_m に依て部材に生ずる假想應力であつて 1 格點に於て \bar{P}_m と \bar{S} とは釣合状態にある。 Δs はトラス格點が δ だけ變位するときこれに伴つて變化する部材の長さの變化量を示し、即ち Δs と δ とは同一の因果關係を有するのであるが、 \bar{S} と Δs とは必然の因果關係あるを必要としない。 $\bar{P}_m \cdot \delta_m$ を假想力 \bar{P}_m による可能仕事 (virtual work) と謂ひ、 $\bar{S} \cdot \Delta s$ は可能變形の仕事 (virtual work of deformation) と稱し、ミュウラア・ブレスラウは第 2-9 式を荷重状態 \bar{P} に對する仕事式と呼んでゐる。第 2-9 式により格點に作用する外力 \bar{P} 及び之れに依つて生ずる内力 \bar{S} のなす可能仕事の總和はトラスの變形が極めて微小なる限り零に等しいと謂ひ得べく、或は外力のなす可能仕事はトラスの可能變形の仕事に等しいと謂ひ得るのである。構造物に於ける弾性變形に關する上記の法則はモールの創むる所であつて、弾性構造物の變位を求め、或は不靜定構造物の應力を解くに極めて重要なものである。

第 2-8 式、或は第 2-9 式の成立すると同様にして、實際荷重 P_m 及び之に因つて惹き起さるゝ實際變位 δ_m に關し、次の關係も亦成立する。

$$\sum P_m \cdot \delta_m = \sum S \cdot \Delta s \dots\dots(2-10)$$

第 2-9 式に於て \bar{P}_m は外力を示す。外力を荷重と反力とに分けて考へ \bar{P}_m は荷重なりとなし、支點反力を \bar{C} となすとき、支點が反力の方向に c だけ移動するものと假定すれば

$$\sum \bar{P}_m \cdot \delta_m + \sum \bar{C} \cdot c = \sum \bar{S} \cdot \Delta s$$

今、

$$\sum \bar{C} \cdot c = L \text{ とすれば}$$

$$\sum \bar{P}_m \cdot \delta_m + L = \sum \bar{S} \cdot \Delta s \dots\dots(2-11)$$

更に溫度の變化があつて之がためにトラス部材は各々 $\epsilon \cdot l \cdot s$ だけ其の長さを變化する場

* Mohr, "Beitrag zur Theorie des Fachwerks". 1874 & 1875.

合を考えれば各部材は $\bar{S} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s$ なる可能仕事をなすから

$$\Sigma \bar{P}_m \cdot \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s + \Sigma \bar{S} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s - L \dots\dots(2-12)$$

但し ε は部材の温度変化に対する伸縮係数, t は温度変化度を示す。

可能変形の法則を應用して第 2-

3 圖に示す単純トラスの m 點の實際荷重に因る鉛直變位 δ_m を求めやうとするには、先づ實際荷重 P_1, P_2, \dots, P_5 に依る部材の應力 S を算出する。部材の應力 S 及び温度變化に依る長さの變化量は

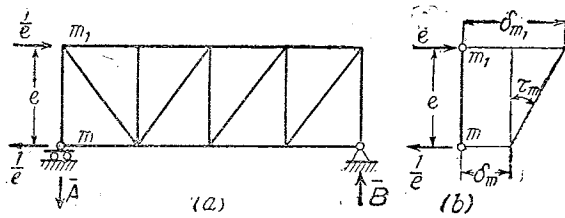
$$\Delta s = \frac{S \cdot s}{EA} + \varepsilon \cdot t \cdot s = S \cdot \rho + \varepsilon \cdot t \cdot s$$

茲に $\rho = \frac{s}{EA}$

次に問題の格點 m に、求めやうとする變位の方即ち鉛直なる方向に $\bar{P}_m=1$ なる假想荷重を載せ、之に依つて各部材に生ずべき應力 \bar{S} を計算に依り或はクレモナ圖に依り求める。然るときは可能變形の式は、 $\Sigma \bar{P} \cdot \delta_m = 1 \cdot \delta_m$ であるから

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \bar{S} \cdot S \cdot \rho + \Sigma \bar{S} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \dots\dots(2-13)$$

たるべく、右邊の値は計算することが出来るから、之より δ_m が求められる。可能變形の法則は、荷重による部材の方向の變化(角變化)を求むる場合にも適用することが出来る。第 2-4 圖に於て、端柱 m_1 の實際荷重に依る角變化 τ_m を求めるには、先づ實際荷重に依る各部材應力を算出する。次に端柱 m_1 の兩端に $\frac{1}{e}$ なる假想偶力を作用させるときは、端柱は $\bar{M} = \frac{1}{e} \times e = 1$ なる假想モーメントに作用されたこととなる。此の場合、偶力の方向は、 $\bar{M}=1$ に依る端柱の角變化が求めんとする τ_m と同符號たるが如く定める必要がある。同圖 (a) に於いて、 m_1 及び m の實際荷重に依る $\frac{1}{e}$ の方向の變位を



第 2-4 圖

δ_m, δ_{m_1} とすれば、此の假想偶力に依る可能仕事は $\frac{1}{e} (\delta_{m_1} - \delta_m)$ であつて、圖より明なるやうに $\frac{1}{e} (\delta_{m_1} - \delta_m) = \tau_m$ であるから、前記の可能仕事は $\frac{1}{e} (\delta_{m_1} - \delta_m) = 1 \cdot \tau_m$ であり、

之に相應する內的の可能仕事は $\Sigma \bar{S} \cdot \Delta s$ であるから

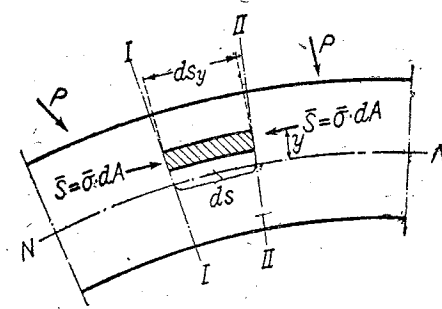
$$1 \cdot \tau_m = \Sigma \bar{S} \cdot \Delta s$$

茲に \bar{S} は假想偶力 $\frac{1}{e}$ に因る部材應力を示す。上式に温度變化の影響を入れれば、

$$1 \cdot \tau_m = \Sigma \bar{S} \cdot S \cdot \rho + \Sigma \bar{S} \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \dots\dots(2-14)$$

2) 充腹構造の可能變形仕事

可能變形の法則はトラスに適用せらるゝのみならず、直應力、曲げモーメント及び剪斷力に抵抗し得べき充腹構造 (Solid-web structure; vollwandige Tragwerk) にも亦適用されるのであるが、今、 $\Sigma P \cdot \delta = \Sigma S \cdot \Delta s$ の場合を説明する。



第 2-5 圖

充腹構造として第 2-5 圖に示す曲梁をとり、斷面 I-I, II-II は無限に接近せる直角斷面なりとし、又此の斷面間の部分を軸の方向に無限に數多に分ち、即ち此の部分は斷面 dA なる無数の部材より成れるものと考へる。

(a) 垂面應力及び温度變化に因る可能變形の仕事

充腹構造の微小材片の長さを ds_y とし、垂面應力(直應力)及び温度變化に因るその長さの變化を Δds_y とすれば

$$\Delta ds_y = \frac{\sigma}{E} ds_y + \varepsilon \cdot t \cdot ds_y$$

荷重 P に依つて生ずる垂面應力を S とせば $S = \sigma \cdot dA$ 、之による可能內的仕事は

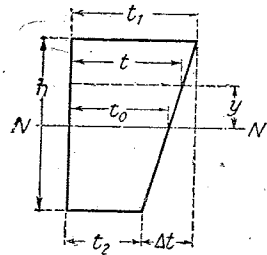
$$\left. \begin{aligned} dW &= \int S \cdot \Delta ds_y = \int S \left(\frac{\sigma}{E} ds_y + \varepsilon \cdot t \cdot ds_y \right) \\ &= \int \sigma \cdot dA \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon \cdot t \right) ds_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(2-15)$$

上式に於て 2 斷面間の距離は微小なるにつき、この間に垂面應力は變化せざるものと考へる。又此の式に於て $ds = ds_y$ とするも大差が無い。垂面應力 S は、 M を曲げモーメント、 N を軸推力とすれば

$$\bar{S} = \sigma \cdot dA; \quad \sigma = \frac{\bar{M}}{I} y + \frac{\bar{N}}{A}$$

$$S = \sigma \cdot dA; \quad \sigma = \frac{M}{I} y + \frac{N}{A}$$

温度変化は断面の上端と下端とに於て差あるものと假定し、且つ上端にて t_1 、下端にて



第 2-6 圖

t_2 、重心軸にて t_0 なりとし、之等の差は重心軸よりの距離に比例するものと假定すれば、第 2-6 圖に示すやうに重心より y なる距離にある部分の温度変化量は、

$$t = t_0 + \Delta t \frac{y}{h} \dots\dots\dots(2-16)$$

上記の関係を第 2-15 式に代入すれば

$$\begin{aligned} dW &= \int \left(\frac{M}{I} y + \frac{N}{A} \right) dA \left[\frac{\bar{M}}{EI} y + \frac{\bar{N}}{EA} + \epsilon \left(t_0 + \Delta t \frac{y}{h} \right) \right] ds \\ &= \frac{M}{EI} ds \left(\frac{\bar{M}}{I} \int y^2 dA + \frac{\bar{N}}{A} \int y \cdot dA \right) + \frac{N}{EA} ds \left(\frac{\bar{M}}{I} \int y \cdot dA + \frac{\bar{N}}{A} \int dA \right) \\ &\quad + \frac{M}{I} \epsilon \left(t_0 + \Delta t \frac{y}{h} \right) ds \int y dA + \frac{N}{A} \epsilon \left(t_0 + \Delta t \frac{y}{h} \right) ds \int dA \end{aligned}$$

式中

$$\int y^2 dA = I ; \int y dA = 0 ; \int dA = A$$

$$\begin{aligned} \therefore dW &= \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \frac{N\bar{N}}{EA} ds + M \cdot \epsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds + N \cdot \epsilon \cdot t_0 \cdot ds \\ &= M \left(\frac{\bar{M}}{EI} ds + \epsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds \right) + N \left(\frac{\bar{N}}{EA} ds + \epsilon \cdot t_0 \cdot ds \right) \end{aligned}$$

依つて、充腹構造全體の可能變形の仕事は、

$$W = \int M \left(\frac{\bar{M}}{EI} ds + \epsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds \right) + \int N \left(\frac{\bar{N}}{EA} ds + \epsilon \cdot t_0 \cdot ds \right) \dots\dots(2-17)$$

上式に於て

$$\begin{aligned} \frac{\bar{M}}{EI} ds &= \text{假想曲げモーメントに因る断面の角變化} \\ &= \overline{\Delta d\theta_m} \dots\dots\dots(2-18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} ds &= \text{不等温度變化に因る角變化} \\ &= \Delta d\theta_t \dots\dots\dots(2-19) \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{N}}{EA} ds = \text{假想軸推力に因る長さの變化} = \overline{\Delta ds_n}$$

$$\epsilon \cdot t_0 \cdot ds = \text{温度變化に因る長さの變化} = \Delta ds_t$$

$$\begin{aligned} \therefore W &= \Sigma P \cdot \bar{\delta} = \int M \cdot \overline{\Delta d\theta_m} + \int M \cdot \Delta d\theta_t + \int N \cdot \overline{\Delta ds_n} + \int N \cdot \Delta ds_t \\ &\quad \overline{\Delta d\theta_m} + \Delta d\theta_t = \overline{\Delta d\theta} \text{ 及び } \overline{\Delta ds_n} + \Delta ds_t = \overline{\Delta ds} \text{ とせば,} \end{aligned}$$

$$W = \Sigma P \cdot \bar{\delta} = \int M \cdot \overline{\Delta d\theta} + \int N \cdot \overline{\Delta ds} \dots\dots\dots(2-20)$$

上式は垂面應力に因る全内的仕事を示す。同様に、

$$W = \Sigma P \cdot \bar{\delta} = \int \bar{M} \cdot \Delta d\theta + \int \bar{N} \cdot \Delta ds \dots\dots\dots(2-21)$$

(b) 切面應力に因る可能變形の仕事

2 断面間の距離 ds は無限に小なるを以て各断面に作用する切面應力(剪断應力)は相等しと見做すことが出来る。

此の兩断面に於ける假想荷重に因る切面應力(剪断應力)を \bar{Q} とすれば(第 2-7 圖)、

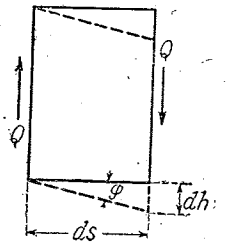
$$\bar{d}h = \bar{\varphi} ds = \frac{\bar{Q}}{GA} ds$$

茲に G は剪断力弾性係數、 A' は剪断力に抵抗すべき断面積とす。實際荷重によつて此の断面に作用する切面應力を Q とすれば、之に依つて爲さるゝ可能變形の仕事は

$$\begin{aligned} dW &= Q \cdot \bar{d}h = Q \cdot \bar{\varphi} \cdot ds \\ &= Q \cdot \frac{\bar{Q}}{GA} ds \end{aligned}$$

全體の可能變形の内的仕事は

$$W = \int Q \cdot \bar{\varphi} ds = \int Q \cdot \frac{\bar{Q}}{GA} ds \dots\dots(2-22)$$



第 2-7 圖

以上の (a) (b) の結果に依り、垂面應力、切面應力及び温度變化の作用に基く充腹構造の可能仕事は、

$$\begin{aligned} \Sigma P \cdot \bar{\delta} &= \int M \cdot \overline{\Delta d\theta} + \int N \cdot \overline{\Delta ds} + \int Q \cdot \bar{\varphi} \cdot ds \\ &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int \frac{Q\bar{Q}}{GA} ds + \int M \cdot \epsilon \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds + \int N \cdot \epsilon \cdot t_0 \cdot ds \end{aligned} \dots\dots(2-23)$$

にして、第 2-23 式はトラスの場合の第 2-8 式に對應すべきものである。第 2-23 式を實際構造物に適用するに當つては、剪断力のなす仕事は一般に甚だ小であるから無視するを普通とし、更に又推力 N のなす仕事は曲げモーメント M の爲す仕事に比べて小なることが多いから之を無視する場合がある。* 温度變化に関しては、特別の事情なき限り $\Delta t = 0$; $t_1 = t_2 = t_0 = t$ なりとするを普通とする。

* 之等の力の爲す變形仕事の大きさは、該構造物の形状に依つて差異がある。例へば扁平拱に於ては推力のなす仕事は決して小ならず、又拱矢の高い拱の剪断力仕事は推力仕事に匹敵する。

§ 4. 実際の仕事

1) トラスの実際仕事

實際荷重 P が弾性トラスに作用するに當つて、該荷重は極めて徐々に作用し、最初零であつて最後にその全量 P だけ作用するものとし、又之に従つて内力は最初零であつて最後にその全量 S となるものとし、且つ結構は釣合状態に在りと假定する。今、之等の外力及び内力の同時に於ける中間値を夫々 P_x 及び S_x なりとし、その瞬間に於ける變位及び長さの變化を夫々 $d\delta$ 及び dAs とするとき、その瞬間になさるゝトラス全體の變形の内の仕事は第 2-10 式によつて

$$dW = \sum S_x \cdot dAs$$

此の式は變形の行はれつゝある各瞬間時に成立するから、最後迄になさるゝ實際變形の仕事の全量 W は

$$\begin{aligned} W &= \sum \int_0^s S_x \cdot dAs = \sum \int_0^s S_x \cdot \frac{dS_x \cdot s}{EA} \\ W &= \sum \frac{S_x \cdot s}{2EA} = \frac{1}{2} \sum S_x^2 \cdot \rho \\ &= \frac{1}{2} \sum P \cdot \delta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2-24)$$

第 2-24 式は實際變形仕事に關するクラペイロンの直應力のなす等式にして、次の内容を有す。^{*}

溫度一定にして初應力なき弾性構造に外力の作用するとき、この外力は極めて徐々に作用して零に初まり最後に全量を及ぼし、而して釣合状態にあるとせば、此の外力がなすべき外的の仕事は、外力が變形を與へつゝある時間中一貫して其の全量を保持する場合の仕事の半分である。このことは内的の仕事に關しても同様である。而して内外の仕事の量は同量である。

第 2-24 式には溫度變化の影響を含まず。若し構造は別に t° の溫度變化を受けてゐたものとすれば、溫度變化に依る部材の長さの變化は $\varepsilon \cdot t \cdot s$ であつて、且つ部材に作用する内力は S であるから、トラスに於ける内的仕事の總和は $\frac{1}{2} \sum S \cdot As + \sum S \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s$ である。

^{*} Clapeyron. "Calcul d'une poutre elastique." 1857.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum P \cdot \delta = \frac{1}{2} \sum S \cdot As + \sum S \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \\ &= \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 \cdot s}{EA} + \sum S \cdot \varepsilon \cdot t \cdot s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2-25)$$

2) 充腹構造の實際仕事

第 2-23 式は假想荷重に依つてなさるゝ仕事を示し、之に反して實際荷重の場合を採らんとすれば、溫度變化の影響を示す項以外の項に含まれたる P, Q 及び M, N の代りに 1) に述べたる所と同じく $\frac{1}{2} P, \frac{1}{2} Q, \frac{1}{2} M, \frac{1}{2} N$ を入れれば良い。溫度變化の影響を含む項にあつては、變形は作用外力に無關係に起るが故に、 M, N はその儘とする。依つて充腹構造に於ける實際の仕事は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum P \cdot \delta &= \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{N^2}{2EA} ds + \int \frac{Q^2}{2GA} ds + \int M \cdot \varepsilon \cdot \frac{dt}{h} ds \\ &\quad + \int N \cdot \varepsilon \cdot t_0 \cdot ds \quad \dots\dots\dots(2-26) \end{aligned}$$

3) 一部トラス一部充腹なる構造の實際仕事

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum P \cdot \delta &= \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 \cdot s}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int \frac{Q^2}{GA} ds \\ &\quad + \sum \varepsilon \cdot t \cdot S \cdot s + \int M \cdot \varepsilon \cdot \frac{dt}{h} ds + \int N \cdot \varepsilon \cdot t_0 \cdot ds \quad \dots\dots(2-27) \end{aligned}$$

[例題]

長さ l なる片持梁の先端に荷重 P の作用した場合、その先端の曲げモーメントに因る撓みを求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \cdot \delta &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx, \text{ 但し } x \text{ は先端より測る。} \\ M &= P \cdot x \\ \therefore \delta &= \frac{1}{P} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{P}{EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{Pl^3}{3EI} \end{aligned}$$

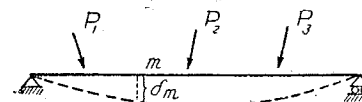
§ 5. 加算の法則

フックの法則に據れば、撓みの大きさは荷重の大きさに直線的に比例するのであるが、茲に弾性梁 AB の m 點の荷重 P_1, P_2, P_3 による鉛直撓みを δ_m とし、 P_1, P_2, P_3 が別々に載つた場合の δ_m を考へる。最初に、 P_1 のみによる δ_m を δ_{m1} とすれば、

$$\delta_{m1} = a_{m1} \cdot P_1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

式中 a_{m1} は弾性梁の撓みに關する或る係數(影響係數)である。

次に P_2 のみ作用する場合の δ_m を δ_{m2} とすれば



第 2-8 圖

$$\delta_{m2} = \alpha_{m2} \cdot P_2 \dots \dots \dots (2)$$

若し、 P_1 及 P_2 が同時に作用した場合の δ_m を $\delta_{m(1+2)}$ とすれば、

$$\delta_{m(1+2)} = \alpha_{m1} \cdot P_1 + \alpha_{m2} \cdot P_2 \dots \dots \dots (3)$$

が果して成立するか否か、之は重要な問題である。今、最初に P_1 が作用し、然る後に P_2 が作用するものとすれば、

$$\delta_{m(1+2)} = \alpha_{m1} \cdot P_1 + \alpha'_{m2} \cdot P_2 \dots \dots \dots (4)$$

既に P_1 によつて撓んである所に P_2 により更に撓むのであるから、此の場合には、 $\alpha_{m2} \neq \alpha'_{m2}$ と考えるのが一般的であるが、然るときは、此の二つの $\delta_{m(1+2)}$ は等しくないのである。最初に P_2 を、次に P_1 を作用させた場合にも更に異つた $\delta_{m(1+2)}$ が生ずるに違ひない。此の事は、反力、部材應力、曲げモーメント、剪断力の各種の場合に生ずる筈である。

之等の疑問は、吾々が構造物の變形を考えるから起るのであつて普通の計算に行ふやうに一切の變形を考へずに元の寸法及び元の形状をその儘探れば、例へば上記の $\delta_{m(1+2)}$ の如きは恒に零であり、構造物が弾性體であれば、荷重を除去したとき、 $\delta_{m(1+2)}$ は零となるのである。而して普通の構造物の變形は其の寸法に比して甚だ微小であるので、一般には變形を無視し、數多の荷重を作用させた時に生ずる影響（反力、モーメント、剪断力等）は、其の荷重を別個に作用させた時に生ずる影響の代數的和であると看做す事が出来る。今、 P_1, P_2, P_3 に因る應力を夫れ夫れ S_1, S_2, S_3 とすれば、この3個が同時に作用したときの應力は

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

此の法則を *Superposition* の法則と呼ぶ。

吾々は曲げと軸應力に作用されてゐる梁（柱）に對して

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{I} y$$

なる公式を用ゐる。之は *Superposition* の法則を適用してゐるのであるが、曲げモーメントによる撓みを考へれば單なる加算は出来ないのである。長柱の挫屈荷重に於ても同じである。又、吊橋のやうに變形の大なるものに於ても同じである。

§ 6. 弾性變形に於ける相反法則

不動なる支點上に靜止せる弾性構造に於て、初應力無く、又、溫度變化なき時、 P なる荷重群に因りて生ずる構造各點の變位は *Superposition* の法則に依り

$$\left. \begin{aligned} \delta_a &= \delta_{aa}P_a + \delta_{ab}P_b + \dots + \delta_{am}P_m + \dots \\ \delta_b &= \delta_{ba}P_a + \delta_{bb}P_b + \dots + \delta_{bm}P_m + \dots \\ \delta_m &= \delta_{ma}P_a + \delta_{mb}P_b + \dots + \delta_{mm}P_m + \dots \\ \dots &= \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2-28)$$

但し

$\delta_a, \delta_b, \delta_m \dots a, b, m \dots$ の各點の變位、其の方向は之等の各點に作用する力 $P_a, P_b,$

$P_m \dots$ の方向に同じ。

$\delta_{aa} \dots P_a=1$ に因る a 點の變位、其の方向は a 點に作用する P_a の方向に同じ。

$\delta_{am} \dots P_m=1$ に因る a 點の變位、其の方向は a 點に作用する P_a の方向に同じ。

$\delta_{ma} \dots P_a=1$ に因る m 點の變位、其の方向は m 點に作用する P_m の方向に同じ。

$\delta_{mm} \dots P_m=1$ に因る m 點の變位、其の方向は m 點に作用する P_m の方向に同じ。

即ち、變位 δ に附ける下記號のうち、單文字は其の位置を示し、複文字の第一は單文字の場合と同意義、第二は δ を生ずべき原因となる力の作用點を示す。

今茲に、 P_m が m 點に作用し、同時に P_n が n 點に作用する場合を考えれば、

$$\delta_m = \delta_{mm} P_m + \delta_{mn} P_n ; \delta_n = \delta_{nm} P_m + \delta_{nn} P_n$$

若し最初に P_m のみが m 點に作用する場合を考えれば、此のために生ずる m 點の變位は $\delta_{mm} P_m$ であつて、爲される外的の實際仕事は $\frac{1}{2} \delta_{mm} \cdot P_m^2$ である。之に加へて次に更に n 點に P_n が作用すると考えるときは、この P_n によつて n 點は $\delta_{nn} P_n$ だけ變位し、 m 點は $\delta_{nm} P_n$ だけ變位する。 n 點には P_n が作用し、 m 點には P_m が作用してゐるから茲になされる外的の實際仕事は夫々 $\frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2$ 及び $\delta_{nm} P_n P_m$ である。依つて全體の仕事は、

$$W = \frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \delta_{nm} P_n P_m \dots \dots \dots (a)$$

若し上に述べたものと反對に、 P_n が最初に作用し、然る後に P_m が作用するものとすれば全體になされる仕事は、

$$W = \frac{1}{2} \delta_{nn} P_n^2 + \frac{1}{2} \delta_{mm} P_m^2 + \delta_{nm} P_m P_n \dots \dots \dots (b)$$

然るに、實際仕事は荷重の作用する順序に關係が無いと考へられるから、上記 (a), (b) の2式は相等しく、即ち

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} \dots \dots \dots (2-29)$$

なる關係を生ず。この關係を弾性變形に於けるマックスウェルの相反法則 (*Reciprocal law ; Die Satz von der Gegenseitigkeit*) と云ひ、弾性構造の變位の關係を定めるに重要な法則である。

モールは此の相反法則をマックスウェルとは全く無關係に誘導したのであるが、それは

* Maxwell, "On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames." 1864.

後掲の第 3-7; 3-8 式に依つて證明することが出来る。

構造が充腹構造なる場合にも以上の關係式は成立する。即ち、荷重 $P_m=1$, 變位 δ_{mn} の状態に對する仕事は第 2-23 式に依り

$$1. \delta_{mn} = \int \frac{M_m M_n}{EI} ds + \int \frac{N_m N_n}{EA} ds + \int \frac{Q_m Q_n}{GA'} ds$$

又、荷重 $P_n=1$, 變位 δ_{nm} の状態に對する仕事は、

$$1. \delta_{nm} = \int \frac{M_n M_m}{EI} ds + \int \frac{N_n N_m}{EA} ds + \int \frac{Q_n Q_m}{GA'} ds$$

であるから

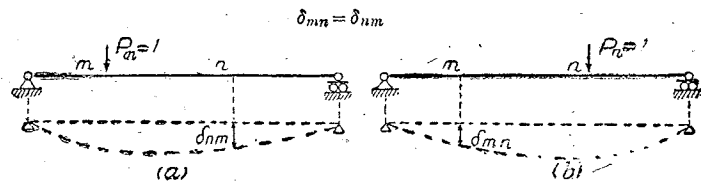
$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

此の變位の關係は後年ベティに依つて

$$\Sigma (P_m) (\delta_{mn}) = \Sigma (P_n) (\delta_{nm}) \dots \dots \dots (2-30)$$

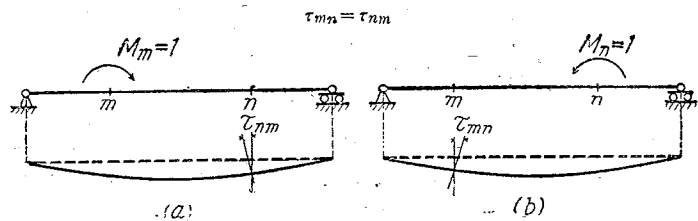
なる一般形式に擴張せられた。即ち、第 2-29 式のマックスウエルの法則は第 2-30 式のベティの法則に於ける $(P_m)=1; (P_n)=1$ なる特別の場合である。マックスウエルの法則は次に示す内容を包含してゐる。

- (1) $P_n=1$ に依りて生ずべき m 點の變位は δ_{mn} は、 $P_m=1$ に依りて生ずべき n 點の變位 δ_{nm} に等しい、但し、 δ_{mn} 及び δ_{nm} の方向は夫れ夫れ $P_m=1$ 及び $P_n=1$ の方向に同じである (第 2-9 圖)。



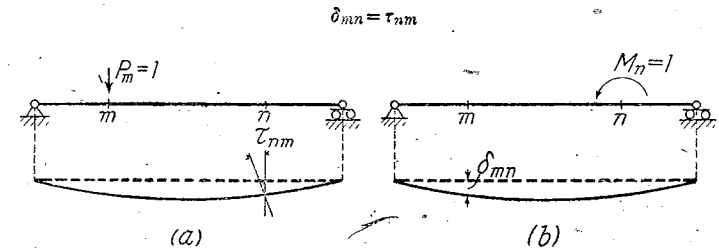
第 2-9 圖

- (2) m 點に作用する $M_m=1$ に依つて生ずる n 點の角變化 τ_{nm} は n 點に作用する $M_n=1$ に依つて生ずる m 點の角變化 τ_{mn} に等しい (第 2-10 圖)。



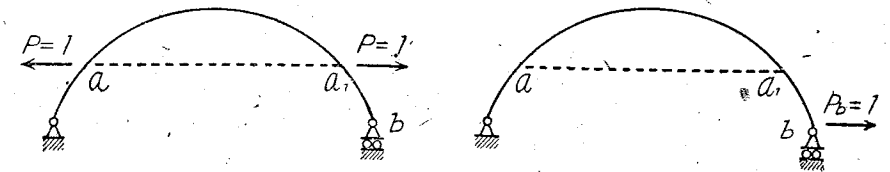
第 2-10 圖

- (3) m 點に作用する $P_m=1$ に依つて n 點に生ずる角變化 τ_{nm} は n 點に作用する $M_n=1$ に依つて生ずる m 點の $P_m=1$ の方向の變位 δ_{mn} と等しき數値を有す (τ_{nm} はラディアンにて示す) 第 2-11 圖。



第 2-11 圖

- (4) 一對點 a, a_1 に作用する $P=1$ に依つて b 點に生ずる $P_b=1$ の方向の變位 δ_{ba} は、 b 點に作用する $P_b=1$ による一對點 a, a_1 の相對的變位 $\delta_{a_1 a}$ に等しい (第 2-12 圖)。



第 2-12 圖

* Betti, "Il nuovo cemento", 1872.